«Τί ἐστιν ὅ μίαν ἔχον φωνὴν τετράπουν καὶ δίπουν καὶ τρίπουν γίνεται;»

Μούσες δια στόματος Σφιγγός προς Οιδίποδα
(Απολλόδωρος, *Βιβλιοθήκη*, 3, 53, 3)

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης,

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας,
Τμήματος Μουσικών Σπουδών, Φιλοσοφικής Σχολής,
Πανεπιστημίου Αθηνών.

hspyridis@music.uoa.gr

Περίληψις: Οι «παλαιοὶ» Έλληνες φιλόσοφοι, τραγικοί και ποιητές εδίδασκον κρυφίως «*μύθῳ φιλοσοφοῦντες*» κάποιες αποκρύφους διδασκαλίες, κεκαλυμμένες με αριστοτεχνικόν φιλοσοφικόν τρόπον. Η απόκρυφος γνώσις δεν επετρέπετο «ἐπὶ ποινῇ θανάτου» να κοινολογηθή εκ των «μεμυημένων» εις τους «κοινούς» θνητούς˙ «*οὐ τὰ πάντα τοῖς πᾶσι ῥητὰ*».

Ασχολούμενος με την εις βάθος ανάλυσιν χωρίων εκ της αρχαιοελληνικής γραμματείας, σχετικών με την Πυθαγόρειον μουσικήν, επεκεντρώθην εις την λύσιν του αινίγματος των μουσών, το οποίον έλαβεν κι έθετεν άδουσα εμμελώς κι εμμέτρως η Καδμεία Σφίγξ εις τους περαστικούς προς τις Θήβες και περί του οποίου θρυλούνται πλείστα όσα. Η Καδμεία Σφίγξ είχεν κεφαλήν γυναικός, σώμα λέοντος, πτέρυγες γρυπός και όνυχες αετού. Μολονότι το ακριβές αίνιγμα δεν τυγχάνει γνωστόν εξ αρχαίων πηγών, αλλ’ εκ μεταγενεστέρων κειμένων, έλεγεν: «*Τί είναι αυτό, το οποίον έχει μίαν φωνήν και το πρωί περπατεί εις τα τέσσερα, το μεσημέρι εις τα δύο και το βράδυ εις τα τρία;*». Τον μη απαντώντα ορθώς η Σφίγξ τον έπνιγεν. Ο Οιδίπους, θρυλείται ότι έλυσεν το αίνιγμα λέγων ότι είναι ο άνθρωπος, εφ’ όσον ως βρέφος «μπουσουλά» εις τα τέσσερα, μετά ορθούται στηριζόμενος εις τους δύο του πόδες και ως γέρων περπατεί σκυφτός εις τα τρία, υποβασταζόμενος υπό βακτηρίας. Με την λύσιν του αινίγματος η Σφιγξ κατεβαραθρώθη, οι Θηβαίοι εσώθησαν κι άρχισαν τα δεινά του Οιδίποδος...

Προσωπικώς επ’ ουδενί δύναμαι να πιστέψω ότι εις το ανθρωποφαγικόν αίνιγμα του μύθου αποκρύπτονται οι τρεις ηλικίες του ανθρώπου κατά την Οιδιπόδειον απάντησιν και υποστηρίζω την δια του μύθου αυτού διδασκαλίαν συγκεκριμένων αποκρύφων Πυθαγορείων μουσικών θεωριών.

Ι. Προλεγόμενα

Οι Πυθαγόρειοι κατά τον Ιάμβλιχον (*Περί του Πυθαγορικού Βίου*, 23, 103, 1 -105, 9) δεν απεκάλυπτον τις αρχές της επιστήμης, παρά μόνον εις άτομα κριθέντα -κατόπιν ενδελεχούς ελέγχου- άξια να τις κατέχουν. Η απόκρυφος γνώσις δεν επετρέπετο «ἐπὶ ποινῇ θανάτου» να κοινολογηθεί υπό των μεμυημένων εις τους κοινούς θνητούς, διότι «οὐ τὰ πάντα τοῖς πᾶσι ῥητὰ». Οι «παλαιοὶ» Έλληνες φιλόσοφοι, τραγικοί και ποιητές εδίδασκον κρυφίως «μύθῳ φιλοσοφοῦντες» ωρισμένες αποκρύφους διδασκαλίες, κεκαλυμμένες δι’ αριστοτεχνικού φιλοσοφικού τρόπου.

Κυρίες και κύριοι σύνεδροι, δια των ακολουθουσών λακωνικών πληροφοριών περί την αρχαίαν ελληνικήν μουσικήν ευελπιστώ να σας καταστήσω στοιχειωδώς μύστες, ώστε να δυνηθείτε να κατανοήσετε τα εις την εισήγησίν μου εκτυλισσόμενα.

II. Ο μύθος του Οιδίποδος

Το όνομα Οιδίπους προέρχεται εκ του ρήματος οἰδέω, σπανίως οἰδάω (=πρήζομαι, φουσκώνω) και την λέξιν ποῦς (=πόδι) και σημαίνει τον έχοντα πρησμένους τους πόδας του.
Ο μύθος του Οιδίποδος εντάσσεται εις τα πλαίσια του «Θηβαϊκού Κύκλου» και αναφέρεται εις ήρωα, όστις εν αγνοία του σκοτώνει τον πατέρα του, καθιστάμενος πατροκτόνος, εν αγνοία του νυμφεύεται την μητέραν του και αποκτά μετ' αυτής τέσσερα τέκνα, καθιστάμενος, τοιουτοτρόπως, αιμομείκτης.

III. Οι Μούσες

Ο επικός Ησίοδος εις την *Θεογονίαν* του (γρ. 77-79) αριθμεί εννέα μούσες. «Μοῦσαι Ὀλυμπιάδες, κοῦραι Διὸς».

ἐννέα θυγατέρες μεγάλου Διὸς ἐκγεγαυῖαι, Κλειώ τ' Εὐτέρπη τε Θάλειά τε Μελπομένη τε Τερψιχόρη τ' Ἐρατώ τε Πολύμνιά τ' Οὐρανίη τε Καλλιόπη θ'·

Κλειὼ εὑρηκέναι τὴν ἱστορίαν, Θάλεια δὲ γεωργίαν καὶ τὴν περὶ τὰ φυτὰ πραγματείαν, Εὐτέρπη δὲ μαθήματα, Τερψιχόρη δὲ παιδιάν, Ἐρατὼ δὲ ὄρχησιν, Πολυμνία δὲ λύραν, Μελπομένη δὲ ᾠδήν, Οὐρανία δὲ ἀστρολογίαν, Καλλιόπη δὲ ποίησιν.

Σχόλια στα *Αργοναυτικά* του Απολλωνίου του Ροδίου (215, 1-4)

IV. Αίνιγμα

Αίνιγμα καλείται η αναφορά των ιδιοτήτων και των γνωρισμάτων ενός αντικείμενου άνευ της ρητής αναφοράς αυτού καθ' εαυτού του αντικειμένου.

Αἰνίγματα γάρ ἐστι τὰ διὰ τῶν ἐναντίων δηλούμενα.

Scholia in Demosthenem : Scholia in Demosthenem (scholia vetera)
Oration 19 section 584 line 1.

Γνωστόν εκ της Μυθολογίας τυγχάνει το αίνιγμα της Σφιγγός προς τον Οιδίποδα, το οποίο «ἐμμελῶς τε καὶ ἐμμέτρως ἐλέγετο».

V. Το αίνιγμα της Σφιγγός

Η ακριβής διατύπωσις του αινίγματος, το οποίον έθετεν η Σφίγξ, δεν μας είναι γνωστόν εξ αρχαίων πηγών, αλλ' εκ μεταγενεστέρων κειμένων.
Η πλέον αναλυτική του διατύπωσις δίδεται υπό του Αθηναίου:

ἔστι **δίπουν** ἐπὶ γῆς καὶ **τετράπον**, οὗ **μία** φωνή, καὶ **τρίπουν**, ἀλλάσσει δὲ φύσιν μόνον ὅσσ' ἐπὶ γαῖαν ἑρπετὰ γίνονται ἀνά τ' αἰθέρα καὶ κατὰ πόντον· ἀλλ' ὁπόταν πλείοσιν ἐρειδόμενον ποσὶ βαίνῃ, ἔνθα τάχος γυίοισιν ἀφαυρότερον πέλει αὐτοῦ.

Αθήναιος, Δειπνοσοφισταί, 10, 83, 37-41 & Αθήναιος,
Δειπνοσοφισταί (Επιτομή), 22, 48, 12-16.

τί ἐστιν ὃ μίαν ἔχον φωνὴν **τετράπουν** καὶ **δίπουν** καὶ **τρίπουν** γίνεται;

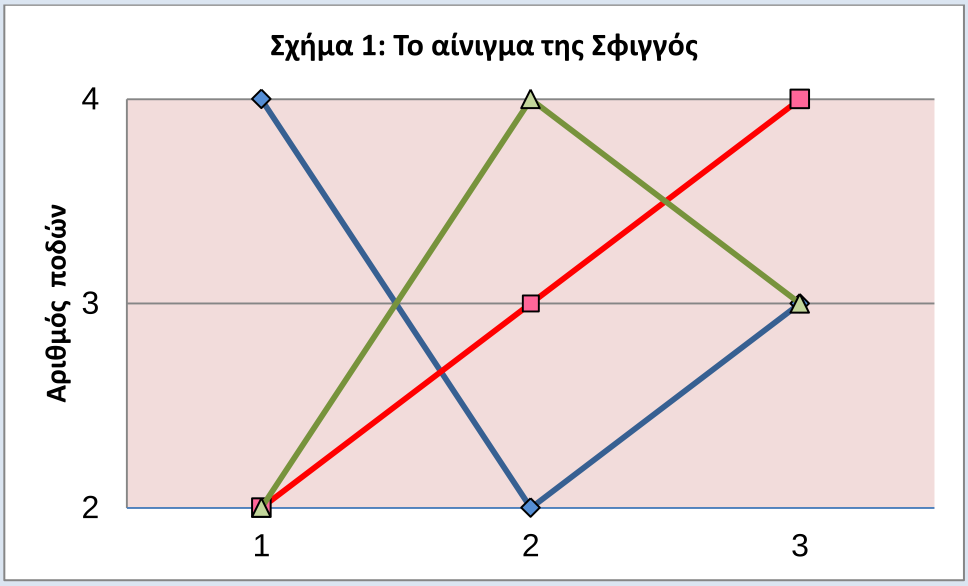
ψευδο-Απολλόδωρος, *Βιβλιοθήκη*, 3, 53, 2-3.

Δια των ακολούθως εκτιθεμένων διατυπώσεων του αινίγματος της Σφιγγός επιθυμώ να καταδείξω ότι η αλληλουχία δια της οποίας εκτίθενται τα επίθετα δίπουν, τρίπουν, τετράπουν, δεν έχει καμίαν σχέσιν με τις ηλικιακές φάσεις του ανθρωπίνου όντος.

Τετράπους, **δίπους**, καὶ πάλιν **τρίπους**.
Ζηνόβιος, Epitome collectionum Lucilli Tarrhaei et Didymi, 2, 68, 3-4,
και Σχόλια εις τον Αισχύλο, Th, 3, 38-39.

τί ἐστι τὸ αὐτὸ **δίπουν**, **τρίπουν**, **τετράπουν**.
Διόδωρος ο Σικελιώτης, *Ιστορική Βιβλιοθήκη*, 4, 64, 3, 9-10.

« Ἔστι **δίπουν** ἐπὶ γῆς καὶ **τετράπον**, οὗ μία φωνή, καὶ **τρίπον**, ἀλλάσσει δὲ φύσιν μόνον, ὅσσ’ ἐπὶ γαῖαν ἑρπετὰ γίνονται, καὶ ἀν’ αἰθέρα καὶ κατὰ πόντον. Ἀλλ’ ὁπόταν πλείστοισιν ἐρειδόμενον ποσὶ βαίνῃ, ἔνθα τάχος γυίοισιν ἀφαυρότατον πέλει αὐτοῦ»
Ασκληπιάδης, *Σπαράγματα*, Σπ. 21b, 4-8.



VI. Η Σφίγξ

Η Σφιγξ τυγχάνει έν εκ των αιωνίων Αρχετύπων. Κατά μίαν εκδοχήν η λέξις Σφίγξ ετυμολογείται εκ της αρχαίας λέξεως **σφείς**, η οποία χρησιμοποιείται ήδη εκ της εποχής του Ησίοδου και του Όμηρου και σημαίνει **διττός**, δηλαδή αυτός, ο οποίος είναι διπλούς ή αυτός, ο οποίος ερμηνεύεται διττώς.

Έχει θεωρηθεί ότι η λέξις προέρχεται εκ του ρήματος **σφίγγω**, γεγονός που ωδήγησε εις μεταγενέστερες εκδοχές του μύθου, συμφώνως προς τις οποίες η Σφίγξ έσφιγγε μέχρι πνιγμού και εσκότωνε όλους, όσους δεν ηδύναντο να απαντήσουν εις το αίνιγμά της.

Ο Ησίοδος (Θεογονία, γρ. 326) την αναφέρει ως Φῖκα,[1] θυγατέρα της Χίμαιρας και του Όρθρου ή, κατ’ άλλους, του Τυφώνος[2] και της Εχίδνης[3] και αποτέλει όλεθρον για τους Καδμείους.
Η Σφιγξ τυγχάνει Αιγυπτιακής προελεύσεως και οι ερμηνείες των συμβολισμών της υπήρξαν ποικίλες. Κατά την μυθολογίαν οι θεοί Ήρα και Άρης έστειλαν την Σφίγγα εκ της πατρίδος της, την Αιθιοπίαν, εις την Θήβαν της Βοιωτίας. Η Σφιγξ εγκατεστάθη εις το Φίκιον[4] όρος, το οποίον εχώριζεν την πεδιάδα των Θηβών από την πεδιάδα της Κωπαΐδος, και έθετεν εις τους περαστικούς ένα αίνιγμα˙ τον μη δυνάμενον να απαντήσει εις το αίνιγμα τον εσκότωνε.
Εις την ελληνικήν μυθολογίαν η **Σφίγξ** εμφανίζεται ως τέρας, αναπαριστάμενον ως γυνή έχουσα πέλματα και στήθη λέοντος, ουράν ερπετού και πτερά αετού.

---

[1] Κλείνεται ως: Φὶξ, Φικὸς, Φικὶ, Φῖκα.

[2] τυφὼν δὲ καλεῖται διὰ τὸ οἷον τύπτειν διὰ τοῦ τάχους τοῦ πνεύματος· διὰ γὰρ τοῦτο καὶ ὁ ποιητής φησι καὶ τὰς ἀέλλας καὶ τὰς συστροφὰς τῶν πνευμάτων.
Ολυμπιόδωρος, *Σχόλια εις τα Αριστοτελικά Μετέωρα*, 13, 16-18.

Τυφὼν δὲ εἷς ταῶν Γιγάντων, Γῆς ὢν καὶ Ταρτάρου, πολέμιος τοῖς θεοῖς, ὥς φησιν Ἡσίοδος.
Σχόλια εις την Ιλιάδα του Ομήρου, 2, 782, 1-2.

Τυφὼν Γῆς καὶ Τερτάρου υἱός, γεννηθεὶς ἐν Σικελίᾳ, εἶδος ἔχων σύμμιγες ἀνδρὸς καὶ θηρίων.
Σχόλια εις τον Πλάτωνα, Phdr, 230a, 2-3.

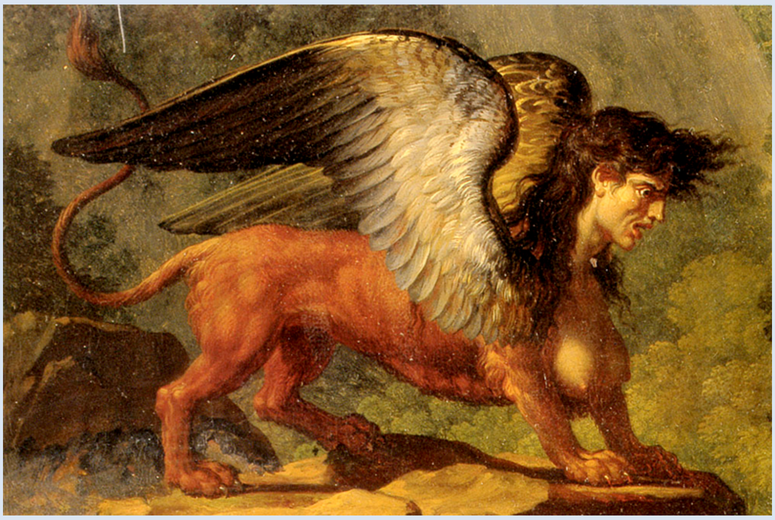
ὁ λεγόμενος τυφὼν ἀνεμώδης, ὅν τινες στρόβιλον ὀνομάζουσι
Ιάμβλιχος, *Θεολογούμενα της Αριθμητικής*, 41, 7-8.

[3] ἣ μητρὸς μὲν Ἐχίδνης ἦν πατρὸς δὲ Τυφῶνος
Απολλόδωρος, Βιβλιοθήκη, 3, 52, 5-6.

[4] <Σφὶγξ> αὕτη δε ἐστι θυγάτηρ Χιμαίρας καὶ Τυφῶνος. ἀπ’ αὐτῆς ἐκλήθη καὶ τὸ Φίκιον, ἔνθα διέτριβε. Φῖκα δὲ αὐτὴν οἱ Βοιωτοὶ ἔλεγον.
Σχόλια εις την Θεογονία του Ησιόδου, 326, 1-3.

Ταχέως δὲ κατέλαβε τὸ Τυφαόνιον ὄρος τῆς Βοιωτίας, διὰ τὸ Τυφῶνι ἐπικεῖσθαι. Ἐκεῖθε δὲ πάλιν ἐπέβη τὸ ἄκρον τοῦ Φικίου. Ἔστι δὲ ὄρος τῆς Βοιωτίας. Ὠνομάσθη δὲ ἐκ τῆς Σφιγγὸς, ἣν Φίκα ἐκάλουν οἱ Βοιωτοί.
Pediasimus: Scholia in Hesiodi scutum, 615, 1-5.

Φίκιον τέρας, ἑλικτὰ κωτίλλουσα δυσφράστως ἔπη.
Λυκόφρων, *Αλεξάνδρα*, 1465-1466.



Εικών 1: Λεπτομέρεια εκ του ζωγραφικού πίνακος του Francois-Xavier Fabre Οιδίπους και Σφίγξ.

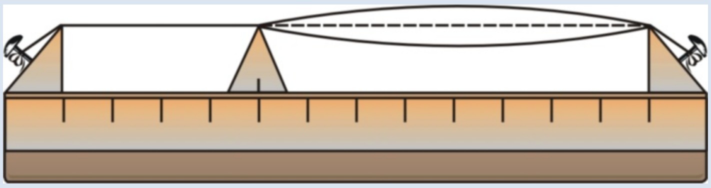
VII. Στοιχεία εκ της Πυθαγορείου Μουσικής Θεωρίας

VII.1. Η έννοια μουσικόν «διάστημα»

Εις την αρχαιοελληνικήν μουσικήν ονομάζεται μουσικόν διάστημα ο λόγος των μηκών δύο δονουμένων και ηχούντων τμημάτων χορδής $\frac{L_2}{L_1}$.

Εάν τυγχάνει $L_2 < L_1$ το μουσικό διάστημα ονομάζεται **ανιόν**.

VII.2. Ο κανών ή μονόχορδον

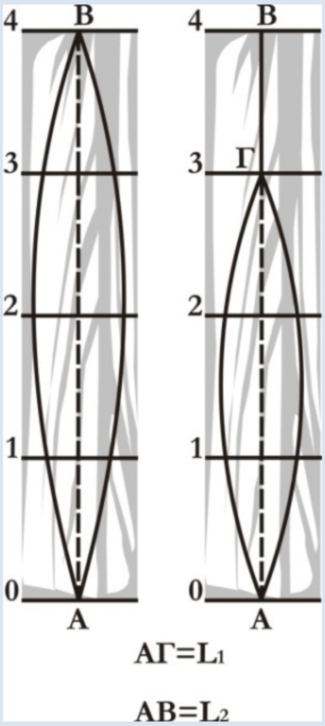


Σχήμα 2: Το μονόχορδον για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Το μονόχορδον αποτελεί διάταξιν υλοποιούσα τον μετασχηματισμόν μουσικών υψών εκ του χώρου της Ακουστικής εις μήκη δονουμένων τμημάτων χορδής εις τον χώρον της Οπτικής.
Εν άλλοις λόγοις, δια του μονοχόρδου υλοποιείται η σημερινή έκφρασις «*άκου να δεις*».

VII.3. Κατατομή του Κανόνος

Η χάραξις (=σημείωσις) κατά μήκος του κανόνος των πρεπόντων μηκών των δονουμένων τμημάτων χορδής, ώστε ακουστικώς να υλοποιούνται οι Πυθαγόρειες συμφωνίες και πάντα τα άλλα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα, ονομάζεται *Κατατομή του Κανόνος*.
Ο παλαιότερος κανών εδιαιρείτο εις τέσσερα ίσα μέρη (κατατομή του κανόνος διχῶς, τριχῶς και τετραχῶς).



Σχήμα 3: Ο Κανών ή μονόχορδο, ο μετασχηματιστής.

Η εις τέσσερα υποδιαιρέσις του κανόνος επεβάλλετο υπό της ιεράς Πυθαγορείου τετρακτύος, ενσαρκωτές της οποίας ήσαν οι αριθμοί 1, 2, 3, 4.

Σχήμα 4: Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος
(4 κατά δύναμιν και 10 κατ' αριθμόν 10=1+2+3+4).

VII.4. Ανοδικές και καθοδικές μουσικές κινήσεις

Σφίγγα για την ορθήν κατανόησιν της μελωδικής πορείας (ανοδικής ή καθοδικής) της αρχαιοελληνικής μουσικής αποτελεί το ρήμα **ἄνειμι** (ἀνὰ+εἶμι=ανέρχομαι, ανεβαίνω), το οποίον δηλώνει κίνησιν με σημασίαν εξαρτωμένην εκ του υποκειμένου του.

Πρέπει επιμελώς να διακριβωθεί, εάν η χείρ του μουσικού εκτελεστού πραγματοποιεί την ανοδικήν κίνησιν, κινουμένη επί του κανόνος του εγχόρδου μουσικού οργάνου, ή εάν το μουσικόν ύψος του παραγομένου ήχου εκτελεί την ανοδικήν κίνησιν.

Ανοδική κίνησις της χειρός του μουσικού εκτελεστού επί του κανόνος του εγχόρδου μουσικού οργάνου ισοδυναμεί με καθοδικήν κίνησιν των μουσικών υψών της μελωδίας και, αντιστρόφως, δεδομένου ότι τα μουσικά ύψη είναι μεγέθη αντιστρόφως ανάλογα των ταλαντουμένων μηκών χορδής.

VII.5. Πυκνές και αραιές μουσικές κινήσεις

Αξία θαυμασμού τυγχάνει η προσπάθεια των Πυθαγορείων να οπτικοποιήσουν το ψυχοακουστικόν μέγεθος «**μουσικόν ύψος**».

Πράγματι, ο οφθαλμός μας δύναται να διακρίνει τις διαδοχικές θέσεις μιας βραδέως ταλαντουμένης χορδής, η οποία παράγει έναν «χαμηλού» μουσικού ύψους ήχον, ενώ

δεν δύναται να διακρίνει τις διαδοχικές θέσεις μιας ταχέως ταλαντουμένης χορδής, η οποία παράγει έναν «υψηλού» μουσικού ύψους ήχον. Εις την πρώτην περίπτωσιν ενέτασσον τους «**αραιούς**» ήχους και εις την δευτέραν περίπτωσιν τους «**πυκνούς**» ήχους.
Σχετικήν αναφοράν ευρίσκομεν εις την εισαγωγήν της Ευκλειδείου μουσικομαθηματικής πραγματείας «***Κατατομή Κανόνος***» (γρ. 6-12):

«τῶν δὲ κινήσεων αἱ μὲν πυκνότεραί εἰσιν, αἱ δὲ ἀραιότεραι, καὶ αἱ μὲν πυκνότεραι ὀξυτέρους ποιοῦσι τοὺς φθόγγους, αἱ δὲ ἀραιότεραι βαρυτέρους, —ἀναγκαῖον τοὺς μὲν ὀξυτέρους εἶναι, ἐπείπερ ἐκ πυκνοτέρων καὶ πλειόνων σύγκεινται κινήσεων, τοὺς δὲ βαρυτέρους, ἐπείπερ ἐξ ἀραιοτέρων καὶ ἐλασσόνων σύγκεινται κινήσεων».

VII.6. Τετράχορδον: Το κύτταρον των αρχαιοελληνικών μουσικών συστημάτων

Το σύνολον τεσσάρων διαδοχικών (=**ἑξῆς μελῳδουμένων**) χορδών ή φθόγγων (υπάτη, παρυπάτη, λιχανός, νήτη), των δομούντων την διατεσσάρων συμφωνία $\left(\frac{4}{3}\right)$ συνιστά το τετράχορδον σύστημα.
Τετράχορδον εν συζεύξει μετά τόνου δομεί το πεντάχορδον σύστημα.

Τετράχορδον εν συζεύξει μετά πενταχόρδου ή εν διαζεύξει μεθ' ετέρου τετραχόρδου, δομεί το οκτάχορδον σύστημα.

VIII. Η απάντησις του Οιδίποδος ως λύσις του αινίγματος

Το αίνιγμα, το οποίον εδιδάχθη υπό των Μουσών η Σφιγξ έχει ως εξής:

ἔστι δίπουν ἐπὶ γῆς καὶ τετράπον, οὗ μία φωνή, καὶ τρίπουν, ἀλλάσσει δὲ φύσιν μόνον ὅσσ' ἐπὶ γαῖαν γίνονται ἀνά τ' αἰθέρα καὶ κατὰ πόντον· ἀλλ' ὁπόταν πλείοσιν ἐρειδόμενον ποσὶ βαίνῃ, ἔνθα τάχος γυίοισιν ἀφαυρότερον πέλει αὐτοῦ.

Αθήναιος (Δειπνοσοφισταί, Βιβλίο 10 Kaibel παρ. 83 γρ. 37 και τ. 2, 2 σ. 48, γρ. 11),
Ασκληπιάδης (Σπαράγματα, σπ. 21b, γρ. 1),
Ελληνική Ανθολογία,
Σχόλια εις τον Ευριπίδην,
Σχόλια εις τον Λυκόφρονα

[Υπάρχει επί της γης έν ον δίποδον και τετράποδον και τρίποδον με μίαν φωνήν, το οποίον είναι το μόνον αλλάζον την φύσιν του εν σχέσει προς τα όσα κινούνται επί της γης, εις τον αέραν και την θάλασσαν˙ αλλ' όταν περπατεί χρησιμοποιούν τον μεγαλύτερον δυνατόν αριθμόν ποδών (ήτοι τα τέσσερα), τότε καθίσταται περισσότερον βραδυκίνητον].

Η απάντησις του Οιδίποδος δια της οποίας ελύθη το αίνιγμα της Σφιγγός, εξ αιτίας του οποίου πληθώρα ανθρώπων κατεσπαράχθησαν υπό του ανθρωποβόρου θηρίου, έχει ως ακολούθως:

Κλῦθι καὶ οὐκ ἐθέλουσα, κακόπτερε Μοῦσα θανόντων, φωνῆς ἡμετέρης, σὸν τέλος ἀμπλακίης. ἄνθρωπον κατέλεξας, ὃς ἡνίκα γαῖαν ἐφέρπει πρῶτον ἔφυ τετράπους

νήπιος ἐκ λαγόνων, γηραλέος δὲ πέλων τρίτατον <πόδα> βάκτρον ἐρείδει αὐχένα φορτίζων γήραϊ καμπτόμενος.

Σχόλια εις τον Ευριπίδην
Σχόλια εις τον Αισχύλον

[Άκουσον και ας μη σου αρέσει απαισία Μούσα αυτών, οι οποίοι απέθανον (επειδή δεν κατάφεραν να σου απαντήσουν) την ιδικήν μου απάντησιν προκειμένου να δοθεί έν τέλος εις την εσφαλμένην εντύπωσίν σου ότι κανείς δεν γνωρίζει την απάντησιν εις αυτό, το οποίον ερωτάς. Τον άνθρωπον περιέγραψες, ο οποίος, όταν είναι νήπιον, μπουσουλά επί της γης και αρχικώς εκ της φύσεώς του είναι τετράποδον, γέρων, όμως, για να κινηθεί χρησιμοποιεί τρίτον πόδα, το μπαστούνι, κυρτωμένος υπό του βάρους του χρόνου].

Εις το σημείον αυτό οφείλομεν να παρατηρήσωμεν και να τονίσωμεν μετ’ εμφάσεως τρεις εξαιρετικής σπουδαιότητος -εμφανώς εσκεμμένες- δράσεις του Οιδίποδος:

1. Ενώ η Σφιγξ εις το αίνιγμά της αναφέρει πρώτον το επίθετον «δίπουν» και δεύτερον το επίθετον «τετράπουν», ο Οιδίπους, παραλείπων παντελώς το επίθετον «δίπουν», αρχίζει την απάντησίν του με το επίθετον «τετράπουν». Τοποθετούσα η Σφίγξ τα επίθετα κατ’ αυτήν την σειράν, κάποιον ιδιαίτερον λόγον θα είχεν.

2. Εις την απάντησίν του ο Οιδίπους παρέλειψεν να περιλάβει το «μίαν φωνήν». Για να το ερωτά η Σφίγξ, κάτι το ιδιαίτερον θα υποδηλοί.

3. Η Σφιγξ αποδίδει το «επί γης» εις το «δίπουν», ενώ ο Οιδίπους το αποδίδει εις το «τετράπουν» («γαίαν εφέρπει»).

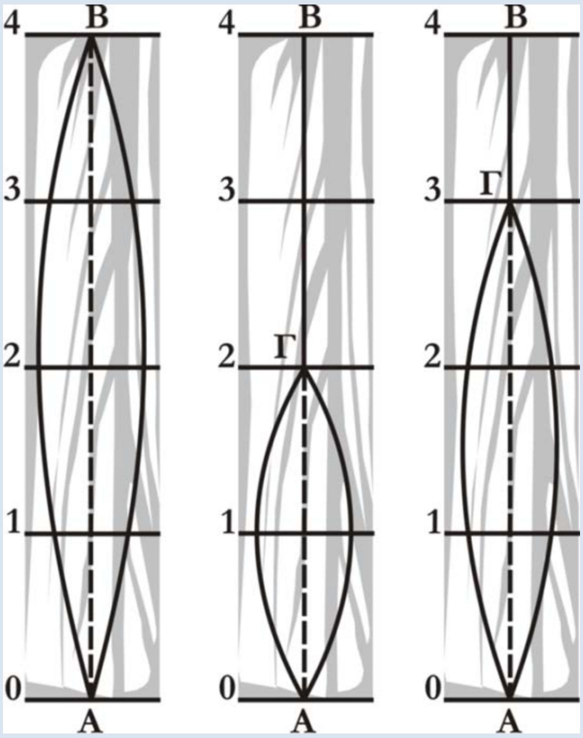
Θεωρώ λογικήν αυτήν την εσκεμμένην ενέργειαν του Οιδίποδος, η οποία δείχνει άνδρα εύστροφον, τολμηρόν και αποφασιστικόν, όστις δεν διστάζει να «**κόψει**» αντί να «**λύσει**» τον «Γόρδιον δεσμόν» διαστρεβλώνων την πραγματικότητα, ασχέτως εάν αυτό αλλάζει άρδην τα μουσικολογικά γεγονότα.

IX. Η Πυθαγόρειος μουσικολογική εκδοχή του αινίγματος της Σφιγγός

Η απάντησις εις παν αίνιγμα, το οποίον θέτει αυτή καθεαυτή η ζωή, η Σφίγξ, είναι υπόθεσις εσωτερική, καθαρώς βιωματική· απάντησιν, την οποίαν ή την κατακτάς ή μένει χωρίς καμίαν αξίαν.
Τονίζω μετ’ επιτάσεως την προσωπικήν μου θέσιν ότι ο διάλογος μεταξύ της εκπροσώπου των Μουσών, της Σφιγγός, και του Οιδίποδος, του βασιλικού γόνου του Λαΐου, όστις ανετράφη και εμορφώθη ως πρίγκιψ υπό των θετών γονέων του, τον Πόλυβον και την Μερόπην, θα ώφειλεν να ήτο μυσταγωγικού περιεχομένου.
Υποστηρίζω την άποψιν ότι η εντελέχεια του αινίγματος είναι η θεολογική φανέρωσις αρρήτων δογμάτων της Πυθαγορικής μουσικής θεωρίας εις όσους έτυχον μυήσεως κάποιου βαθμού.

Κατά την αποκωδικοποίησιν του αινίγματος της Σφιγγός, εμφανεστάτη τυγχάνει η παρουσία της Πυθαγορείου ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4).
Ο αριθμός 1 προκύπτει εκ του «οὗ μία φωνή» και, κατ’ εμέ, υπονοείται ο Πυθαγόρειος κανών, το μονόχορδον, με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

Θεωρώ ότι οι λέξεις δίπουν, τρίπουν, τετράπουν εις τον διάλογον μεταξύ Σφιγγός και Οιδίποδος αφορούν εις την διχή, τριχή και τετραχή διαίρεσιν του κανόνος καθώς επίσης εις την τοποθέτησιν του υπαγωγέως του κανόνος εις τις υποδιαιρέσεις 2, 3 και 4, αντιστοίχως.



Σχήμα 5: Το αίνιγμα της Σφιγγός επί του μονοχόρδου.

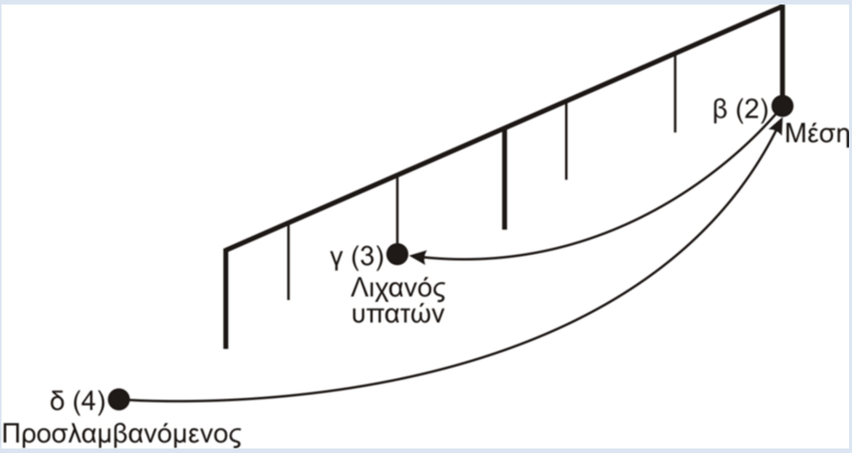
Εις το αίνιγμα της Μουσικογνώστρας Σφιγγός, της καθοδηγουμένης υπό των Μουσών, σπουδαίαν σημασίαν έχει η θέσις και το νόημα εκάστης λέξεως εις αυτό.
Η Σφιγξ λ.χ. αποδίδει το «επί γης» εις το «δίπουν», ενώ ο Οιδίπους το αποδίδει εις το «τετράπουν» («ὃς ἡνίκα γαῖαν ἐφέρπει πρῶτον ἔφυ τετράπους νήπιος ἐκ λαγόνων»).
Η θέσις του σώματος του ανθρώπου ως προς την γην, προσδιοριζομένη υπό των επιθέτων τετράπουν, δίπουν, τρίπουν, συσχετίζεται μετά των θέσεων του υπαγωγέως του κανόνος 4, 2 και 3 και, κατά συνέπειαν, με το εκάστοτε μουσικόν ύψος του παραγομένου ήχου υπό του κανόνος.
Κατά την εκδοχήν του Οιδίποδος, ευρισκομένου του υπαγωγέως του κανόνος εις την υποδιαίρεσιν 4, το ανθρώπινον βρέφος, ως τετράπουν, μπουσουλά εις τα 4 και υπό της χορδής του κανόνος παράγεται ο χαμηλότερος δυνατός, ως προς το μουσικόν ύψος, ήχος (βόμβυξ).

Το ανθρώπινον ον καθίσταται δίπουν, δηλαδή ανασηκώνεται και περπατεί με τους 2 του πόδας, ευθυτενές, αγέρωχον. Ο υπαγωγεύς δηλαδή κατέρχεται εις την υποδιαίρεσιν 2, οπότε παράγεται υπό της χορδής του κανόνος ήχος ένα διαπασών υψηλότερος του βόμβυκος.

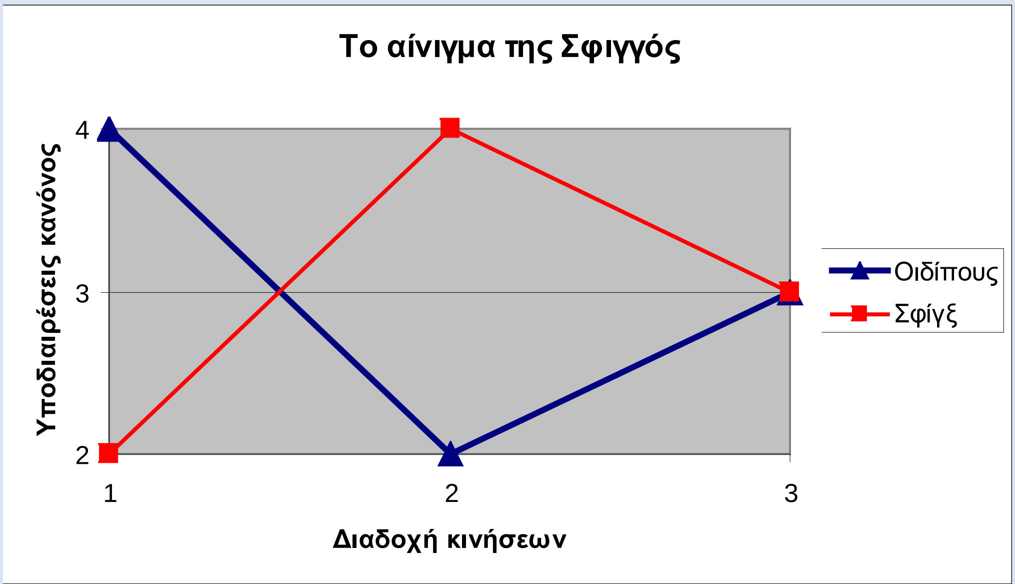
Το ανθρώπινον ον γηρασμένον, κάμπτει τους ώμους και περιπατεί κυρτωμένον, στηριζόμενον επί βακτηρίας, καθιστάμενον ούτω πως τρίπουν. Ο υπαγωγεύς ανέρχεται εις την υποδιαίρεσιν 3, οπότε παράγεται υπό της χορδής του κανόνος ήχος κατά έν δια πέντε (3/2) διάστημα χαμηλότερος του προηγουμένου.

Τα προμνημονευθέντα τρία μουσικά ύψη, άτινα παρήχθησαν, αναγόμενα εις το οκτάχορδον σύστημα, αντιστοιχούν εις τους φθόγγους υπάτην (4) – νήτην (2) – μέσην (3).
Κατά την εκδοχήν της Σφιγγός, όπως αύτη καταγράφεται υπό του Αθηναίου κ.α. η αλληλουχία των επιθέτων «δίπουν, τετράπουν, τρίπον» σημαίνει την διαδοχικήν τοποθέτησιν του υπαγωγέως του κανόνος εις τις υποδιαιρέσεις 2, 4 και 3 και την παραγωγήν των φθόγγων του οκταχόρδου συστήματος νήτην (2), υπάτην (4) –ένα διαπασών χαμηλότερον-, μέσην –ένα δια τεσσάρων υψηλότερον (3)-.

Αναγόμενοι εις το δις διαπασών σύστημα αντιστοιχούν εις τους φθόγγους προσλαμβανόμενον – μέσην – λιχανόν υπατών διάτονον, επισημαίνοντες τον διατονικόν χαρακτήρα αυτού.



Σχήμα 6: Το αίνιγμα της Σφιγγός επί του δις διαπασών συστήματος.



Σχήμα 7: Ο διάλογος Σφιγγός – Οιδίποδος εν διαγράμματι.

Πάντα ταύτα τα μουσικολογικά στοιχεία, τα οποία εγώ αποδίδω ερμηνεύων το αίνιγμα της Μουσοκαθοδηγουμένης Σφιγγός, συνάδουν και με την έκφρασιν «ἀλλ’

ὁπόταν πλεόνεσσιν ἐρειδόμενον ποσὶ βαίνει, ἔνθα μένος γύοισιν ἀφαυρότερον πέλει αὐτοῦ».
[Αλλ' όταν περπατεί χρησιμοποιούν τον μεγαλύτερον δυνατόν αριθμόν ποδιών (δηλαδή τα τέσσερα), τότε καθίσταται περισσότερον βραδυκίνητον].

Πράγματι, όπως έχει προαναφερθεί, το επίθετον τετράπουν υπονοεί την τοποθέτησιν του υπαγωγέως του κανόνος εις την υποδιαίρεσιν 4 του κανόνος, η οποία είναι η μεγαλυτέρα αυτού, οπότε τίθεται εις ταλάντωσιν βραδείαν (=αραιά) ολόκληρον το μήκος της χορδής του κανόνος, παράγον τον βαρύτερον ήχον.

Χ. Κατακλῄς

Η εντελέχεια του αινίγματος της Σφιγγός, το οποίον συντίθεται εξ ολίγων σειρών και έχον ως πυρήναν του τρεις λέξεις (δίπουν, τρίπον, τετράπον) εντός μιας Σοφοκλείου τραγωδίας αποτελεί την θεολογικήν φανέρωσιν αρρήτων δογμάτων της Πυθαγορικής μουσικής θεωρίας εις όσους είχον τύχει μυήσεως κάποιου βαθμού και αποτελεί έκφρασιν της γνωστής Φιλολάου ρήσεως «**ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ διοξειᾶ**».

Κυρίες και κύριοι σύνεδροι, ο καθηγητής Πανεπιστημίου Ιωάννης Κακριδής (1901-1992), η σημαντικότερη φυσιογνωμία εις τον χώρον της Κλασικής Φιλολογίας, ο μελετήσας πλείστους όσους τομείς της αρχαιοελληνικής γραμματείας, διερωτάται: Τι να ήθελεν να μας είπει ο μεγάς τραγικός Σοφοκλής εις την λίαν ώριμον ηλικίαν του, με την πλουσίαν γνώσιν και την σοφήν πείραν του, β α σ α ν ί ζ ω ν τ η ν σ κ έ ψ ι ν τ ο υ π λ έ ο ν τ ω ν ε ί κ ο σ ι ε τ ώ ν μ ε τ ο ν Ο ι δ ί π ο δ ά τ ο υ , εις μίαν μάλιστα ευλογημένην περίοδον του ανθρωπίνου στοχασμού, κατά την οποίαν είχεν κορυφωθεί το θαύμα της κλασικής Αθήνας;
Ως γνωστόν, ο Σοφοκλής έζησεν κατά τα έτη 496-406 π.Χ., ο Φιλόλαος έζησεν κατά τα έτη 470-385 π.Χ. Η τραγωδία *Οιδίπους τύραννος* πρωτοεδιδάχθη το έτος 428 π.Χ. και, κατά τον καθηγητήν Ιωάννην Κακριδήν, ο Σοφοκλής ησχολείτο μετ' αυτής από του έτους 448 π.Χ., ότε ο Φιλόλαος ήτο αμούστακος νεανίας 22 ετών. Δια τούτο υποστηρίζω την άποψιν ότι ο Σοφοκλής προηγήθη του Φιλολάου εις την διατύπωσιν της εν λόγω ρήσεως και τον θεωρώ αδικηθέντα εξ αβελτερίας των «ειδικών».
Οφείλω να επισημάνω μίαν και μόνον, αλλά λίαν ουσιώδη διαφοράν εις την διατύπωσιν των δύο ρήσεων: ο Σοφόκλειος ρήσις διατυπούται ανθυφαιρετικώς, ενώ η του Φιλολάου ρήσις διατυπούται αθροιστικώς.
Δια της προτάσεως-διαπιστώσεώς μου αυτής αντιλαμβάνομαι ότι επιφέρω ανατροπήν εις την ιστορίαν της αρχαιοελληνικής μουσικής και αυτή αύτη η ανατροπή αποτελεί μίαν εκ των ιδικών μου συμβολών εις την Φιλοσοφίαν, την Φιλολογίαν και την Αρχαιοελληνικήν Πυθαγόρειον Μουσικήν!

Σας ευχαριστώ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΟΣ

A. Barker, “*The Euclidean Sectio canonis*.” In *Greek Musical Writings*, vol. 2, Harmonic and Acoustic Theory,. Cambridge: Cambridge University Press 1989, pp. 190-208.

I. Bekker, *Λεξικόν Σούδα (Σουΐδα). Φιλολογική αποκατάσταση*. I-V. (Βιβλιοθήκη των Ελλήνων, 7-11), Αθήνα 1972.

E. Brann, *The Cutting of the Canon*, In The Collegian, Annapolis: St. John’s College, 1962, pp 1-63.

Da Rios, *Aristoxeni Elementa harmonica*. Roma: Typis Publicae Officinae Polygraphicae 1954.

C. Davy, “*Euclid’s Introduction to the Section of the Canon*” In Letters, addressed chiefly to a young gentleman, upon subjects of literature: including a translation of Euclid’s section of the canon; and his treatise on harmonic; with an explanation of the Greek musical modes, according to the doctrine of Ptolemy, 2:264-90. 2 vols. Bury St. Edmonds: Printed for the author by J. Rackham, 1787.

V. De Falco, *Theologumena Arithmeticae*, Teubner, Lipsiae 1922, μετάφραση στη νεοελληνική Ι. Ιωαννίδης, Α. Φωτόπουλος και Π. Γράβιγγερ (επ.), Ιδεοθέατρον, Αθήνα, 1998.

L. Deubner, *De vita Pythagorica liber*, ανατ. U. Klein, Teubner, Stuttgart 1975.

D. Fowler, *Ratio in early Greek Mathematics*, (Bulletin of American Mathematical Society), New York 1979, pp. 807-846.

H. Fowler, *The Mathematics of Plato’s Academy*, Oxford University Press, Oxford 1999.

G. Friedlein, *Boetii De institutione musica libri quinque*. Leipzig 1867: B. G. Teubner.

Grove’s, “*Dictionary of Music & Musicians*”, 5th ed. Macmillan & Co, Ltd., London 1954.

R. Hoche, *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II*, Leipzing 1866.

T. Ivor, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. I-II, Cambridge Mass., London 1980.

LOEB CLASSICAL LIBRARY, 2000, *Greek Mathematical Works I– Thales to Euclid*, Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.

T. J. Mathiesen, “*An Annotated Translation of Euclid’s Division of a Monochord*”, *Journal of Music Theory*, 19 1975, pp. 236-58.

L. Pearson, *ARISTOXENUS: Elementa Rhythmica*, Clarendon Prees, Oxford 1990.

Ch. Ch. Spyridis, *The Delphi musical system: ένα νέο σύστημα μουσικών διαστημάτων*, Ανακοίνωση στη Γ΄Διεθνή Μουσικολογική Συνάντηση των Δελφών με θέμα «*Ρυθμοί, τρόποι και κλίμακες της Μουσικής της Μεσογείου*», Δελφοί 1988.

A. Szabo, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα 1973.

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΟΣ

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, Τόμος Α΄, 1995, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, *ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*, Τόμος Β΄, 1997, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Δ. Δημητράκος, *Μέγα Λεξικόν όλης της Ελληνικής Γλώσσης*, τόμ. 1-9, Αθήναι 1964.

Π. Δρανδάκης, *Μεγάλη Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια*, 2η έκδοσις, Εκδοτικός Οργανισμός «Ο ΦΟΙΝΙΞ» Ε.Π.Ε.
(Τόμος ΚΒ, λήμμα Σφίγξ & τόμος ΙΗ, λήμμα Οιδίπους).

Ιάμβλιχος, *Περί του Πυθαγορικού Βιου*, Εισαγωγή-Μετάφραση-Σχόλια Αλ. Α. Πέτρου, Πρόλογος Τ. Πεντζοπούλου-Βαλαλά, Εκδ. Ζήτρος, Θεσσαλονίκη 2001.

Β. Κάλφας, *ΠΛΑΤΩΝ ΤΙΜΑΙΟΣ,* Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα 1997.

Σ. Καράς, *Αρμονικά*, Ανακοίνωσις εις το Μουσικολογικόν Συνέδριον των Δελφών της 28-30 Οκτωβρίου 1988, Εκδ. Συλλόγου προς διάδοσιν της Εθνικής Μουσικής, Αθήνα 1989.

Ε. Β. Κουτσοθόδωρος, «*Οιδίποδας, το Πανανθρώπινο Σύμβολο*», Αυτοέκδοση, Αθήνα.

Χ. Χ. Λαμπρίδης, *ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ*, Βιβλιοπωλείο ΚΛΕΙΩ, Πάτρα 1996.

Σ. Μιχαηλίδης, *Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα 1982.

Χ. Θ. Μωυσιάδης, *ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ Η τέχνη να μετράμε χωρίς μέτρημα*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2002.

Χ. Θ. Μωυσιάδης και Χ. Χ. Σπυρίδης, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1995.

Μ. Χ. Παπαδοπούλου, Χ. Χ. Σπυρίδης, *Ο Ελικών*, Επιστημονική Ανακοίνωση στο 3ο Διεθνές Συνέδριο Ακουστικής του ΕΛ.ΙΝ.Α., Θεσσαλονίκη 2004, 27-28/9.

Μ. Χ. Παπαδοπούλου *Η Αρμονική – Μουσική τάξη κατά τον σοφώτατο, Πρωτέκδικο και Δικαιοφύλακα Γεώργιο Παχυμέρη*, Διδακτορική διατριβή με επιβλέποντα καθηγητή τον Χαράλαμπο Χρ. Σπυρίδη, Τμήμα Μουσικών Σπουδών, Φιλοσοφική Σχολή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών 2007.

Μ. Παπαθανασίου, «Η Πυθαγορική διανόηση και τα Μαθηματικά», *Ελληνική Φιλοσοφική Επιθεώρηση*, τ. 3, τχ. 7, Ιαν. (1986).

Β. Ι. Παπούλας, «Έκθεσις κατατομής του κανόνος, επί τε του αμεταβόλου τόνου και των καθ' έκαστον γενών», *Φόρμιγξ Β΄,* Β΄, Φ. 6, (1907), σ. 2-3.
Αυτόθι, Φ. 7-8, σ. 6-7 (συνέχεια).
Αυτόθι, Φ. 9, σ. 2-3 (συνέχεια).
Αυτόθι, Φ. 19-20, σ. 4-5: *Περί λόγου και αναλογίας, Περί πολλαπλασίων και επιμορίων λόγων, Περί επιμερών*
Αυτόθι, Φ. 23-24, σ. 4-5: *Περί πολλαπλασιεπιμορίων, Περί πολλαπλασιεπιμερών και αριθμού προς αριθμόν.*

Β. Ι. Παπούλας, «Έκθεσις κατατομής του κανόνος επί του Δωρίου τόνου (του τετάρτου καθ΄ημάς ήχου)», *Φόρμιγξ Β΄,* έτος Δ΄, Φ. 1-2, (1908), σ. 4-5.

Α. Ρεμάντας, και Π. Δ. Ζαχαρίας, *Η μουσική των Ελλήνων ως διεσώθη από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρι της σήμερον*, Αρίων, Αθήναι 1917, σ. η΄- θ΄.

Δ. Σκαρλάτου του Βυζαντίου, *Λεξικόν της Ελληνικής Γλώσσης*, Αθήναι 1852.

Α. Σκιάς. *Ελληνικαί Γραμματικαί*, Εν Αθήναις 189, σ. 120 και εφεξής.
Σουΐδας, Βυζαντινό Λεξικό, Θύραθεν Εκδόσεις, Θεσσαλονίκη.

Ε. Σπανδάγου, *Η Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα 2001.

Ε. Σπανδάγου, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν του Θέωνος του Σμυρναίου*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα 2003.

Χ. Χ. Σπυρίδης, *Μια εισαγωγή στη Φυσική της Μουσικής*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 1988.

Χ. Χ. Σπυρίδης, *Μουσική Ακουστική*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 1990.

Χ. Χ. Σπυρίδης, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Κατατομή Κανόνος*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα 1998.

Χ. Χ. Σπυρίδης, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα 2004.

Χ. Χ. Σπυρίδης, *Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα 2005.

Χ. Χ. Σπυρίδης, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2005.

Χ. Χ. Σπυρίδης, *Αναλυτική Γεωματρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2006.

Χ. Χ. Σπυρίδης, *Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεσις Ψυχής Κόσμου (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις)*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2008.

Ι. Σταματάκου, *Λεξικόν της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης*, Αθήνα 1994.

Ε. Σ. Σταμάτη, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Αριθμητικά – Αι αρχαί της Ελληνικής Γεωμετρίας*, Αυτοέκδοσις, Αθήναι 1980.

Φιλολογική Ομάδα Κάκτου (μετ.) *ΣΟΦΟΚΛΗΣ: Οιδίπους Τύραννος.* (Οι Έλληνες, 134), Κάκτος, Αθήνα 1993.

Κ. Φράγκος, Ε. Παναγούλη, Α. Τσαρακλής, «Το σύνδρομο Unertan», *Perceptum magazine,* 13/12/2008.

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Τμήμα Μουσικών Σπουδών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεφαλαιώδης καὶ σύντομος παράδοσις
ἀριθμητικῶν τε καὶ μουσικῶν καὶ γεωμετρικῶν κατὰ τὴν στερεομετρίαν
μαθηματικῶν θεωρημάτων διὰ τὴν τοῦ Πλατωνικοῦ
γεωμετρικοῦ ἢ εὐγονικοῦ ἢ γαμικοῦ αριθμοῦ
κατανόησιν (*Πολιτεία*, 546, a, 1)[1].

Προλεγόμενα

Ο τέως κοσμήτωρ της Φιλοσοφικής Σχολής, καθηγητής Ιστορίας, κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκης, παρακολουθείσας την 5ην Μαρτίου του έτους 2008 διάλεξή μου εις την ιστορικήν αίθουσα «Κωστής Παλαμάς» του κτηρίου του Φιλολογικού Συλλόγου Παρνασσός (Πλατεία Αγίου Γεωργίου Καρύτση 8, 10561 Αθήναι) περί την «Μουσικολογικήν Αλληγορίαν της Πλατωνικής Πολιτειολογίας» (587, b, 11 – 588, a, 2), με προέτρεψε να ασχοληθώ με την μελέτην του χωρίου του Γεωμετρικού ή Ευγονικού ή Γαμικού αριθμού από την Πολιτείαν του Πλάτωνος (546, a, 1 – 547, a, 5).

Μου ετόνισε ότι το χωρίον είναι δυσνόητον, προβληματικής διατυπώσεως, ανερμήνευτον –με την έννοιαν ότι οι δοθείσες ερμηνείες μέχρι σήμερον δεν τυγχάνουν της καθολικής αποδοχής των Πλατωνιστών- και σχετικόν, πιθανώς, με τα θέματα αρχαιοελληνικής Μουσικής Ακουστικής, τα οποία εμπίπτουν εις τα διδακτικά και ερευνητικά μου ενδιαφέροντα, αφού ο Πλάτων αναφέρει έννοιες όπως «επίτριτος», «πυθμήν», «αρμονίες» εκ της μαθηματικής θεωρίας της αρχαιοελληνικής μουσικής. Καταλήγων ο κ. Κοσμήτωρ, μου συνέστησε να συμπεριλάβω οπωσδήποτε το εν λόγω χωρίον εις το πρόγραμμα των ερευνητικών μου δραστηριοτήτων και να ασχοληθώ ουσιαστικώς με αυτό.

Ακολούθησα την συμβουλήν του σεβαστού και γεραρού καθηγητού και άρχισα ερευνών το εν λόγω Πλατωνικόν χωρίον.

Ομολογώ ότι η έρευνά μου ήτο και εξακολουθεί να είναι όντως ένα ταξίδι εις αγνώστους ατρυγέτους (α72) και πολυνβενθείς (δ406) θάλασσες, εις Φαιήκων γαίες (ε35), εις ανθρώπων άστεα (α3), όπου δεν έλειπον οι άγριοι Κύκλωπες (β19), οι ίφθιμες κόρες των Λαιστρυγόνων (κ106), οι Λωτοφάγοι (ι96), η δεινὸν λελαλυῖα Σκύλλα (μ85) και η δεινὴ (μ260) Χάρυβδις, αλλά και η πότνια Κίρκη (θ448) και η νύμφη Καλυψώ (α14), και η λευκώλενος Ναυσικά (η12)˙ ένα ταξίδι υπό την προστασίαν της γλαυκώπιδος Αθηνάς (ω540) με κατάληξη την ιδικήν μου ἀμφίαλον Ιθάκην (α386) με γέρας ἐσθλὸν (λ534) την σχεδίαση και την σχετικήν απόδειξη του «Γεωμετρικού ή Ευγονικού ή Γαμικού αριθμού» …

Εις το προμνημονευθέν χωρίον ο Πυθαγορικός Πλάτων, ο μεταδίδων την γνώση αλληγορικώς, εκκινεί με καλήν ποιητικήν διάθεση και γράφει με «φαντασιώδη

[1] Ο τίτλος της παρούσης εργασίας προέρχεται εκ του έργου του Πλατωνικού φιλοσόφου Θέωνος του Σμυρναίου «*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*», 1, 13-17.

φρασεολογία[2]» χρησιμοποιών λέξεις ευήχους και ομοιοκαταλήκτους, οι οποίες εις πρώτην ανάγνωση προσδίδουν εις το χωρίον έναν περισσότερον μυστικιστικόν παρά μαθηματικόν χαρακτήρα ή ένα «ραψωδιακόν ύφος». Δια των λέξεων αυτών επιθυμεί να μεταφέρει εις τον μεμυημένον τα όσα έχει κατά νουν, αλλά το κείμενόν του –θεὸς οἶδεν διατὶ- είναι ασαφές, ακατανόητον και εντάσσεται εις την χορείαν των αλύτων προβλημάτων παρά του επίσης αλύτου προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου.

Εκκινών την έρευνά μου, εστράφην εις δύο μελετητές του προβλήματος, τον Πρόκλον, τον Λύκιον, τον Πλατωνικόν διάδοχον και τον νεοπυθαγόρειον φιλόσοφον Ιάμβλιχον. Ο πρώτος αντιμετωπίζει το πρόβλημα κατά βάση εξ επόψεως της Στερεομετρίας[3] και ο δεύτερος εξ επόψεως της Επιπεδομετρίας[4]. Αριθμητικήν λύση προτείνει μόνον ο πρώτος. Βεβαίως, έχω μελετήσει και τις λύσεις, οι οποίες προτείνονται από τους Adam και Hultsch[5] και έχω σχηματίσει προσωπικήν άποψη περί της ορθότητος ή μη αυτών.

Εδαπάνησα χρόνον πολύν προκειμένου να κατανοήσω τα Πυθαγόρεια Μαθηματικά περί τους επιπέδους και στερεούς ορθογωνίους αριθμούς[6] ή, εν άλλαις λέξεσι, περί των διχή και τριχή διαστατών σχέσεων, τις οποίες χρησιμοποιεί ο Πρόκλος κατά την λύση του γεωμετρικού προβλήματος.

Προκειμένου να φανώ ωφέλιμος σε μελετητές και ερευνητές της Πλατωνικής γραμματολογίας εν γένει, αλλά ιδιαιτέρως του συγκεκριμένου χωρίου, απεφάσισα, μιμούμενος τον Θέωνα τον Σμυρναίον, να συγγράψω την παρούσαν εργασίαν εκθέτων

---

[2] Κατά διατύπωση του Heath.

[3] Πρόκλος, *Σχόλια εις την Πολιτεία του Πλάτωνος*, 2, 35, 1 – 2, 39, 28.

[4] Ιάμβλιχος, *Πυθαγορικός Βίος*, 27, 130, 11 – 27, 131, 10

[5] Sir Thomas Heath, *A History of greek Mathematics*, vol. 1, New York, pp. 305-308.

[6] Η έννοια του επιπέδου και του στερεού ορθογωνίου αριθμού ανάγεται εις την ιεράν τετρακτύν των Πυθαγορείων, της οποίας ενσαρκωτές είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4. Η ιερά τετρακτύς συμβολικώς παρίσταται δια δέκα κουκίδων εις τριγωνικήν διάταξη (Σχήμα 1), αφού ο αριθμός δέκα αποτελεί τον δεύτερον μετά τον αριθμόν 6 (6=1+2+3) «τριγωνικόν» αριθμόν των Πυθαγορείων (10=1+2+3+4).

Σχήμα 1: Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος.

Οι ερμηνείες και οι συμβολισμοί της ιεράς τετρακτύος ήσαν πολυειδείς και πολυποίκιλες.
Κατά την γεωμετρικήν και στερεομετρικήν αποκωδικοποίηση της τριγωνικής διατάξεως της ιεράς τετρακτύος το πλήθος των κουκίδων εκάστης σειράς συμβολίζει και ένα θεμελιώδες γεωμετρικόν και στερεομετρικόν στοιχείον (σχήμα 1). Περί αυτής της αποκωδικοποιήσεως μας πληροφορεί ο Διογένης Λαέρτιος εις το έργον του *Βίος Φιλοσόφων* (7, 135, 1-8) παραπέμποντάς μας εις την Φυσικήν του Απολλοδώρου.

Σῶμα δ’ ἐστίν, ὥς φησιν Ἀπολλόδωρος ἐν τῇ Φυσικῇ, τὸ τριχῇ διαστατόν, εἰς μῆκος, εἰς πλάτος, εἰς βάθος· τοῦτο δὲ καὶ στερεὸν σῶμα καλεῖται. ἐπιφάνεια δ’ ἐστὶ σώματος πέρας ἢ τὸ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχον βάθος δ’ οὔ· ταύτην δὲ Ποσειδώνιος ἐν πέμπτῳ Περὶ μετεώρων καὶ κατ’ ἐπίνοιαν καὶ καθ’ ὑπόστασιν ἀπολείπει. γραμμὴ δ’ ἐστὶν ἐπιφανείας πέρας ἢ μῆκος ἀπλατὲς ἢ τὸ μῆκος μόνον ἔχον. στιγμὴ δ’ ἐστὶ γραμμῆς πέρας, ἥτις ἐστὶ σημεῖον ἐλάχιστον.

και αναλύων όλες τις στερεομετρικές έννοιες, τις απαραίτητες για την κατανόηση της Προκλείου λύσεως του χωρίου του Γεωμετρικού ή Ευγονικού ή Γαμικού αριθμού.

Διχή και τριχή διαστατή σχέσις

Η σχέσις μεταξύ δύο φυσικών (ακεραίων θετικών) αριθμών εις την Πυθαγόρειον μουσικήν θεωρίαν εκαλείτο «*διάστημα*»[7].

Δύο σχόλια του Πορφυρίου εις την περί της αρμονίας διδασκαλίαν του Πτολεμαίου αναφέρουν «καὶ τῶν κανονικῶν[8] δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων λέγουσιν» και «τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων τὸ διάστημα καλοῦσι» γεγονός το οποίον σημαίνει ότι εις την Πυθαγόρειον μουσικήν θεωρίαν, η οποία θεμελιούται πειραματικώς επί του μονοχόρδου, οι έννοιες «διάστημα (=διάσταση, απόσταση)» και «λόγος (=αριθμητική σχέσις)» είναι ταυτόσημες ή εναλλάσσονται ισοδυνάμως.

Τυγχάνει γνωστόν τοῖς πᾶσι ότι οι πυθαγόρειοι ανεκάλυψαν τις θεμελειώδεις αρχές της παγκοσμίου αρμονίας, τις οποίες εξέφρασαν δια μουσικών λόγων.

Η αλληλοδιαδοχή μουσικών λόγων συνεπάγεται τον σχηματισμόν μιας ακολουθίας μουσικών φθόγγων, οι οποίοι σχηματίζουν ένα είδος μουσικής κλίμακος. Οι «παλαιοί» μαθηματικοί και μουσικοί εσυνήθιζον να ονομάζουν την μουσικήν κλίμακα εύρους μιας οκτάβας «αρμονίαν[9]». Κατά τον Φιλόλαον[10]

---

[7] Αργότερα η σχέσις μεταξύ δύο αριθμών εις την Αριθμητικήν και την Γεωμετρίαν έλαβεν το όνομα «λόγος» (Βλέπε Χ. Χ. Σπυρίδη, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*).

[8] Αυτοί, οι οποίοι πειραματίζονται χρησιμοποιούντες τον κανόνα. Λέγονται και αρμονικοί.
Τίς πρόθεσις ἁρμονικοῦ.
Τὸ μὲν οὖν ὄργανον τῆς τοιαύτης ἐφόδου καλεῖται κανὼν ἁρμονικός, ἀπὸ τῆς κοινῆς κατηγορίας καὶ τοῦ κανονίζειν τὰ ταῖς αἰσθήσεσιν ἐνδέοντα πρὸς τὴν ἀλήθειαν παρειλημμένος. ἁρμονικοῦ δ’ ἂν εἴη πρόθεσις τὸ διασῶσαι πανταχῇ τὰς λογικὰς ὑποθέσεις τοῦ κανόνος μηδαμῇ μηδαμῶς ταῖς αἰσθήσεσι μαχομένας κατὰ τὴν τῶν πλείστων ὑπόληψιν, ὡς ἀστρολόγου τὸ διασῶσαι τὰς τῶν οὐρανίων κινήσεων ὑποθέσεις συμφώνους ταῖς τηρουμέναις παρόδοις, εἰλημμένας μὲν καὶ αὐτὰς ἀπὸ τῶν
ἐναργῶν καὶ ὁλοσχερέστερον φαινομένων, εὑρούσας δὲ τῷ λόγῳ τὰ κατὰ μέρος ἐφ’ ὅσον δυνατὸν ἀκριβῶς. ἐν ἅπασι γὰρ ἴδιόν ἐστι τοῦ θεωρητικοῦ καὶ ἐπιστήμονος τὸ δεικνύναι τὰ τῆς φύσεως ἔργα μετὰ λόγου τινὸς καὶ τεταγμένης αἰτίας δημιουργούμενα καὶ μηδὲν εἰκῆ, μηδὲ ὡς ἔτυχεν ἀποτελούμενον ὑπ’ αὐτῆς καὶ μάλιστα ἐν ταῖς οὕτω καλλίσταις κατασκευαῖς, ὁποῖαι τυγχάνουσιν αἱ τῶν λογικωτέρων αἰσθήσεων, ὄψεως καὶ ἀκοῆς. ταύτης δὴ τῆς προθέσεως οἱ μὲν οὐδόλως ἐοίκασι πεφροντικέναι μόνῃ τῇ χειρουργικῇ χρήσει καὶ τῇ ψιλῇ καὶ ἀλόγῳ τῆς αἰσθήσεως τριβῇ προσχόντες, οἱ δὲ θεωρητικώτερον τῷ τέλει προσενεχθέντες. οὗτοι δ’ ἂν μάλιστα εἶεν οἵ τε Πυθαγόρειοι καὶ οἱ Ἀριστοξένειοι—διαμαρτεῖν ἑκάτεροι·
Κλαύδιος Πτολεμαίος, *Αρμονικά*, 1, 2, 1-19.

[9] *«Ὅτι δὲ τοῖς ὑφ’ ἡμῶν δηλωθεῖσιν ἀκόλουθα καὶ οἱ παλαιότατοι ἀπεφαίνοντο, ἁρμονίαν μὲν καλοῦντες τὴν διὰ πασῶν» (*Νικομάχου, *Αρμονικόν Εγχειρίδιον, 9, 1, 1-2).*
«Οἱ μὲν Πυθαγόρειοι τὴν μὲν διὰ τεσσάρων συμφωνίαν συλλαβὴν ἐκάλουν, τὴν δὲ διὰ πέντε δι’ ὀξειᾶν, τὴν δὲ διὰ πασῶν τῷ συστήματι, ὡς καὶ Θεόφραστος ἔφη, ἔθεντο ἁρμονίαν. ἁρμονία δὲ κατὰ Θ ρ ά - σ υ λ λ ο ν «τὸ συνεστηκὸς ἐκ δυεῖν τινων ἢ πλειόνων συμφώνων διαστημάτων καὶ ὑπὸ συμφώνου περιεχόμενον» (Πορφύριος, *Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου*, 96, 21-25).
Την εποχήν του Πλάτωνος (5ος -4ος π.Χ. αιών) «αρμονία» εσήμαινε επίσης την διαστηματικήν έκταση από του χαμηλοτέρου μέχρι του υψηλοτέρου μουσικού φθόγγου, την οποίαν εκάλυπτε ένα μουσικό σύστημα εκείνης της εποχής «ἡ σύμπασα ἁρμονία ἐκ τοῦ τετράκις εἶναι διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε καὶ

ἔστι γὰρ ἁρμονία πολυμιγέων ἕνωσις καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις.

κατά τον Θέωνα τον Σμυρναίον[11]

καὶ οἱ Πυθαγορικοὶ δέ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων, τὴν μουσικήν φασιν ἐναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν πολλῶν ἕνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν·

και κατά τον Νικόμαχο τον Γερασηνόν[12]

πᾶν δὲ ἡρμοσμένον ἐξ ἐναντίων πάντως ἥρμοσται καὶ ὄντων γε· οὔτε γὰρ τὰ μὴ ὄντα ἁρμοσθῆναι οἷά τε οὔτε τὰ ὄντα μέν, ὅμοια δὲ ἀλλήλοις, οὔτε τὰ διαφέροντα μέν, ἄλογα δὲ πρὸς ἄλληλα·

Τα ανωτέρω σημαίνουν ότι η αρμονία αφορά εις το πλήθος των εναντίων, δηλαδή των εναντιοτήτων και των αντιθέσεων[13], οι οποίες δομούν ολόκληρον τον κόσμον[14]. Μία των αντιθέσεων, η φιλότης και το νείκος[15], είναι αυτή, η οποία διέπει τα πάντα στον κόσμον, με την έννοιαν ότι, επερχομένη η φιλότης εις τα δίχα φρονέοντα και αντιτιθέμενα[16], γεννά τον δεσμόν της αρμονίας ή της φιλότητος και, κατά κάποιον τρόπον, τα δίχα φρονέοντα συμφρονούν[17], δηλαδή ομονοούν και ηρεμούν.

τόνον», όπερ σημαίνει ότι αυτά τα όρια εκάλυπτον διάστημα 4 διαπασών (οκτάβων) συν ενός διαπέντε (πέμπτης) συν ενός επογδόου τόνου (μείζονος τόνου) $\left(\frac{2}{1}\right)^4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{1}$ (Τίμαιος, *Γένεσις Ψυχής Κόσμου*).

Μετά την εποχήν του Αριστοξένου ο όρος «διαπασών» αντικατέστησεν τον όρον «αρμονία» εις πολλά κείμενα (Κλέον. Εις. και Βακχ. Εις. C.v.J. 197 και 308, αντιστοίχως: «τοῦ δὲ διαπασῶν εἴδη ἐστὶν ἑπτά», ήτοι επτά είδη αρμονίας).

[10] Θραύσμα 10, γρ. 2-3 καθώς επίσης Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 19, 4-5.

[11] Θέων Σμυρναίος, *Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10-12.

[12] *Αριθμητική Εισαγωγή*, 1, 6, 3, 1-5.

[13] πέρας [καὶ] ἄπειρον, περιττὸν [καὶ] ἄρτιον, ἓν [καὶ] πλῆθος, δεξιὸν [καὶ] ἀριστερόν, ἄρρεν [καὶ] θῆλυ, ἠρεμοῦν [καὶ] κινούμενον, εὐθὺ [καὶ] καμπύλον, φῶς [καὶ] σκότος, ἀγαθὸν [καὶ] κακόν, τετράγωνον [καὶ] ἑτερόμηκες·
Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά*, 956a, 23-26.

[14] καὶ εἷς ἀποτελεῖται κόσμος ἐξ ἐναντίων ἡρμοσμένος, ἐκ περαινόντων τε καὶ ἀπείρων ὑφεστηκὼς κατὰ τὸν Φιλόλαον.
Φιλόλαος, *Αποσπάσματα*, σπ. 9, 3-4 και Πρόκλος, *Σχόλια εις τον Πλατωνικόν Τίμαιον*, 1, 176, 28-30.

[15] ἐπεὶ Νεῖκος μὲν ἐνέρτατον ἵκετο βένθος δίνης, ἐν δὲ μέσηι Φιλότης στροφάλιγγι γένηται, ἐν τῆι δὴ τάδε πάντα συνέρχεται ἓν μόνον εἶναι, οὐκ ἄφαρ, ἀλλὰ θελημὰ συνιστάμεν' ἄλλοθεν ἄλλα.
Εμπεδοκλής, *Απόσπασμα 35*, 20-23.

ἡ μὲν Φιλία διακρίνει, τὸ δὲ Νεῖκος συγκρίνει. ὅταν μὲν γὰρ εἰς τὰ στοιχεῖα διίστηται τὸ πᾶν ὑπὸ τοῦ Νείκους
Εμπεδοκλής, *Απόσπασμα 37*, 3-4.

[16] Με την έννοιαν των δυσαρμονούντων ακουσμάτων.

[17] Καθίστανται ευάκουστα.

Τα πολυμιγέα και δίχα φρονέοντα οι Πυθαγόρειοι τα εξέφραζον δι’ αριθμών. Κατ’ αυτούς οι αριθμοί της δεκάδος, λόγω της αφηρημένης φύσεώς των, απετέλουν τα θεία πρότυπα της κοσμικής και μουσικής αρμονίας και απεικόνιζον τις θείες ιδέες (ἀριθμὸς τὸ πᾶν).

Ανατρέχοντες εις το μουσικόν σύστημά μας, από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρις των ημερών μας, διαπιστώνομε ότι δια των αριθμών εκφράζονται όλες οι θεμελιώδεις αρχές της αρμονικής.

Την δυσαρμονίαν (νείκος) επιφέρουν οι δίχα φρονέοντες και αλόγως ηχούντες φθόγγοι. Δια της παρεμβολής μεταξύ αυτών των «μεσοτήτων» (αριθμητικός, αρμονικός, γεωμετρικός κ.α. μέσοι) επέρχεται η συμφρόνησίς των (φιλότης). Αυτή, άλλωστε, είναι η φιλοσοφική βάσις του Πλατωνικού αλγορίθμου από τον οποίον εδημιουργήθη η Ψυχή του Κόσμου (*Τίμαιος*).

Δοθέντων δύο αριθμών, ορίζεται ένα διάστημα, το οποίον είναι «ἐφ’ ἓν διαστατόν», δηλαδή έχει μία διάσταση

διάστημα γάρ ἐστι δυεῖν ὅρων τὸ μεταξὺ θεωρούμενον. πρῶτον δὲ διάστημα γραμμὴ λέγεται, γραμμὴ γάρ ἐστι τὸ ἐφ’ ἓν διαστατόν·
Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 6, 3, 20-22.

Δοθέντων δύο μη διαδοχικών φυσικών αριθμών x, y, δηλαδή $x, y \in N$, υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός z μεταξύ των, δηλαδή x<z<y, ο οποίος ονομάζεται «μέσος» αυτών. Ο μέσος χωρίζει το διάστημα των αρχικών φυσικών αριθμών $\left(\frac{y}{x}\right)$ εις τα δύο διαστήματα $\left(\frac{z}{x}\right)$ και $\left(\frac{y}{z}\right)$, τα οποία δεν είναι κατ’ ανάγκην ίσα μεταξύ των.

Εις την περίπτωση κατά την οποία αυτά τα δύο διαστήματα είναι ΙΣΑ μεταξύ των, δηλαδή $\frac{z}{x}=\frac{y}{z}$, τότε και μόνον τότε ο μέσος ονομάζεται «μέσος ανάλογος» των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών x και y. Επειδή $\frac{z}{x}=\frac{y}{z}$, προκύπτει ότι ο μέσος ανάλογος των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών είναι ο γεωμετρικός των μέσος, δηλαδή $z^2 = x \cdot y \;\Rightarrow\; z = \sqrt{x \cdot y}$.

Έστωσαν οι δύο φυσικοί μη διαδοχικοί αριθμοί α και γ (α>γ), οι οποίοι δομούν την σχέση $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, δηλαδή σχηματίζουν το μουσικόν διάστημα $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$. Μεταξύ των α και γ υπάρχει οπωσδήποτε τουλάχιστον ένας «μέσος», έστω ο β. Ο μέσος αυτός δυνατόν να είναι ένας εκ των δέκα πυθαγορείων μέσων[18] ή και κάποιος άλλος μέσος, ο οποίος διαι-

---

[18] Πίναξ 1. Οι δέκα αναλογίες των Πυθαγορείων.

α/α	Ονομασία & Μαθηματικός Ορισμός της αναλογίας μετά παραδείγματος	Η ανά λόγον μεσότης β εις τα αντίξοα α,γ (α>γ) ή Μέσοι (ανάλογοι)

1	Αριθμητική $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha}=\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\gamma}$ ή $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ 3, 2, 1	$\alpha^2-\alpha\beta=\alpha\beta-\alpha\gamma \Rightarrow \alpha(\alpha+\gamma)=2\alpha\beta \Rightarrow \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ ή $\alpha\beta-\beta^2=\beta^2-\beta\gamma \Rightarrow \beta(\alpha+\gamma)=2\beta^2 \Rightarrow \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ ή $\alpha\gamma-\beta\gamma=\beta\gamma-\gamma^2 \Rightarrow \gamma(\alpha+\gamma)=2\beta\gamma \Rightarrow \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$
2	Γεωμετρική $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ 4, 2, 1	$\alpha\beta-\beta^2=\alpha\beta-\alpha\gamma \Rightarrow \beta=\sqrt{\alpha\gamma}$ ή $\alpha\gamma-\beta\gamma=\beta^2-\beta\gamma \Rightarrow \beta=\sqrt{\alpha\gamma}$ ή $\alpha\gamma=\beta^2 \Rightarrow \beta=\sqrt{\alpha\gamma}$
3	Αρμονική ή υπενάντιος $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{\beta}$ 6, 4, 3	$\alpha\gamma-\beta\gamma=\alpha\beta-\alpha\gamma \Rightarrow 2\alpha\gamma=\beta(\alpha+\gamma) \Rightarrow \beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$
4	Τετάρτη (Υπενάντιος της αρμονικής) $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}$ 6, 5, 3	$\alpha^2-\alpha\beta=\beta\gamma-\gamma^2 \Rightarrow \alpha^2+\gamma^2=\beta\gamma+\alpha\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta(\alpha+\gamma)=\alpha^2+\gamma^2 \Rightarrow \beta=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha+\gamma}$
5	Πέμπτη (Υπενάντιος της γεωμετρικής) $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}$ ή $\alpha=\beta+\gamma-\frac{\gamma^2}{\beta}$ 5, 4, 2	$\alpha\beta-\beta^2=\beta\gamma-\gamma^2 \Rightarrow -\beta^2+\beta(\alpha-\gamma)+\gamma^2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta^2-\beta(\alpha-\gamma)-\gamma^2=0 \Rightarrow$ $\beta=\frac{+(\alpha-\gamma)\pm\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\gamma^2}}{2}$, $\Delta=(\alpha-\gamma)^2+4\gamma^2>0 \Rightarrow$ $\beta=\frac{+(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\gamma^2}}{2}>0$
6	Έκτη (Υπενάντιος της γεωμετρικής) $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$ ή $\gamma=\alpha+\beta-\frac{\alpha^2}{\beta}$ 6, 4, 1	$\alpha^2-\alpha\beta=\beta^2-\beta\gamma \Rightarrow \beta^2-\beta(\gamma-\alpha)-\alpha^2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\frac{+(\gamma-\alpha)\pm\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+4\alpha^2}}{2}$, $\Delta=(\gamma-\alpha)^2+4\alpha^2>0 \Rightarrow$ $\beta=\frac{+(\gamma-\alpha)+\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+4\alpha^2}}{2}>0$

ρεί το διάστημα $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ σε δύο διαστήματα (ίσα ή άνισα μεταξύ των, αναλόγως του είδους του μέσου) τα $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ και $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$, καθιστών την αρχικήν σχέση «διχή διαστατή». Η αρχική σχέσις $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ τώρα εκφράζει, κατά τα προαναφερθέντα, το εμβαδόν μιας ορθογωνίου επιφανείας[19] με διαστάσεις $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Η μεγαλύτερη διάστασις εκλαμβάνεται ως μήκος και η άλλη ως πλάτος.

7	$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\gamma^2=2\alpha\gamma-\alpha\beta$ 9, 8, 6	$\alpha\gamma-\gamma^2=\alpha\beta-\alpha\gamma \Rightarrow 2\alpha\gamma-\gamma^2=\alpha\beta \Rightarrow \beta=\frac{\gamma(2\alpha-\gamma)}{\alpha}$
8	$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\alpha^2+\gamma^2=\alpha(\beta+\gamma)$ 9, 7, 6	$\alpha\gamma-\gamma^2=\alpha^2-\alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta=\alpha^2+\gamma^2-\alpha\gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\alpha\gamma}{\alpha}$
9	$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\beta^2+\gamma^2=\gamma(\alpha+\beta)$ 7, 6, 4	$\alpha\gamma-\gamma^2=\beta^2-\beta\gamma \Rightarrow \beta^2-\beta\gamma-\alpha\gamma+\gamma^2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta^2-\beta\gamma+\gamma(\gamma-\alpha)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\gamma(\gamma-\alpha)}}{2},\ \Delta=\gamma^2-4\gamma(\gamma-\alpha)>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-4\gamma(\gamma-\alpha)}}{2}$
10	$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\alpha=\beta+\gamma$ 8, 5, 3	$\alpha\gamma-\gamma^2=\alpha\beta-\beta^2 \Rightarrow \beta^2-\alpha\beta+\gamma(\alpha-\gamma)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\gamma(\alpha-\gamma)}}{2}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\alpha\gamma+4\gamma^2}}{2}=$ $=\frac{\alpha\pm\sqrt{(\alpha-2\gamma)^2}}{2} \Rightarrow \Delta=(\alpha-2\gamma)^2>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha-2\gamma)^2}}{2}=\frac{\alpha+\alpha-2\gamma}{2}=\frac{2(\alpha-\gamma)}{2}=\alpha-\gamma$

Ιδιαίτερη σημασία έχει η περίπτωση κατά την οποίαν ο μέσος είναι ένας εκ των τριών πρώτων, δηλαδή ή αριθμητικός ή γεωμετρικός ή αρμονικός.

[19] δύο δὲ διαστήματα ἐπιφάνεια, ἐπιφάνεια γάρ ἐστι τὸ διχῇ διαστατόν·
Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 6, 4, 2-4.

Παράδειγμα 1

Έστωσαν οι φυσικοί μη διαδοχικοί αριθμοί α=18 και γ=16. Μεταξύ των υπάρχει ο φυσικός αριθμός β=17, ο οποίος είναι ο αριθμητικός των μέσος και χωρίζει το διάστημα των αρχικών φυσικών αριθμών σε δύο άνισα διαστήματα $\left(\frac{17}{16} > \frac{18}{17}\right)$. Το μήκος είναι $\left(\frac{17}{16}\right)$ και το πλάτος είναι $\left(\frac{18}{17}\right)$. Το εμβαδόν της ορθογωνίου επιφανείας είναι $\left(E = \frac{17}{16} \cdot \frac{18}{17} = \frac{18}{16}\right)$.

Υπάρχει η περίπτωσις κατά την οποίαν μεταξύ των διδομένων φυσικών μη διαδοχικών αριθμών α και δ (α>δ) να παρεμβάλλωνται δύο μέσοι, έστωσαν οι β και γ (β>γ). Οι μέσοι αυτοί διαιρούν το αρχικόν διάστημα $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$ εις τρία διαστήματα (ίσα ή άνισα μεταξύ των, αναλόγως του είδους των μέσων) τα $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$, $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$, καθιστώντες την αρχικήν σχέση «τριχή διαστατήν» ή ένα στερεόν[20].

τρία δὲ διαστήματα στερεόν, στερεὸν γάρ ἐστι τὸ τριχῆ διαστατὸν καὶ οὐκ ἔστιν οὐδαμῶς ἐπινοεῖν στερεόν, ὃ πλεόνων τέτευχε διαστημάτων ἢ τριῶν, βάθους, πλάτους, μήκους·
Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 6, 4, 4-7.

Η αρχική σχέσις $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$, κατά τα προαναφερθέντα, εκφράζει τον όγκον ορθογωνίου πρισματικού στερεού με διαστάσεις $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$ και $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$.

Παράδειγμα 2

Έστωσαν οι φυσικοί μη διαδοχικοί αριθμοί α=27 και δ=24. Μεταξύ των υπάρχουν οι φυσικοί αριθμοί β=26 και γ=25, οι οποίοι χωρίζουν το διάστημα των αρχικών φυσικών αριθμών εις τρία άνισα διαστήματα $\left(\frac{25}{24} > \frac{26}{25} > \frac{27}{26}\right)$. Το μήκος είναι $\left(\frac{25}{24}\right)$, το

---

[20] Τίμαιος 32 b1-3. Βλέπε και Rivaud 72-74, Chevalier [1965], 3-4.
Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός εις το έργον του *Θεολογούμενα Αριθμητικής* (20, 9-12) αναφέρεται ως ακολούθως εις το απλούστερον εκ των Πλατωνικών στερεών, το τετράεδρον ή τριγωνικήν πυραμίδα: «τὸ γὰρ ἐλάχιστον καὶ πρωτοφανέστατον σῶμα πυραμὶς ἐν τετράδι ὁρᾶται εἴτε γωνιῶν εἴτε ἐπιπέδων, ὥσπερ καὶ τὸ ἐξ ὕλης καὶ εἴδους αἰσθητόν, ὅ ἐστιν ἀποτέλεσμα τριχῆ διαστατόν, ἐν τέσσαρσιν ὅροις ἐστί».
Εις τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη αναφέρεται ο ορισμός του στερεού ως «στερεό είναι αυτό, το οποίον έχει μήκος, πλάτος και βάθος».
Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί την τρίτη διάσταση, το βάθος, από μόνη της για να περιγράψει το στερεόν σώμα, ωσάν να υποδηλώνει και τις άλλες δύο διαστάσεις. Κατά τον Αριστοτέλη μήκος είναι μία γραμμή και αναφέρεται σε μία διάσταση, πλάτος είναι μία επιφάνεια και αναφέρεται σε δύο διαστάσεις, βάθος είναι το στερεό σώμα και αναφέρεται σε τρεις διαστάσεις. Εις τα Τοπικά του Αριστοτέλους ευρίσκομε τον ορισμό του σώματος ωσάν αυτό, το οποίον έχει τρείς διαστάσεις ή αυτό, το οποίον έχει όλες τις διαστάσεις. Βεβαίως, εις τα Φυσικά λέγων όλες τις διαστάσεις ο Αριστοτέλης εννοεί έξι διαστάσεις, διότι διαιρεί κάθε μία εκ των τριών διαστάσεων σε δύο επί μέρους διαστάσεις αντιθέτου φοράς: επάνω – κάτω, πριν – μετά, δεξιόν – αριστερόν. Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει εις τα *Μετά τα Φυσικά* (1066 b23) ότι ο όγκος του σώματος είναι αυτός, ο οποίος οριοθετείται από επίπεδα και, εις το ίδιο του έργον (1060 b15) υποστηρίζει, ότι οι επιφάνειες είναι τα όρια των σωμάτων.
Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς συνδυάζει και τους δύο προηγουμένους ορισμούς: Στερεό σώμα είναι αυτό, το οποίον έχει μήκος, πλάτος και βάθος ή αυτό, το οποίον κατέχει τρείς διαστάσεις.

πλάτος είναι $\left(\frac{26}{25}\right)$ και το ύψος είναι $\left(\frac{27}{26}\right)$. Ο όγκος του ορθογωνίου πρίσματος είναι $\left(V = \frac{25}{24}\cdot\frac{26}{25}\cdot\frac{27}{26} = \frac{27}{24}\right)$.

Ιδιαίτερη σημασία εις τον χώρον της Στερεομετρίας έχει η περίπτωσις διδομένου φυσικού αριθμού, αναλελυμένου εις διατεταγμένον γινόμενον τριών παραγόντων, ο οποίος «παριστά» ένα στερεόν. Το εν λόγω στερεόν δυνατόν να είναι ή κύβος[21] (οἱ κύβοι <ἦσαν ἀριθμοὶ> ἰσάκις ἶσοι ἰσάκις) ή πλινθίς (πλινθίδες λέγονται <οἱ ἀριθμοὶ οἱ> ἰσάκις ἶσοι ἐλαττονάκις) ή δοκίς (ἔστι δὲ δοκὶς ἀριθμὸς ἰσάκις ἶσος μειζονάκις) ή σφηνίσκος (οἱ δέ γε σφηνίσκοι ἦσαν <ἀριθμοὶ > ἀνισάκις ἄνισοι ἀνισάκις). Όπως αναφέρει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός[22], οι παρεμβαλλόμενοι δύο μέσοι εις δοθέντες δύο φυσικούς μη διαδοχικούς αριθμούς, αναλυόμενοι καθ’ όμοιον τρόπον, εκφράζουν στερεά, τα οποία είναι ή δοκίδες ή πλινθίδες ή σκαληνά.

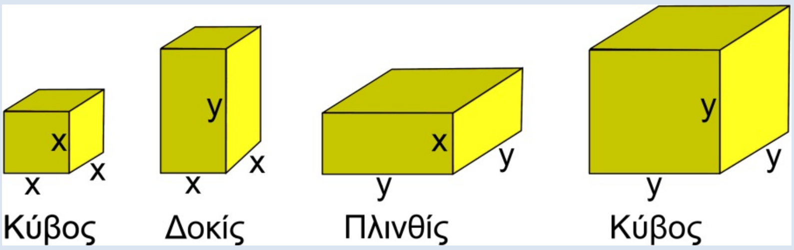
---

[21] Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 17, 6.

[22] Πίναξ 2: Ένδεκα περιπτώσεις εκ της Γενέσεως Ψυχής Κόσμου ενθέσεως δύο μεσοτήτων μεταξύ δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, ώστε η σχέσις των να καταστεί τριχή διαστατή και οι επί μέρους σχηματιζόμενοι λόγοι να εκφράζουν μουσικά διαστήματα της αρχαιοελληνικής μουσικής. Οι αριθμοί εκάστης τετράδος είναι αναλελυμένοι εις διατεταγμένα γινόμενα τριών παραγόντων, τα οποία παριστούν στερεά σώματα. (Βλέπε Χ. Χ. Σπυρίδη, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, σ. 381 κ.ε.)

1	6 $1\cdot 2\cdot 3$	8 $1\cdot 2\cdot 4$	9 $1\cdot 3\cdot 3$	12 $1\cdot 3\cdot 4$
2	1 $1\cdot 1\cdot 1$	2 $1\cdot 1\cdot 2$	4 $2\cdot 2\cdot 1$	8 $2\cdot 2\cdot 2$
3	2 $1\cdot 1\cdot 2$	3 $1\cdot 1\cdot 3$	8 $1\cdot 4\cdot 2$	12 $1\cdot 4\cdot 3$
4	6 $1\cdot 3\cdot 2$	9 $1\cdot 3\cdot 3$	16 $2\cdot 4\cdot 2$	24 $2\cdot 4\cdot 3$
5	3 $1\cdot 1\cdot 3$	4 $1\cdot 1\cdot 4$	9 $1\cdot 3\cdot 3$	12 $1\cdot 3\cdot 4$
6	3 $1\cdot 1\cdot 3$	4 $1\cdot 1\cdot 4$	6 $1\cdot 2\cdot 3$	8 $1\cdot 2\cdot 4$
7	2 $1\cdot 1\cdot 2$	3 $1\cdot 1\cdot 3$	4 $1\cdot 2\cdot 2$	6 $1\cdot 2\cdot 3$
8	48 $2\cdot 8\cdot 3$	64 $2\cdot 8\cdot 4$	81 $3\cdot 9\cdot 3$	108 $3\cdot 9\cdot 4$
9	24 $1\cdot 3\cdot 8$	27 $1\cdot 3\cdot 9$	32 $2\cdot 2\cdot 8$	36 $2\cdot 2\cdot 9$
10	1728 $8\cdot 8\cdot 27$	2048 $8\cdot 8\cdot 32$	2187 $27\cdot 3\cdot 27$	2592 $27\cdot 3\cdot 32$
11	216 $1\cdot 27\cdot 8$	243 $1\cdot 27\cdot 9$	256 $8\cdot 4\cdot 8$	288 $8\cdot 4\cdot 9$

Ο Πλάτων, εκμεταλλεύεται εις το έπακρον τα ανωτέρω για την επίλυση μουσικών θεμάτων με την συνδρομήν της Στερεομετρίας. Εμφανίζει την Στερεομετρίαν ως μία εκ των πέντε ιδιοτήτων ή ένα εκ των πέντε μαθημάτων, που εξαγνίζουν τον άνθρωπον και την τοποθετεί τρίτην κατά σειράν, δηλαδή μετά την Γεωμετρίαν και προ της Μουσικής.



Σχήμα 2: $\dfrac{\text{ΔΟΚΙΣ}}{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΙΚΡΟΣ}} = \dfrac{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΕΓΑΛΟΣ}}{\text{ΠΛΙΝΘΙΣ}}$

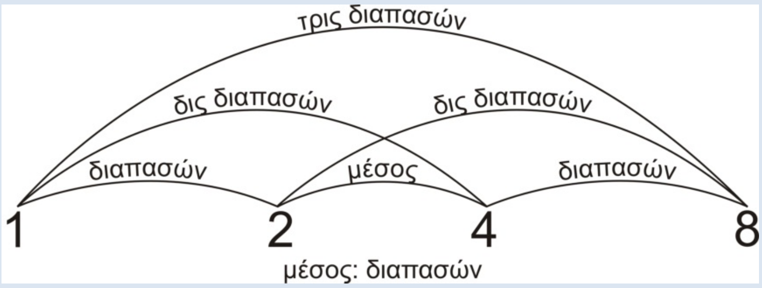
Η διαδικασία έχει ως ακολούθως: Δοθέντων δύο κύβων, ενός μικρού και ενός μεγάλου, παρατίθενται μεταξύ των, ώστε να σχηματίζουν αναλογίαν, μία δοκίς, η οποία έχει την βάση του μικρού κύβου και το ύψος του μεγάλου κύβου και μια πλινθίς, η οποία έχει την βάση του μεγάλου κύβου και το ύψος του μικρού.

Εις την περίπτωση κατά την οποίαν ο μικρός κύβος έχει πλευράν ίσην προς την μονάδα (1Χ1Χ1=1) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευράν ίσην προς 2 (2Χ2Χ2=8), δοκίς είναι ο αριθμός 2 (1Χ1Χ2=2) και πλινθίς είναι ο αριθμός 4 (2Χ2Χ1=4).

Η περίπτωσις αυτή γεννά την τετρακτύν (=τετράδα αριθμών) 1, 2, 4, 8, την οποίαν δίδει ο Πλάτων εις την Γένεση Ψυχής Κόσμου[23] και η οποία μας αποκαλύπτει την γεννήτρια συνάρτηση $y = 2^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$

Τα προηγούμενα διατυπούνται δια μουσικών όρων ως εξής:

Όταν το δις διαπασών $\left(\dfrac{2}{1}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $\left(\dfrac{2}{1}\right)^3$, γεννάται το διαπασών $\left(\dfrac{2}{1}\right)$.



Σχήμα 3: Όταν το δις διαπασών $\left(2^2 : 1^2\right)$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $\left(2^3 : 1^3\right)$, γεννάται το διαπασών $\left(2 : 1\right)$.

[23] (Βλέπε Χ. Χ. Σπυρίδη, *Πλάτωνος Τίμαιος: ΓΕΝΕΣΙΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις)*, σ. 139 κ.ε.)

Εις την περίπτωση κατά την οποίαν ο μικρός κύβος έχει πλευράν ίσην προς τη μονάδα (1Χ1Χ1=1) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευράν ίσην προς 3 (3Χ3Χ3=27), δοκίς είναι ο αριθμός 3 (1Χ1Χ3=3) και πλινθίς είναι ο αριθμός 9 (3Χ3Χ1=9). Τα προηγούμενα διατυπούνται δια μουσικών όρων ως εξής:

Όταν το δις (διαπασών και διαπέντε) $\left(\frac{3}{1}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις (διαπασών και διαπέντε) $\left(\frac{27}{1}\right)$, γεννάται το διαπασών και διαπέντε $\left(\frac{3}{1}\right)$.

Η περίπτωσις αυτή γεννά την τετρακτύν 1, 3, 9, 27, την οποίαν παραδίδει ο Πλάτων στην Γένεση Ψυχής Κόσμου και η οποία μας αποκαλύπτει την γεννήτρια συνάρτηση $y = 3^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

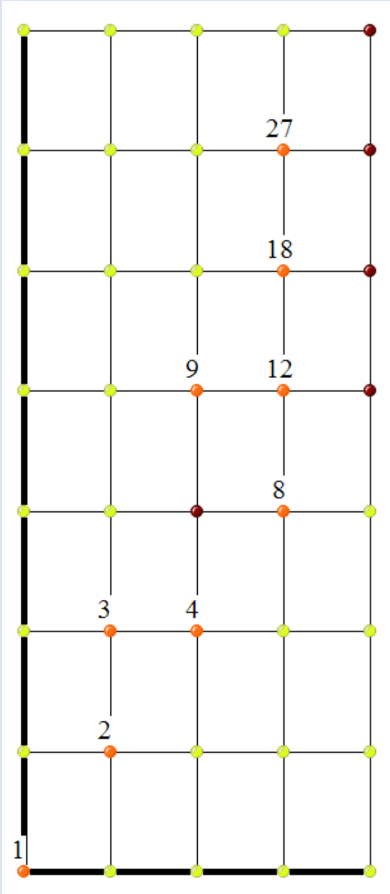
Εις την περίπτωση κατά την οποίαν ο μικρός κύβος έχει πλευράν ίσην προς 2 (2Χ2Χ2=8) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευράν ίσην προς 3 (3Χ3Χ3=27), δοκίς είναι ο αριθμός 12 (2Χ2Χ3=12) και πλινθίς είναι ο αριθμός 18 (3Χ3Χ2=18). Τα προηγούμενα διατυπούνται δια μουσικών όρων ως εξής:

Όταν το δις διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)^3$, γεννάται το διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Η περίπτωσις αυτή γεννά την τετρακτύν 8, 12, 18, 27, την οποίαν, όπως και τις δύο προηγούμενες, μας επιτρέπει ο Πλάτων εις τον διάλογόν του *Τίμαιος* (32b, 2-3) να δομήσωμε με την χρήση του θεωρήματός του «τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν». Οι τέσσερις αριθμοί 8, 12, 18, 27 δεν είναι τίποτα άλλο από μία τετρακτύν διαδοχικών πεμπτών, η οποία μας αποκαλύπτει την γεννήτρια συνάρτηση

$$y = 2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Και η οποία, κατ'ουσίαν, εκφράζει τον «κύκλον των πεμπτών».



Σχήμα 4: Οι παρεμβαλλόμενοι φυσικοί αριθμοί μεταξύ τριών
ζευγών κύβων (1, 8), (1, 27) και (8, 27) επί του Σπυριδείου δικτυωτού (Βλέπε Χ. Χ. Σπυρίδη, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, σ. 60 κ.ε.)

Μελέτη της δομής μιας τριχή διαστατής σχέσεως

Δοθέντων δύο μη διαδοχικών φυσικών αριθμών α και δ, επιθυμούμε να ενθέσωμε δύο μέσους φυσικούς αριθμούς β και γ ($\alpha<\beta<\gamma<\delta$) ούτως, ώστε η σχέσις των να καταστεί τριχή διαστατή και οι επί μέρους σχηματιζόμενοι λόγοι να εκφράζωνται δια των μουσικών συμφωνιών ή/και των διπλασίων ή/και των τριπλασίων τους κατά τα πυθαγόρεια μαθηματικά για τα μουσικά διαστήματα.

Οι σχηματιζομένοι λόγοι εις αυτήν την τριχή διαστατήν σχέση θα εκφράζονται δια των εννοιών «Μεριστέον διάστημα ή στερεόν», «Διαστήματα εμπλέγδην κι εναλλάγδην», «Άκρα διαστήματα», «Μέσον διάστημα»[24], όπως αυτές ορίζονται ακολούθως και εκτίθενται εις τον Πίνακα 3.

Με την έννοιαν «Μεριστέον διάστημα ή στερεόν» εκφράζεται η σχέσις μεταξύ των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών $\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)$.

Η έννοια «Διαστήματα εμπλέγδην κι εναλλάγδην» αναφέρεται εις τα εμπεπλεγμένα διαστήματα $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ και $\left(\frac{\delta}{\beta}\right)$ για τα οποία ισχύει η ισότης $\left(\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}\right)$.

Με την έννοιαν «Άκρα διαστήματα» γίνεται αναφορά εις την σχέση του πρώτου και δευτέρου αριθμού καθώς επίσης και εις την σχέση του τρίτου και τετάρτου αριθμού για τις οποίες ισχύει η ισότης $\left(\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}\right)$.

Τέλος, με την έννοιαν «Μέσον διάστημα» δηλούται η σχέσις $\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$.

Σχήμα 5: Γραφική παράσταση των διαστημάτων των σχηματιζομένων σε μια τριχή διαστατήν σχέση (στερεό).

Πίναξ 3: Ορισμοί και σχέσεις των διαστημάτων των σχηματιζομένων εις μίαν τριχή διαστατήν σχέση (στερεόν).

Μεριστέον Διάστημα	$\frac{\delta}{\alpha}$
Εναλλάγδην & Εμπλέγδην Διάστημα	$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}$
Άκρα Διαστήματα	$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$
Μέσον Διάστημα	$\frac{\gamma}{\beta}$

[24] Σ. Ι. Καράς, *Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής*, εν χγφοις.

Επειδή

$$\left(\text{ΑΚΡ}ON\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\beta}{\alpha}=\left(\frac{\frac{\delta}{\alpha}}{\frac{\delta}{\beta}}\right)=\left(\frac{\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ}\ \&\ \text{ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

$$\left(\text{ΑΚΡ}ON\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\delta}{\gamma}=\left(\frac{\frac{\delta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)=\left(\frac{\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ}\ \&\ \text{ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

προκύπτουν οι σχέσεις 1α, 1β και 1γ εκ των οποίων, δοθέντων των δύο διαστημάτων του δευτέρου μέλους εκάστης, δυνάμεθα να υπολογίσωμε το διάστημα του πρώτου μέλους αυτής.

(Σχέση 1α)

$$\left(\text{ΑΚΡ}ON\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\frac{\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ}\ \&\ \text{ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

(Σχέση 1β)

$$\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ}\ \&\ \text{ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\frac{\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΑΚΡ}ON\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

(Σχέση 1γ)

$$\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ}\ \&\ \text{ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)\left(\text{ΑΚΡ}ON\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)$$

Επειδή

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ}\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\gamma}{\beta}=\left(\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}}\right)=\left(\frac{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ}\ \&\ \text{ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΑΚΡ}ON\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ}\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\gamma}{\beta}=\left(\frac{\frac{\delta}{\beta}}{\frac{\delta}{\gamma}}\right)=\left(\frac{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ}\ \&\ \text{ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΑΚΡ}ON\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

προκύπτουν οι σχέσεις 2α, 2β και 2γ εκ των οποίων, δοθέντων των δύο διαστημάτων του δευτέρου μέλους εκάστης, δυνάμεθα να υπολογίσωμε το διάστημα του πρώτου μέλους αυτής.

(Σχέση 2α)

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\frac{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ}\ \&\ \text{ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\quad\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΑΚΡ}ON\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

(Σχέση 2β)

$$\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\frac{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΜΕΣΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

(Σχέση 2γ)

$$\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)\left(\text{ΜΕΣΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)$$

Επειδή

$$\frac{\delta}{\alpha}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)\cdot\frac{\gamma}{\beta}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2\cdot\left(\text{ΜΕΣΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)$$

προκύπτουν οι σχέσεις 3α, 3β και 3γ εκ των οποίων, δοθέντων των δύο διαστημάτων του δευτέρου μέλους εκάστης, δυνάμεθα να υπολογίσωμε το διάστημα του πρώτου μέλους αυτής.

(Σχέση 3α)

$$\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\text{ΜΕΣΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2$$

(Σχέση 3β)

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}{\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2}$$

(Σχέση 3γ)

$$\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\sqrt{\frac{\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}{\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}}$$

Επειδή

$$\frac{\gamma}{\beta}=\left(\frac{\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\beta}}{\frac{\delta}{\alpha}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2}{\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}$$

προκύπτουν οι σχέσεις 4α, 4β και 4γ εκ των οποίων, δοθέντων των δύο διαστημάτων του δευτέρου μέλους εκάστης, δυνάμεθα να υπολογίσωμε το διάστημα του πρώτου μέλους αυτής.

(Σχέση 4α)

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2}{\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \ \ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}$$

(Σχέση 4β)

$$\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ} \quad \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right) = \frac{\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ} \quad \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2}{\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}$$

(Σχέση 4γ)

$$\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ} \quad \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right) = \sqrt{\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ} \quad \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}$$

Τα ανωτέρω αναφερόμενα διαστήματα (Μεριστέον, Εναλλάγδην κι εμπλέγδην και Μέσον) δύνανται να ορισθούν κατά ποικίλους και ουκ ολίγους τρόπους, οι οποίοι δυνατόν να έχουν και δυνατόν να μην έχουν επίσημη σχέση με την αρχαιοελληνικήν ή βυζαντινήν μας μουσικήν.

Εις την πρώτην περίπτωση αξιομνημόνευτες είναι οι τριχή διαστατές σχέσεις κατά τις οποίες οι εντιθέμενοι μέσοι φυσικοί αριθμοί συμπίπτουν με κάποιες μεσότητες εκ των δέκα προμνημονευθεισών πυθαγορικών και ιδιαιτέρως με τις τρεις πρώτες (αριθμητικήν, γεωμετρικήν, αρμονικήν) μεσότητες, τις οποίες, κατά γενικήν αποδοχήν, επενόησεν ο ίδιος ο Πυθαγόρας.

Εκ των δομήσεων τριχή διαστατών σχέσεων, τηρούντες τις αναφερθείσες αναλογίες εμπλέγδην κι εναλλάγδην, γεννώνται νέα μουσικά διαστήματα κατά τα τρία γένη και τις χρόες τις μουσικές, από του μείζονος και θειοτέρου μέχρι και του ελαχίστου, του κόμματος.

Παράδειγμα 3

Να δομηθεί τριχή διαστατή σχέσις με μεριστέον διάστημα ενός διαπασών, η οποία να εμπεριέχει συγχρόνως και την αριθμητικήν και την αρμονικήν και τη γεωμετρικήν (εμπλέγδην) μεσότητες.

Πρόκειται για την λεγομένη μουσικήν αναλογίαν[25] και είναι η μοναδική, η οποία εμπεριέχει και τις τρεις μεσότητες του Πυθαγόρου.

---

[25] Λοιπὸν καὶ περὶ τῆς τελειοτάτης καὶ τριχῆ διαστατῆς πασῶν τε περιεκτικῆς ἐν βραχεῖ διαρθρώσω μεσότητος χρησιμωτάτης οὔσης εἰς πᾶσαν τὴν ἐν μουσικῇ καὶ φυσιολογίᾳ προκοπήν· κυρίως γὰρ αὕτη καὶ ὡς ἀληθῶς ἁρμονία ἂν λεχθείη μόνη παρὰ τὰς ἄλλας, εἴπερ μὴ ἐπίπεδος μηδὲ μιᾷ μόνῃ μεσότητι συνδεομένη, ἀλλὰ δυσίν, ἵν’ οὕτω τριχῆ διιστάνοιτο, ὡς ὁ κύβος ἁρμονία πρὸ βραχέος ἐσαφηνίσθη. ὅταν τοίνυν δύο ὅρων ἄκρων τριχῆ διαστατῶν ἀμφοτέρων, εἴτε ἰσάκις ἴσων ἰσάκις, ἵνα κύβος ᾖ, ἢ ἰσάκις ἴσων ἀνισάκις, ἵνα ἢ δοκίδες ἢ πλινθίδες ὦσιν, εἴτε ἀνισάκις ἀνίσων ἀνισάκις, ἵνα σκαληνοί, δύο ὅροι εὑρίσκωνται ἀνὰ μέσον ἄλλοι ἐναλλὰξ πρὸς τοὺς ἄκρους τοὺς αὐτοὺς σώζοντες λόγους καὶ ἀναμίξ, ὥστε ὁποτερουοῦν αὐτῶν τὴν ἁρμονικὴν σώζοντος ἀναλογίαν τὸν λοιπὸν ἀποτελεῖν τὴν ἀριθμητικήν· ἀνάγκη γὰρ οὕτως διακειμένων τῶν τεσσάρων ἐπιφαίνεσθαι τὴν γεωμετρικὴν ἐμπλέγδην ἀμφοτέραις ταῖς μεσότησιν ἀντεξεταζομένην, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν τρίτον ἀπ’ αὐτοῦ, οὕτως ὁ ὑπ’ αὐτὸν δεύτερος πρὸς τὸν τέταρτον· τὸ γὰρ τοιοῦτον τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἶσον ποιεῖ τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων· πάλιν δὲ ἂν ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ὑπ’ αὐτὸν ἐν τοσαύτῃ δειχθῇ διαφορᾷ, ἐν ὅσῃ καὶ αὐτὸς οὗτος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, ἀριθμητικὴ ἡ τοιαύτη ἐξέτασις γίνεται καὶ ἡ τῶν ἄκρων σύνθεσις διπλασία τοῦ μέσου· ἐὰν δ’ ὁ τρίτος ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχῃ καὶ ὑπερέχηται, ἁρμονικὴ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ μέσου καὶ τῆς τῶν ἄκρων συνθέσεως διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων. ὑπόδειγμα αὐτῆς ἔστω τοιοῦτον ϛ, η, θ, ιβ· οὐκοῦν ὁ μὲν ϛ σκαληνὸς ἀπὸ τοῦ ἅπαξ β τρίς, ὁ δὲ ιβ ἀπὸ τοῦ δὶς β τρὶς ἐν συνεχείᾳ μηκυνθέντων, τῶν δὲ μέσων ὁ μὲν ἐλάττων ἀπὸ τοῦ ἅπαξ β τετράκις, ὁ δὲ μείζων ἀπὸ τοῦ ἅπαξ γ τρίς, καὶ στερεοί τε οἱ ἄκροι καὶ τριχῆ διαστατοὶ καὶ ὁμογενεῖς αὐτοῖς αἱ μεσότητες, καὶ κατὰ μὲν τὴν γεωμετρικὴν ὡς ὁ ιβ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν ϛ, κατὰ δὲ τὴν ἀριθμητικὴν ὅσῳ ὁ ιβ τοῦ θ ὑπερέχει, τοσούτῳ καὶ ὁ θ τοῦ ϛ, κατὰ δὲ τὴν ἁρμονικὴν ᾧ μέρει ὁ η τοῦ ϛ ὑπερέχει, ἐν αὐτῷ τῷ ϛ τοῦ μέρους θεωρουμένου, τούτῳ ὑπὸ τοῦ ιβ ὑπερέχεται ἐν αὐτῷ τῷ ιβ θεωρουμένῳ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ μὲν η πρὸς ϛ ἢ ὁ ιβ πρὸς θ διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ, ὁ δὲ θ πρὸς ϛ ἢ ὁ ιβ πρὸς η διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, ὁ δὲ ιβ πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν ὅσῳ ὁ ιβ τοῦ θ ὑπερέχει, τοσούτῳ καὶ ὁ θ τοῦ ϛ, κατὰ δὲ τὴν ἁρμονικὴν ᾧ μέρει ὁ η τοῦ ϛ ὑπερέχει, ἐν αὐτῷ τῷ ϛ

Αξιοσημείωτον είναι το γεγονός ότι οιαδήποτε τριχή διαστατή δομή αριθμών, εμπεριέχουσα την αρμονικήν αναλογίαν, υποδηλοί στερεόν σώμα με ισχυρώς συνεκτικήν δομήν των συστατικών του μερών. Μεταξύ των αριθμών, οι οποίοι εκφράζουν τα γεωμετρικά στοιχεία, ήτοι κορυφές, ακμές, έδρες κ.λπ. εκάστου των πέντε πλατωνικών στερεών, εις τον κύβον και το οκτάεδρον[26] εντοπίζεται η αρμονική αναλογία. Επειδή, επιπροσθέτως, ο κύβος περιορίζεται από επίπεδες τετράγωνες επιφάνειες (έδρες), συναρμολογούμενες από «ατομικά» ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα και μόνον, για τον λόγον αυτόν ο Πλάτων αντιστοίχισε εις τον κύβον την στερεάν και συνεκτικήν γαίαν.

Έστωσαν οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ, δ, οι οποίοι δομούν την ζητουμένην αναλογίαν με τους α και δ σε σχέση διαπασών, ήτοι $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{2}{1}$.

Ο β, ως η αρμονική μεσότης των όρων του μεριστέου διαστήματος κατά τους Πυθαγορείους, θα δίδεται υπό της σχέσεως:

$$\frac{\delta - \beta}{\beta - \alpha} = \frac{\delta}{\alpha} \Rightarrow \alpha \cdot \delta - \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \delta - \alpha \cdot \delta \Rightarrow 2\alpha \cdot \delta = \beta \cdot (\alpha + \delta) \Rightarrow \beta = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \delta}{\alpha + \delta}$$

Ο γ, ως η αριθμητική μεσότης των όρων του μεριστέου διαστήματος κατά τους Πυθαγορείους, θα δίδεται υπό της σχέσεως:

$$\delta - \gamma = \gamma - \alpha \Rightarrow 2\gamma = \alpha + \delta \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha + \delta}{2}$$

τοῦ μέρους θεωρουμένου, τούτῳ ὑπὸ τοῦ ιβ ὑπερέχεται ἐν αὐτῷ τῷ ιβ θεωρουμένῳ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ μὲν η πρὸς ϛ ἢ ὁ ιβ πρὸς θ διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ, ὁ δὲ θ πρὸς ϛ ἢ ὁ ιβ πρὸς η διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, ὁ δὲ ιβ πρὸς ϛ διὰ πασῶν ἐν διπλασίῳ· λοιπὸν δὲ ὁ θ πρὸς τὸν η τονιαῖον ἐν ἐπογδόῳ, ὅπερ μέτρον κοινὸν πάντων τῶν ἐν μουσικῇ λόγων, ἅτε καὶ γνωριμώτερον ὄν, ὅτι ἄρα καὶ διαφορὰ τῶν πρώτων καὶ στοιχειωδεστάτων συμφώνων πρὸς ἄλληλα ὑπάρχει.
Νικομάχου, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 29, 1, 1 - 2, 29, 4, 8.

[26] Κύβος, η «Γεωμετρική Αρμονία»: (Νικόμαχος, ό.π. 26,2) «γεωμετρικὴν ἁρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις. ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται. πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν ιβ', γωνίαι δὲ η', ἐπίπεδα δὲ ς'. μεσότης ἄρα ὁ η' τῶν ς' καὶ τῶν ιβ' κατὰ τὴν ἁρμονικήν». Εις την εν λόγω σειράν αριθμών διακρίνονται όλες οι μουσικές συμφωνίες και γιαυτό τον κύβο τον ωνόμαζον οι Πυθαγόρειοι «Γεωμετρική Αρμονία». Πράγματι, το 8 είναι ο μέσος αρμονικός των αριθμών 6 και 12, διότι $\frac{12}{6} = \frac{12-8}{8-6}$. Ο επίτριτος λόγος 8:6 εκφράζει το διατεσσάρων διάστημα. Ο ημιόλιος λόγος 12:8 εκφράζει το διαπέντε διάστημα. Ο διπλάσιος λόγος, δηλαδή το διαπασών διάστημα, εκφράζεται από το γινόμενον $\frac{12}{8} \cdot \frac{8}{6} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$. Το διαπασών και το διαπέντε, συνδυαζόμενα, εκφράζονται από τον τριπλάσιον λόγον $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{1}$ ή $\frac{12-6}{8-6} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$. Το δις διαπασών διάστημα εκφράζεται από τον τετραπλάσιον λόγον ως εξής: $\frac{8}{8-6} = \frac{4}{1}$.

Η γεωμετρική (εμπλέγδην) αναλογία μεταξύ των τεσσάρων όρων της τριχή διαστατής δομής είναι η $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Εκ των ανωτέρω σχέσεων, εάν τεθεί α=1, προκύπτουν οι τιμές:

$$\beta=\frac{2\cdot 1\cdot 2}{1+2}=\frac{4}{3}$$

$$\gamma=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\delta=2$$

Επειδή οι α, β, γ, δ πρέπει να είναι φυσικοί αριθμοί, πολλαπλασιάζομε επί το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών [Ε.Κ.Π.(2, 3)=6] και προκύπτει η ζητουμένη τριχή διαστατή δομή αριθμών (Σχήμα 6)

6 8 9 12
α β γ δ

εις την οποίαν:

το μεριστέον διάστημα $12:6$ είναι διπλάσιον,

τα εναλλάγδην κι εμπλέγδην διαστήματα $9:6,\ 12:8$ είναι ημιόλια,

τα άκρα διαστήματα $8:6,\ 12:9$ είναι επίτριτα και

το μέσον διάστημα $9:8$ είναι επόγδοον.

Σχήμα 6: Του δις διατεσσάρων $\left(4^2:3^2\right)$αφαιρουμένου από το διαπασών $(12:6)$, ο μείζων τόνος (επόγδοος) $(9:8)$.

Τα προηγούμενα δια μουσικών όρων διατυπούνται ως εξής: Του δις διατεσσάρων $\left(\frac{4}{3}\right)^2$αφαιρουμένου εκ του διαπασών $\left(\frac{12}{6}\right)$, ο μείζων τόνος (επόγδοος) $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Παράδειγμα 4

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Πλάτωνος, το οποίον εκτίθεται εις τον διάλογόν του *Τίμαιος* (32 b, 2-3) και διατυπούται ως: «τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν»

Ζητείται, δηλαδή, μια τριχή διαστατή σχέσις μεταξύ τεσσάρων φυσικών αριθμών α, β, γ, δ εις την οποίαν το μεριστέον διάστημα είναι $\frac{\delta}{\alpha}$ και τα άκρα διαστήματα είναι ίσα με το μέσον διάστημα $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}=\kappa$. Εκ των σχέσεων αυτών προκύπτουν οι σχέσεις:

$\beta = \kappa\alpha$

$\gamma = \kappa\beta = \kappa^2\alpha$

$\delta = \kappa\gamma = \kappa^3\alpha$

Εκ της τελευταίας σχέσεως προκύπτει ότι το μεριστέον διάστημα δίδεται υπό της σχέσεως $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \kappa \cdot \kappa \cdot \kappa = \kappa^3$, όπου $\kappa = \sqrt[3]{\frac{\delta}{\alpha}}$ ρητός αριθμός. Προκειμένου εκ της σχέσεως αυτής να προκύπτει ο κ φυσικός αριθμός, θα πρέπει το μεριστέον διάστημα να εκφράζεται ως λόγος δύο κύβων (στερεών αριθμών).

Έστω, λοιπόν, ότι $\left.\begin{matrix} \delta = \psi^3 \\ \alpha = \chi^3 \end{matrix}\right] \Rightarrow \kappa = \sqrt[3]{\frac{\psi^3}{\chi^3}} = \frac{\psi}{\chi}$

Η τριχή διαστατή δομή απαρτίζεται εκ των κάτωθι τεσσάρων όρων:

$\alpha = \chi^3$ (ελάσσων κύβος)

$\beta = \kappa\alpha = \frac{\psi}{\chi} \cdot \chi^3 = \psi\chi^2$ (δοκίς)

$\gamma = \kappa\beta = \kappa^2\alpha = \left(\frac{\psi}{\chi}\right)^2 \cdot \chi^3 = \psi^2\chi$ (πλινθίς)

$\delta = \kappa\gamma = \kappa^3\alpha = \left(\frac{\psi}{\chi}\right)^3 \cdot \chi^3 = \psi^3$ (μείζων κύβος)

Παράδειγμα 5

Ζητείται μια τριχή διαστατή σχέσις μεταξύ τεσσάρων φυσικών αριθμών α, β, γ, δ εις την οποίαν το μεριστέον διάστημα είναι επόγδοον $\left(\frac{9}{8}\right)$ και τα άκρα διαστήματα είναι ίσα με το διάστημα του λείμματος $\left(\frac{256}{243}\right)$. Εκ των σχέσεων αυτών προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{matrix} \frac{\delta}{\alpha} = \frac{9}{8} \\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{256}{243} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{9}{8} \cdot \alpha$$

$$\beta = \frac{256}{243} \cdot \alpha$$

$$\gamma = \frac{243}{256} \cdot \delta = \frac{243}{256} \cdot \frac{9}{8} \cdot \alpha$$

Λαμβάνοντες ως τιμήν του α το Ε.Κ.Π. των ανωτέρω παρονομαστών, δηλαδή $a = 8 \cdot 243 \cdot 256 = 497.664$, προκύπτουν οι τιμές των υπολοίπων τριών ζητουμένων φυσικών αριθμών.

$$\delta = \frac{9}{8} \cdot 8 \cdot 243 \cdot 256 = 559.872$$

$$\beta = \frac{256}{243} \cdot 8 \cdot 243 \cdot 256 = 524.288$$

$$\gamma = \frac{243}{256} \cdot \delta = \frac{243}{256} \cdot \frac{9}{8} \cdot 8 \cdot 243 \cdot 256 = 531.441$$

Τα προηγούμενα δια μουσικών όρων διατυπούνται ως εξής: του διλείμματος $\left(\frac{256}{243}\right)^2$ αφαιρουμένου εκ του επογδόου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, το «άτμητον» πυθαγόρειον κόμμα $\left(\frac{531.441}{524.288}\right)$.

Σχήμα 7: Του διλείμματος $\left(\frac{256}{243}\right)^2$ αφαιρουμένου εκ του επογδόου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, το «άτμητον» πυθαγόρειον κόμμα $\left(\frac{531.441}{524.288}\right)$.

Α΄ ΠΗΓΕΣ

Ανών. Bell.	F. Bellermann, *De Anonymi scriptio de Musica*, Ανωνύμου σύγγραμμα περί Μουσικής, Βερολίνο 841. Νέα έκδ. D. Najock, Goettingen 1972.
Αριστείδης	Αριστείδης Κοϊντιλιανός, *Περί Μουσικής*, έκδ. Meibom 1652, A. Jahm 1882 και R. P. Winnington-Ingram, Λιψία 1963.
Αριστόξ. Αρμ.	Αριστόξενος, *Αρμονικά Στοιχεία*, έκδ. Meibom κ.α.
Αριστοτέλης	Bekker, I., *Aristotelis opera omnia*, Berlin, 1831-1870, new edn., O. Gigon ed., 1960-
Γαυδ. Εισ.	Γαυδέντιος Φιλόσοφος, *Αρμονική Εισαγωγή*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
Ευκλ.	Ευκλείδης, *Opera Omnia*, ed. J. L. Heiberer και H. Monge, Leipzig (T.) 1883-1916.
Θέων Σμυρν.	Θέωνος Σμυρναίου, *Περί Μουσικής (Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν)*, B. G. Teubneri, Lipsiae, 1878, έκδ. Ism. Bullialdus, Παρίσι 1644 και ed. Hiller, Λιψία 1878, T.
Κλεον. Εισ.	Κλεονείδης (ή Κλεωνίδης), *Εισαγωγή Αρμονική*, έκδ. C. v. Jan 1895.
Ευκλείδου	«*Στοιχεία*» (τόμοι 4) (επιμέλεια, σχολιασμός, απόδοση στη νεοελληνική Ευαγγέλου Σταμάτη) (Ο.Ε.Δ.Β.), Αθήνα, 1953.
LSJ	Henry G. Liddell and R. Scott, *A Greek-English Lexicon*, revised and augmented by Sir Henry St. Jonew, with a Supplement, Οξφόρδη, 1968, ανατύπωση 1973.
Macran	Henry S. Macran, *The Harmonics of Aristoxenus* (Αριστοξένου Αρμονικά Στοιχεία, Οξφόρδη 1902).
Mb	Marc Meibom (Marcus Meibomius), *Antiquae Musicae Auctores Septem*, graece et latine, Amsterdam 1652.
Νικόμ. Εγχ.	Νικόμαχος Γερασηνός, *Αρμονικής Εγχειρίδιον*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
Παχυμ.	Γεώργιος Παχυμέρης, *Περί Αρμονικής* (Vincent, Notices),

	Παρίσι 1847, σσ. 401-552.
Πλάτων	Πλάτων, *Νόμοι*, *Πολιτ.* (Πολιτεία), *Πρωταγ.* (Πρωταγόρας), *Φίληβος* κλπ.
Πλούτ. Περί μουσ.	Πλούταρχος, *Περί μουσικής*.
Πορφύρ.Comment.	Πορφύριος, *Commentarius in Ptolemaei Harmonica*, έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During Goeteborg 1932.
Πρόκλου	Πρόκλος, «*Σχόλια εις το α΄ βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου*» τόμος Α΄ (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2001.
Πρόκλου	Πρόκλος, «*Σχόλια εις το α΄ βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου*» τόμος Β΄ (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2002.
Πρόκλου	Πρόκλος, *Εις τον Τίμαιον*, E. Diehl (ed.), Leipzing, 1903 (tr. By J. Festugiere, 5 vols, Paris, 1966-68).
Πρόκλου	Πρόκλος, *Περί της κατά Πλάτωνος θεολογίας*, στο Proclus, Opera inedita, V. Cousin (ed.), Paris, 1864 (αγγλική έκδοση από τους Morrow και Dillon, Princeton, 1987.
Πτολ. Αρμ.	Πτολεμαίος, *Αρμονικά*, έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During, Goeteborg 1930.
Φιλόλαος	Philolaus, *Notices and fragments in Diels-Kranz 44* (Vol. 1, pp. 398-419); Timpanaro Cardini, Pitagorici 18, Fasc. II, pp. 82-249.
Online TLG	*THESAURUS LINGUAE GRAECAE: A Digital Library of Greek Literature*

Β΄ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ

De Falco, V. (ed.), 1922, *Theologumena Arithmeticae*, Teubner, Lipsiae, μετάφραση στη νεοελληνική Ι. Ιωαννίδης, Α. Φωτόπουλος και Π. Γράβιγγερ (επ.), Ιδεοθέατρον, Αθήνα, 1998.

Fowler, D., 1979, *Ratio in early Greek Mathematics*, (Bulletin of American Mathematical Society, pp. 807-846), New York.

Fowler, H., 1999, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, Oxford.

Heath, T., 1926, *Euclid; the thirteen books of the Elements,* Dover, N. York.

Heath, T., 1949, *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Preess, Oxford.

Heath, T., 1981, *A History of Greek Mathematics (Vol. I, II)*, Dover, N. York.

Hoche, Richard, ed. *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II*, Leipzing, 1866.

Ivor Thomas, 1980, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. I-II, Cambridge Mass., London.

LOEB CLASSICAL LIBRARY, 1998, *Greek Mathematical Works II– Aristarchus to Pappus,* Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.

LOEB CLASSICAL LIBRARY, 2000, *Greek Mathematical Works I– Thales to Euclid,* Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.

Martin, T. H., 1841, *Μελέτες για τον Τίμαιο του Πλάτωνα*, Παρίσι.

Pearson, L., 1990, *ARISTOXENUS: Elementa Rhythmica*, Clarendon Prees, Oxford.

Pistelli. H. (ed.), 1894, In Nicomahi Arithmeticam introductionem, ανατ. Teubner, Stuttgart, 1975.

Reinach, Theodore, 1999, *Η ελληνική μουσική*, Μτφρ. Αναστασίας-Μαρίας Καραστάθη, σελ. 158, Αθήνα.

Rivaud, A., 1925, *Πλάτων, Τίμαιος, Κριτίας*, Παρίσι.

Szabo, Arpad, 1973, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

Taylor, A. E., 1992, *ΠΛΑΤΩΝ (Ο άνθρωπος και το έργο του)*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.

Taylor, Thomas, 1994, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων,* Μτφρ. Μαρία Οικονομοπούλου, *Εκδόσεις* ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ, Αθήνα.

West. M., L., 2004, *Αρχαία Ελληνική Μουσική*, Μτφρ. Στ. Κομνηνός, Εκδ. Παπαδήμα, Αθήνα.

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΑ

Ανδρεαδάκης, Ν., 1999, *Η τετρακτύς της Ιωνίας και ο Ιωνικός λόγος αποκαλύπτουν,* Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, Τόμος Α΄, 1995, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, *ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*, Τόμος Β΄, 1997, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Ιάμβλιχος, 1998, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής*, Εκδ. Ιδεοθέατρον, Αθήνα.

Ιάμβλιχος, 2001, *Περί του Πυθαγορικού Βιου*, Εισαγωγή-Μετάφραση-Σχόλια Αλ. Α. Πέτρου, Πρόλογος Τ. Πεντζοπούλου-Βαλαλά, Εκδ. Ζήτρος, Θεσσαλονίκη.

Κάλφας, Βασίλης, 1997, *ΠΛΑΤΩΝ ΤΙΜΑΙΟΣ,* Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.

Καράς Σίμων, 1989, *Αρμονικά*, Ανακοίνωσις εις το Μουσικολογικόν Συνέδριον των Δελφών της 28-30 Οκτωβρίου 1988, Εκδ. Συλλόγου προς διάδοσιν της Εθνικής Μουσικής, Αθήνα.

Καράς Σίμων, *Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής*, εν χγφοις.

Λαμπρίδης, Χ. Χ., 1996, *ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ*, Βιβλιοπωλείο ΚΛΕΙΩ, Πάτρα.

Μιχαηλίδης, Σ., 1982, *Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα.

Μωυσιάδης, Χ., και Σπυρίδης, Χ., 1995, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Σπανδάγου Ευαγ., 2001, *Η Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., 2003, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν του Θέωνος του Σμυρναίου*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2004, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2006, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2008, *Πλάτωνος Τίμαιος: ΓΕΝΕΣΙΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις)*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2010, *Η Ομηρική Λεξικογραφία και Στιχογραφία από τον Πυλώνα των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών*, Αυτοέκδοση, Αθήνα.

Ο ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΑΒΑΞ ΤΟΥ ΛΑΥΡΙΟΥ
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ,
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
email: hspyridis@music.uoa.gr
tel/fax: 210-72.77.832

«Πυθαγόρειες Αναλογικότητες ή Αναλογίες ή Μεσότητες»: Οι γεννήτορες της αρχαίας Ελληνικής Μουσικής

Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν πως η αρμονία της ψυχής, η αρμονία των ήχων και αυτή η ίδια η αρμονία του σύμπαντος σχετίζεται με τον τέλειο αριθμό, την ιερά τετρακτύν[1] (1+2+3+4=10), της οποίας ενσαρκωτές είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4. Ανακάλυψαν πως οι τέλειες συμφωνίες εκφράζονται ως αναλογίες αφενός μεν μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος, αφετέρου δε μεταξύ των γεωμετρικών στοιχείων *του κύβου* («γεωμετρική αρμονία»)[2]. Επιβεβαίωσαν με ακρίβεια ότι μέσα σ' αυτήν καθεαυτήν τη φύση του ήχου υφίσταται μια αυστηρή αριθμητική οργάνωση είτε αυτός παράγεται από ένα μουσικό όργανο, είτε από το ίδιο το Σύμπαν (Μουσική των Σφαιρών), διότι η μουσική εξέφραζε την υφιστάμενη συμπαντική αρμονία και ήταν ένα μέσο προσέγγισής της μέσω του ίδιου του κάλλους της.

Ο Πυθαγόρας έδωσε τον ορισμό της αρμονίας (=διαπασών ή οκτάβας) στη μουσική ως «ἁρμονία ἐστὶ κρᾶσις καὶ σύνθεσις ἐναντίων» υπονοώντας ότι η οκτάβα δομείται από τη σύνθεση της αριθμητικής και της αρμονικής (υπεναντίου) αναλογιών ή αναλογικοτήτων.

[1] Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν αναγκαίο το να πλάθουν λέξεις εσωτερικής σημασίας όπως π.χ. φιλοσοφία, κόσμος, τετρακτύς, κάθαρσις, εχεμύθια, κατάρτυσις κ.α., στις οποίες απέδιδαν ιδιαίτερη σημασία.
Η τετρακτύς ήταν πρωτίστως τιμωμένη από τους Πυθαγορείους, διότι περιείχε όλες τις μουσικές συμφωνίες. Πράγματι, 4:1 είναι ο τετραπλάσιος λόγος και εκφράζει τη συμφωνία (το εύφωνο μουσικό διάστημα) της δις διαπασών (δύο οκτάβες), 3:2 είναι ο ημιόλιος λόγος και εκφράζει τη διά πέντε συμφωνία ή διοξεία (διάστημα πέμπτης καθαρής), ο 4:3 είναι ο επίτριτος λόγος και εκφράζει τη διά τεσσάρων συμφωνία ή συλλαβά (διάστημα τετάρτης καθαρής), 2:1 είναι ο διπλάσιος λόγος και εκφράζει τη διά πασών συμφωνία (διάστημα οκτάβας). Κατά την τελετή της μυήσεως των Πυθαγορείων οι νεόφυτοι ήσαν υποχρεωμένοι να δίνουν τον περίφημο Πυθαγόρειο όρκο στην ιερή τετρακτύ «Οὐ, μὰ τὸν ἁμετέρα ψυχὰ παραδόντα τετρακτύν, παγὰν ἀενάου φύσιος ριζώματ' ἔχουσαν».

[2] Κύβος, η «Γεωμετρική Αρμονία»: (Νικόμαχος, ό.π. 26,2) «γεωμετρικὴν ἁρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις. ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται. πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν ιβ', γωνίαι δὲ η, ἐπίπεδα δὲ ς'. μεσότης ἄρα ὁ η' τῶν ς' καὶ τῶν ιβ' κατὰ τὴν ἁρμονικήν. Στην εν λόγω σειρά αριθμών διακρίνονται όλες οι μουσικές συμφωνίες και γιαυτό τον κύβο τον ονόμαζαν οι Πυθαγόρειοι «Γεωμετρική Αρμονία». Πράγματι, το 8 είναι ο μέσος αρμονικός των αριθμών 6 και 12, διότι $\frac{12}{6}=\frac{12-8}{8-6}$. Ο επίτριτος λόγος 8:6 εκφράζει το διατεσσάρων διάστημα. Ο ημιόλιος λόγος 12:8 εκφράζει το διαπέντε διάστημα. Ο διπλάσιος λόγος, δηλαδή το διαπασών διάστημα εκφράζεται από το γινόμενο $\frac{12}{8}.\frac{8}{6}=\frac{12}{6}=\frac{2}{1}$. Το διαπασών και το διαπέντε, συνδυαζόμενα, εκφράζονται από τον τριπλάσιο λόγο $\frac{2}{1}.\frac{3}{2}=\frac{3}{1}$ ή $\frac{12-6}{8-6}=\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$. Το δις διαπασών διάστημα εκφράζεται από τον τετραπλάσιο λόγο ως εξής: $\frac{8}{8-6}=\frac{4}{1}$.

Η Μουσική για τους Πυθαγορείους αποτελούσε τη «*Θεωρία των λόγων*» και συγκαταλεγόταν ως τρίτο μέρος ανάμεσα στα τέσσερα μέρη (Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική, Αστρονομία) της Μαθηματικής επιστήμης[3].

Για να καταστεί κατανοητό το θεωρητικό μέρος της Μουσικής, της Αστρονομίας, της Γεωμετρίας και της Φιλοσοφίας του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη πρέπει να ορισθεί η έννοια της μεσότητος ή *αναλογικότητος* ή *αναλογίας*[4]. Ο Πρόκλος ορίζει την αναλογία στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιο* ως *«την ταυτότητα του λόγου και ως τον πλέον υπέροχο εκ των δεσμών». «Αναλογικότητα είναι η αναγωγή δύο ή περισσοτέρων λόγων σε έναν».* «Αναλογικότητα είναι η όμοια σχέση δύο ή περισσοτέρων λόγων, οι οποίοι δεν έχουν δομηθεί από τις ίδιες ποσότητες και διαφορές». *«Λόγος είναι μια ορισμένη σχέση μεταξύ δύο όρων, που παράγει το αναλογικό ή ανάλογο και η αναλογικότητα προκύπτει από την ένωση λόγων».*

Η αναλογικότητα μπορεί να αποτελείται από οποιονδήποτε πλήθος όρων μεγαλύτερο του 3. Τέσσερις (4) είναι το ελάχιστο πλήθος αριθμών, που δομούν μια αναλογία διεζευγμένη, δηλαδή μη συνεχή, μη συνημμένη π.χ. $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Εάν, όμως, εισαχθεί στην αναλογία ως όρος αυτής η διαφορά δύο όρων της ή καταστεί συνεχής (=συνημμένη) με την επανάληψη του παρονομαστού[5] του πρώτου λόγου στον αριθμητή[6] του δεύτερου λόγου, τότε το πλήθος των αριθμών περιορίζεται στο τρία (3) π.χ. $\frac{a}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$.

Τρεις αναλογίες, η Αριθμητική, η Γεωμετρική και η Αρμονική (ή Υπενάντιος)[7], ήσαν γνωστές στους πιο αρχαίους Μαθηματικούς και οι οποίες παρουσιάσθηκαν στη φιλοσοφία του Πυθαγόρα (580-490 π.Χ.), του Πλάτωνα (427-347 π.Χ.) και του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.). Αυτές οι τρεις αναλογικότητες (μεσότητες) σύμφωνα με τον *Ιάμβλιχο* (346-414 μ.Χ.) χρησιμοποιήθηκαν από τον *Πλάτωνα* μέχρι τον *Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.)*. ‘Αλλες τρεις αναλογικότητες, υπενάντιες των τριών πρώτων χωρίς συγκεκριμένη ονομασία, αλλά αναφερόμενες ως τέταρτη, πέμπτη και έκτη αναλογικότητα, επενοήθησαν από τους

---

[3] Οι Πυθαγόρειοι διαχώριζαν τη Μαθηματική επιστήμη σε τέσσερα μέρη. Το ένα από τα μέρη της το απέδιδαν στο *πόσα πολλά* και το άλλο στο *πόσο πολύ*. Διαχώριζαν πάλι σε δύο το καθένα απ’ αυτά τα δύο μέρη, διότι έλεγαν ότι το *πόσα πολλά* δηλαδή μια ποσότητα είτε υφίσταται αυτή καθεαυτή (εκφράζεται με απόλυτους αριθμούς), είτε μελετάται σε σχέση με κάτι άλλο (εκφράζεται με αναλογία) και ότι το *πόσο πολύ* είτε είναι σταθερό, είτε είναι σε κίνηση. Επίσης έλεγαν ότι η Αριθμητική ερευνά το *πόσα πολλά* που υφίστανται καθεαυτά, ενώ η Μουσική ερευνά το *πόσα πολλά* που υφίστανται αναφορικά προς κάτι άλλο. Η Γεωμετρία μελετά το *πόσο πολύ* που είναι ακίνητο, αλλά η Αστρονομία μελετά το *πόσο πολύ* που είναι από μόνο του ή κατ’ ουσίαν κινητό.

[4] Ο όρος «αναλογία» κανονικά ισχύει μόνον στις γεωμετρικές προόδους. Όμως, οι αρχαίοι ‘Ελληνες Μαθηματικοί συνήθιζαν να χρησιμοποιούν τον όρο «αναλογία» και για τις αριθμητικές και για τις γεωμετρικές και για τις αρμονικές προόδους.
Η θεωρία των αναλογικοτήτων ή των αναλογιών φαίνεται να πρωτοεισήχθη από τον Θαλή και μετά να υπέστη από τους Πυθαγορείους συνεχείς βελτιώσεις. Βρήκε εφαρμογή στον τομέα των καθαρών Μαθηματικών (‘Ιππασος ο Μεταποντίνος [6ος-5ος π.Χ. αι.], Ιπποκράτης ο Χίος [470-400 π.Χ.]), στη Μουσική (‘Ιππασος ο Μεταποντίνος, Φιλόλαος [530-470 π.Χ.], Αρχύτας ο Ταραντίνος [430-350 π.Χ.]), στη Γλυπτική (Πολύκλειτος ο Αργείος [4ος π.Χ. αι.]), και στη, Ιατρική (!) (Αλκμαίων [570-500 π.Χ.], Φιλόλαος).
Ο στοιχειωτής Ευκλείδης μας διδάσκει την προϊστορία της αναλογίας στο βιβλίο V των Στοιχείων του (Τα κυριώτερα σημεία του βιβλίου V των Στοιχείων είναι έργο του Ευδόξου), παραθέτοντας έναν θαυμαστής τελειότητος ορισμό του Ευδόξου.
Πρέπει να τονισθεί ότι η Ευκλείδειος ορολογία της διδασκαλίας για την αναλογία προδίδει τη σχέση της προς τη θεωρία της Μουσικής.

[5] Ο παρονομαστής κλάσματος ελέγετο κατά τους αρχαίους Υπόλογος.

[6] Ο αριθμητής κλάσματος ελέγετο κατά τους αρχαίους Πρόλογος.

[7] Ο Νικόμαχος υπογραμμίζει ότι οι τρεις αυτές πρώτες αναλογίες πήραν τα ονόματά τους από τις τρεις πρώτες επιστήμες, δηλαδή την Αριθμητική, τη Γεωμετρία και την Αρμονική (=Μουσική).

Αρχύτα και *Ίππασο τον Μεταποντίνο.* Οι μεταγενέστεροι του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη φιλόσοφοι, ο *Μυωνίδης* και ο *Ευφράνωρ (4ος π.Χ. αιώνας)*, λόγω της κατά τον Πυθαγόρα τελειότητας της δεκάδας (1+2+3+4=10), πρόσθεσαν άλλες τέσσερις (4) αναλογικότητες. Τελευταία, μια ενδέκατη αναλογία προστέθηκε από τον Τζορντάνο Μπρούνο.

Πρέπει να τονισθεί ότι στην Αριθμητική αναλογία, από την οποία παράγεται ο αριθμητικός μέσος[8], «*αγνοείται η ταυτότητα του λόγου και εξετάζεται μόνον η διαφορά των όρων*» ή, με άλλα λόγια, «*διατηρεί τις σχέσεις των όρων σύμφωνα με την ισότητα της ποσότητας, αρνούμενη την ομοιότητα του λόγου*»[9].

Στον Πίνακα Ι παρατίθενται οι δέκα(+μία) Πυθαγόρειες αναλογίες για τις οποίες έγινε προηγουμένως λόγος.

Όσον αφορά στους τρεις μέσους αριθμητικό, γεωμετρικό και αρμονικό[10] ο Πρόκλος στο Ὑπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τίμαιον σελ. 238 κάνει την εξής παρατήρηση: «έχουν σχέση με την Ευνομία, τη Δίκη και την Ειρήνη, τις τρεις κόρες της Θέμιδος. Ο αριθμητικός μέσος σχετίζεται με την Ειρήνη. Επειδή υπερβαίνει και υπερβαίνεται από μια ίση ποσότητα, τον χρησιμοποιούμε στις συναλλαγές μας εν καιρώ ειρήνης. Ο γεωμετρικός μέσος έχει σχέση με την Ευνομία, τη δίκαιη νομοθεσία, την οποία ο Πλάτων ονομάζει και κρίση του Δία, μέσω της οποίας το σύμπαν κοσμείται με γεωμετρικές αναλογίες. Ο αρμονικός μέσος έχει σχέση με τη Δίκη ή Δικαιοσύνη, μέσω της οποίας οι μεγαλύτεροι όροι έχουν ένα μεγαλύτερο λόγο και οι μικρότεροι ένα μικρότερο λόγο.

Πίνακας Ι: Οι δέκα(+μία) Πυθαγόρειες αναλογίες (έστω ότι $\alpha > \beta > \gamma$).

α/α	Ονομασία	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
1	Αριθμητική[11]	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha}=\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\gamma}$ ή $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ ή $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$	3,2,1

[8] Οι μέσοι από τους αρχαίους απεκαλούντο μέσα. Τρία ήσαν τα μέσα που ήσαν γνωστά στους πιο αρχαίους μαθηματικούς και αυτά ήσαν το αριθμητικό, το γεωμετρικό και το αρμονικό.

[9] Σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιεί ο Νικόμαχος ο Γερασηνός δύο ζεύγη αριθμών έχουν μια όμοια ποιοτική σχέση, όταν παρουσιάζουν τον ίδιο λόγο και έχουν μια όμοια ποσοτική σχέση, όταν παρουσιάζουν την ίδια διαφορά.

[10] Γενικά, δοθέντων δύο αριθμών χ, y (έστω χ<y) ισχύει η πολλαπλή ανισότητα, που απεδείχθη από τους Πυθαγορείους: χ < αρμονικός μέσος < γεωμετρικός μέσος < αριθμητικός μέσος < y ή

$$x < \frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{x}+\frac{\mathbf{1}}{y}} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{\mathbf{2}} < y$$

[11] Η Α ρ ι θ μ η τ ι κ ή α ν α λ ο γ ι κ ό τ η τ α μας είναι σήμερα γνωστή ως Αριθμητική πρόοδος. Ονομάζεται και «αναλογία κατά ποσότητα», διότι σε αυτήν δεν ισχύει η ισότητα των λόγων μεταξύ τριών διαδοχικών όρων, αλλά η ισότητα των διαφορών τους. Πράγματι, εάν α, β, γ (α>β>γ) είναι τρεις διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει η κατά ποσότητα αναλογία α-β=β-γ και όχι η κατά ποιότητα αναλογία α:β=β:γ. Οι προγενέστεροι του Νικομάχου (50-120 μ.Χ.) γνώριζαν ότι στην αριθμητική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι μεγαλύτερος του λόγου των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{2}{1} > \frac{3}{2}$, αφού ο πρώτος είναι διπλάσιος και ο δεύτερος είναι ημιόλιος.
Βάσει αυτού ο α ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς μ έ σ ο ς σ υ γ κ ρ ί ν ε τ α ι μ ε τ η ν ο λ ι γ α ρ χ ί α ή τ η ν π ο λ ι τ ε ί α π ο υ κ υ β ε ρ ν ά τ α ι α π ό λ ί γ ο υ ς, ο ι ο π ο ί ο ι ε π ι δ ι ώ κ ο υ ν τ ο δ ι κ ό τ ο υ ς κ α λ ό κ α ι ό χ ι α υ τ ό τ η ς π ο λ ι τ ε ί α ς.

2	Γεωμετρική[12]	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\beta=\sqrt{\alpha\gamma}$	4,2,1
3	Αρμονική[13]	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{\beta}$ ή $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$	6,4,3
4	Τέταρτη (Υπενάντιος της αρμονικής)	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}$	6,5,3
5	Πέμπτη (Υπενάντιος της γεωμετρικής)	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}$	5,4,2
6	‘Εκτη (Υπενάντιος της γεωμετρικής)	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$	6,4,1
7		$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$	9,8,6
8		$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}$	9,7,6
9		$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}$	7,6,4

[12] Η Γεωμετρική αναλογικότητα μας είναι σήμερα γνωστή ως Γεωμετρική πρόοδος. Οι προγενέστεροι του Νικομάχου γνώριζαν ότι στη γεωμετρική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι ίσος προς το λόγο των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$ (αναλογία κατά ποιότητα), αφού και οι δύο εκφράζουν τον διπλάσιο λόγο.
Βάσει αυτού ο γεωμετρικός μέσος είναι ανάλογος προς μια λαϊκή κυβέρνηση, όπου τόσο ο φτωχός όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση.

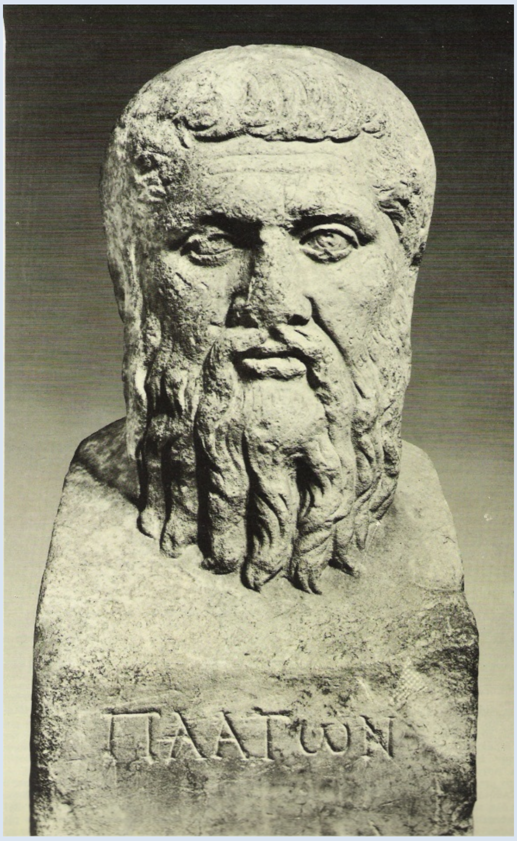
[13] Η Αρμονική ή Υπενάντιος αναλογικότητα, που μας είναι σήμερα γνωστή ως Αρμονική πρόοδος, αποδίδεται στον *Ίππασο τον Μεταποντίνο*, ο οποίος ήταν λίγο προγενέστερος του Φιλολάου. Σύμφωνα με τον Φιλόλαο ονομάστηκε Αρμονική, διότι ασχολείται με τη «Γεωμετρική Αρμονία», δηλαδή την αρμονία του κύβου. Οι προγενέστεροι του Νικομάχου γνώριζαν ότι στην αρμονική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι μικρότερος του λόγου των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{4}{3}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, αφού ο πρώτος είναι επίτριτος και ο δεύτερος είναι ημιόλιος. Για το λόγο αυτό η αρμονική πρόοδος ονομάζεται υπεναντία της αριθμητικής προόδου.
Βάσει αυτού ο αρμονικός μέσος λέγεται ότι αντιστοιχεί στην αριστοκρατία, επειδή υπάρχει μεγαλύτερος λόγος στους μεγαλύτερους όρους.

10	[14]	$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\alpha=\beta+\gamma$	8,5,3
11	του Τζορντάνο Μπρούνο	$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}$	6,4,3

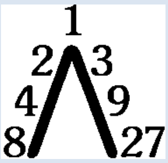
[14] Δυστυχώς, η δέκατη αναλογικότητα είναι σήμερα γνωστή ως η σειρά Fibonacci. Ο Leonardo Fibonacci ή Leonardo ο εκ Πίζης (1180-1250) εισήγαγε στην Ευρώπη το ινδοαραβικό αριθμητικό σύστημα. Ισχυρίσθηκε ότι, μελετώντας τον τρόπο που πολλαπλασιαζόντουσαν τα κουνέλια στην αυλή του, ανακάλυψε την ομώνυμη σειρά αριθμών. Στη σειρά Fibonacci, όταν οι όροι τεθούν κατ’ αύξουσα σειρά, ο κάθε όρος ισούται με το άθροισμα των δύο προηγουμένων του όρων. Γεννήτορες αριθμοί στη σειρά Fibonacci είναι οι 1, 1, 2.

«Η ΛΑΒΔΟΕΙΔΗΣ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ “ΓΕΝΕΣΙΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ” (ΤΙΜΑΙΟΣ, 35a1-36b6) ΜΕ ΔΩΡΙΑ ΤΕΤΡΑΧΟΡΔΑ (τόνος-τόνος-λείμμα) ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΚΑΤΙΟΥΣΑ ΔΙΑΔΟΧΗ»

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
210-7277832, hspyridis@music.uoa.gr



Εικόνα 1: Ο Πλάτων



ἡ δὲ τῶν ὑπὸ Πλάτωνος ἐκκειμένων ἀριθμῶν τετρακτὺς ἐντελεστέραν ἔσχηκε τὴν γένεσιν, τῶν μὲν ἀρτίων ἀρτίοις διαστήμασι τῶν δὲ περιττῶν περιττοῖς πολλαπλασιασθέντων· περιέχει δὲ τὴν μὲν μονάδα, κοινὴν οὖσαν ἀρχὴν ἀρτίων καὶ περιττῶν, τῶν δ' ὑπ' αὐτῇ τὰ μὲν δύο καὶ τρία πρώτους ἐπιπέδους, τὰ δὲ τέτταρα καὶ ἐννέα πρώτους τετραγώνους, τὰ δ' ὀκτὼ καὶ εἰκοσιεπτὰ πρώτους κύβους ἐν ἀριθμοῖς, ἔξω λόγου τῆς μονάδος τιθεμένης. ᾗ καὶ δῆλός ἐστι βουλόμενος οὐκ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἅπαντας ἀλλ' ἐναλλὰξ καὶ ἰδίᾳ τάσσεσθαι τοὺς ἀρτίους μετ' ἀλλήλων καὶ πάλιν τοὺς περισσούς, ὡς ὑπογέγραπται. οὕτως αἱ συζυγίαι τῶν ὁμοίων ἔσονται πρὸς τοὺς ὁμοίους καὶ ποιήσουσιν ἀριθμοὺς ἐπιφανεῖς κατά τε σύνθεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν ἐξ ἀλλήλων.

Πλούταρχος, *Περί της εν Τιμαίω Ψυχογονίας*,
Stephanus 1017 D4-E7

1. Προλεγόμενα

Αφιέρωσα πολλά έτη της ερευνητικής μου δραστηριότητος εις την μελέτη του «*μουσικού χωρίου (35α1-36b6)*» του Πλατωνικού Τιμαίου, διότι κατά τον Πλούταρχον είναι ένα από τα πλέον δύσκολα, ως προς την κατανόησή του, μέσα στο συνολικό Πλατωνικό έργο.

Από την εποχή του Πλάτωνος επροτάθησαν δύο διαφορετικοί τρόποι επιλύσεώς του εν λόγω προβλήματος, ο γραμμικός και ο λαβδοειδής.

Κατά τον πρώτον τρόπο ο Θεόδωρος, ο Κηρυναίος, τοποθετεί τους αριθμούς της μεγίστης τετρακτύος του Πλάτωνος (1, 2, 3, 4, 8, 9, 27) επ' ευθείας γραμμής, αναμειγνύοντας αρτίους με περιττούς αριθμούς και οδηγείται σε μια κατατομή κανόνος 36 όρων (=φθόγγων), η οποία καλύπτει συνολικώς ένα συχνοτικό εύρος δύο δισδιαπασών (=τεσσάρων διαπασών), ενός διαπέντε κι ενός επογδόου τόνου με την εξής διαστηματική αλληλουχία: διαπασών, διαπασών διαπασών, επόγδοος τόνος, διαπασών, διαπέντε.

Τον τρόπον αυτόν της επιλύσεως του Πλατωνικού προβλήματος εξέθεσα στην εργασία μου με τίτλο "Λύση του προβλήματος «Περί γενέσεως ψυχής κόσμου» (Πλάτωνος Τίμαιος 35a1-36b6)", η οποία εδημοσιεύθη στον τόμο ΛΗ΄ (2006-2007) της επιστημονικής επετηρίδος της Φιλοσοφικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών, σσ. 87-136.

Στην παρούσα εργασία για πρώτη φορά εκτίθεται αναλυτικώς η λαβδοειδής λύση του εν λόγω προβλήματος για την οποία πολλοί μελετηταί αναφέρουν ότι πρόκειται για την λαβδοειδή τοποθέτηση των επτά[1] αριθμών της Πλατωνικής τετρακτύος και πέραν τούτου ουδέν. Επέτυχα την λαβδοειδή λύση, αφού προηγουμένως αποκωδικοποίησα μια «Αδράστειο» πληροφορία που μας μεταφέρει ο Πρόκλος (*Εις τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5-8) και η οποία μέχρι τώρα μας ήταν ακατανόητη: «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους».

Και η λαβδοειδής λύση οδηγεί ακριβώς στην ίδια κατατομή κανόνος με την γραμμική λύση και έχει όλα τα προαναφερθέντα μουσικά χαρακτηριστικά με αυτήν, ήτοι 36 όρους μεταξύ των οποίων σχηματίζονται 35 μουσικά διαστήματα (22 επόγδοοι τόνοι, 11 λείμματα και 2 αποτομές) και που όλα μαζί καλύπτουν ένα συχνοτικό εύρος τεσσάρων διαπασών, ενός διαπέντε και ενός επογδόου τόνου.

Για την λύση του συγκεκριμένου προβλήματος δεν υπάρχουν οδηγίες. Θα έπρεπε, λέγει ο Πλούταρχος, να σας αφήσω εν είδει ασκήσεως να συπληρώσετε τα διαστήματα και να εντάξετε ανάμεσά τους τις μεσότητες, ακόμη και εάν ετύγχανε να μην το έχει επιχειρήσει κανείς προηγουμένως. Από τον Πλάτωνα δεν εδόθη πλήρης λύσις του προβλήματος, παρά μόνον εγένοντο υποδείξεις για την συμπλήρωση των μουσικών διαστημάτων με τις μεσότητες και η όλη διαδικασία της επιλύσεως αφέθη υπό μορφήν «εργασίας κατ' οίκον».

Ύστερα από πολλές προσπάθειες και με υποθέσεις επί υποθέσεων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο «trial and error» της Φυσικής, κατέληξα εις το συμπέρασμα ότι για την επίλυση του Πλατωνικού προβλήματος «Περί γενέσεως ψυχής κόσμου» και ιδιαιτέρως με τον λαβδοειδή τρόπο, είναι εντελώς απαραίτητη η ύπαρξη μιας δομής βασισμένης επί ενός συστήματος συντεταγμένων[2] με καταλλήλως βαθμολογημένους τους άξονές του, επί του οποί-

[1] Διακεκριμένοι φιλόσοφοι της αρχαιότητος εστήριξαν ολόκληρα φιλοσοφικά συστήματα κοσμογονικών, μεταφυσικών και οντολογικών θεωριών επί των αριθμών, δηλαδή την σχέση των και την επίδρασή των επί της δημιουργίας, της λειτουργίας και της αρμονίας του κόσμου. Το γεγονός ότι διάφορα φυσικά φαινόμενα σχετίζονται με τον αριθμό επτά ή αριθμούν σε επτά, διήγειρε τις πρώτες σκέψεις περί των ιδιοτήτων και της ιερότητος αυτού του αριθμού. Πράγματι, η ιερότης του αριθμού επτά και οι επταδικές δοξασίες που ανεπτύχθησαν από τους Βαβυλωνίους, τους Χαλδαίους και τους ανατολικούς λαούς εν γένει, οι οποίες μετεδόθησαν στους Εβραίους, στους αρχαίους Έλληνες και αργότερον στον Χριστιανισμό, έχουν την αρχή των κυρίως εις το ουράνιο στερέωμα λ.χ. «τι έστι κόσμος; Επταπλανές κύκλωμα» (Ι. Ε. Καλιτσουνάκις, 1922, Επταδικαί Έρευναι, Αθήναι, σ. 59.

[2] Συστήματα συντεταγμένων δισδιάστατα και τρισδιάστατα υπάρχουν πολλά. Κανένα εξ αυτών των συστημάτων συντεταγμένων δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων της Πυθαγορείου μουσικής, διότι υπακούν στην λογική της γνωστής μας άλγεβρας και όχι στην λογική των πυθαγορείων μαθηματικών της μουσικής εις τα οποία –κατά τα γνωστά- η πρόσθεση των μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται με πολλαπλασιασμό, η αφαίρεση με διαίρεση των αριθμητικών τους σχέσεων.

ου θα πραγματοποιούνται μαθηματικές πράξεις με βάση τα Μαθηματικά, τα οποία διέπουν την Πυθαγόρειο μουσική[3]. Στην συγκεκριμένη δομή, την οποία εγώ μεν ονομάζω Σπυρίδειο δικτυωτό[4], ο Πλάτων δε την αποκαλεί ΚΟΣΜΟΝ, ο άξων των x είναι βαθμολογημένος εις μουσικά διαστήματα[5] διατεσσάρων (4/3) και ο άξων των y είναι βαθμολογημένος εις μουσικά διαστήματα διαπέντε (3/2). Τον ΚΟΣΜΟ δηλαδή ο Πλάτων τον δομεί με βάση την αριθμητική μεσότητα (3/2) και την αρμονικήν ή υπενάντιον ή ενάντιον μεσότητα (4/3) των οντοτήτων 1 (ταυτόν) και 2 (θάτερον), οι οποίες δομούν το μουσικό διάστημα της διαπασών (2/1), όπως φαίνεται από τα αποσπάσματα:

PROCL. in Tim. I 176, 27 Diehl
εἷς ἀποτελεῖται κόσμος ἐξ ἐναντίων ἡρμοσμένος,
Φιλόλαος, Testimonia, Fragment 9 line 3

τὸ τοῦ κόσμου σῶμα ἐγεννήθη δι'
ἀναλογίας
Πλ. Τίμ. Stephanus p. 32 section c line 1-2

κόσμῳ δὲ πάντα καὶ κατὰ λόγον
ἔχοντα
Πλάτων, Respublica, 500 c4-5.

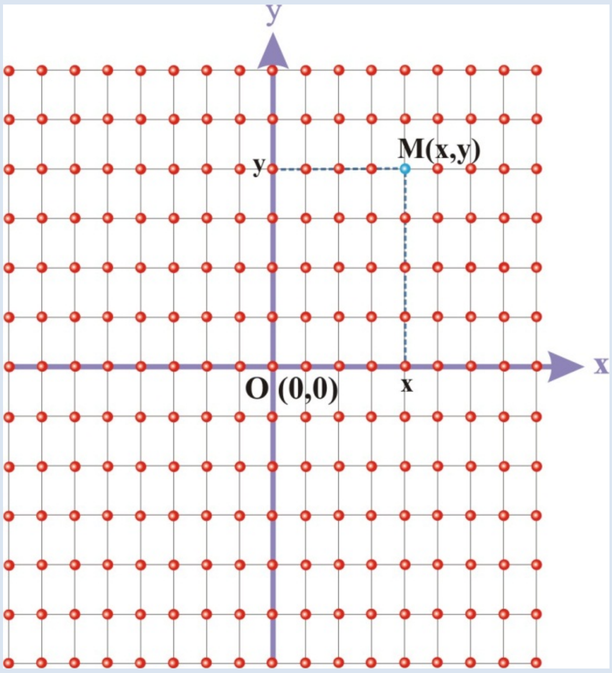
Έστω, λοιπόν μια δομή σημείων (κόμβων), ένα Σπυρίδειο δικτυωτό, ο κατά Πλάτωνα ΚΟΣΜΟΣ (Σχήμα 1.1), στον οποίο κατά τον άξονα x το βήμα (= η μικρότερη επιτρεπτή μετακίνηση) είναι ένα επίτριτο (4/3) διάστημα και κατά τον άξονα y το βήμα είναι ένα ημιόλιο (3/2) διάστημα. Αυτά σημαίνουν ότι ο ΚΟΣΜΟΣ κατά Πλάτωνα είναι δικτυωτός, αφού οι μετατοπίσεις γίνονται κατά ακέραιον αριθμόν βημάτων και ΜΟΝΟΝ. Το διάνυσμα του βήματος κατά τον άξονα x και του βήματος κατά τον άξονα y έχουν μέτρα $\left(\frac{4}{3}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}\right)$, αντιστοίχως, και τα εκλαμβάνω ως κάθετα μεταξύ τους, χωρίς αυτό να επηρεάζει σε κάτι το πρόβλημα.

---

[3] Διακεκριμένοι φιλόσοφοι της αρχαιότητος εστήριξαν ολόκληρα φιλοσοφικά συστήματα κοσμογονικών, μεταφυσικών και οντολογικών θεωριών επί των αριθμών, δηλαδή την σχέση των και την επίδρασή των επί της δημιουργίας, της λειτουργίας και της αρμονίας του κόσμου.

[4] Η έννοια απαντάται στην θεωρία των δικτυωτών, την οποία επενόησα για την επίλυση αλληγορικών αριθμητικών Πλατωνικών προβλημάτων, όπως το παρόν. Με την εν λόγω εντελώς πρωτότυπη θεωρία παρέχεται με ασφάλεια μια αυστηρώς μαθηματική θέαση της Πυθαγορείου μουσικής δια της οποίας επιτυγχάνεται η λύση του οποιουδήποτε θεωρητικού μουσικού προβλήματος με την πλέον λεπτή μέθοδο, με την συντομότερη ανάλυση, με την μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και καλαισθησία και, τέλος, τον μικρότερο πνευματικό κόπο. Κατ’ αυτήν την θεωρία ολόκληρη η Πυθαγόρειος Μουσική αντιμετωπίζεται επί των ευθέων και των αντιστρόφων δικτυωτών με μια νέα Επιπεδομετρία βρόχων και όχι συνεχούς επιπέδου, όπως είναι η Ευκλείδειος.

[5] Τα μουσικά διαστήματα στην εν λόγω δομή εκφράζονται ως λόγοι μηκών δονουμένων τμημάτων χορδής.



Σχήμα 1.1: Ένα μουσικό ύψος M(x,y) σε δικτυωτό,
το οποίο σε σχέση με ένα μουσικό ύψος αναφοράς O(0,0) σχηματίζει
ένα μουσικό διάστημα.

Ένας κόμβος M του ΚΟΣΜΟΥ με συντεταγμένες x και y (Σχήμα 1.1) συμβολίζεται ως $M\left(x,y\right)$ και παριστά το μουσικό ύψος

$$M(x,y)=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{y}\cdot O(0,0)$$

αφού υλοποιείται με την εκτέλεση x επιτρίτων και y ημιολίων μουσικών διαστημάτων σε σχέση με ένα αρχικό μουσικό ύψος O(0,0), το οποίο εκλαμβάνεται ως μουσικό ύψος αναφοράς.

Επί του Σπυριδείου δικτυωτού, αντιστοίχως, ο εν λόγω κόμβος M με συντεταγμένες x, y παριστά ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής, το οποίο υλοποιεί σε σχέση με ένα αρχικό δονούμενο τμήμα χορδής $L_0(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως δονούμενο τμήμα χορδής αναφοράς, το μουσικό διάστημα[6]

$$L_M(x,y)=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{y}\cdot L_0(0,0)$$

Να σημειωθεί ότι τα αριθμητικά βάρη των κόμβων στον ΚΟΣΜΟ εκφράζονται είτε δι’ ακεραίων, είτε δια μη ακεραίων αριθμών.

[6] Ένα μουσικό διάστημα εκφράζεται ως απόσταση μεταξύ δύο κόμβων του δικτυωτού.

2 Τα μαθηματικά εργαλεία για την λαβδοειδή λύση

2.1 Ειδικοί Βρόχοι

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο σχηματίζεται από τις δύο παραμέτρους του Σπυριδείου[7] δικτυωτού, ονομάζεται *βρόχος*. Το Σπυρίδειο δικτυωτό μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται με περιοδική μετατόπιση του βρόχου από τις δύο παραμέτρους του.

Ασχολούμενος με την επίλυση του Πλατωνικού προβλήματος επί του ***Σπυριδείου δικτυωτού*** ευρίσκεσαι αντιμέτωπος με ένα θαυμάσιο ***πρόβλημα της θεωρίας αριθμών,*** που είναι εξ ίσου διαχρονικό με ένα αληθινό έργο τέχνης και αισθάνεσαι την ανάγκη να αναφωνήσεις: «*Αυτά δεν είναι Μαθηματικά. Αυτά είναι Θεολογία!*».

Ονομάζομε **απλό βρόχο διπλασίων αριθμών**, αυτόν στον οποίον την κάτω αριστερή κορυφή κατέχει ένας αριθμός (x) και την αντιδιαγώνιόν του κορυφήν (επάνω δεξιά) κατέχει ο διπλάσιός του αριθμός (2x).

Ονομάζομε **σύνθετο βρόχο τριπλασίων αριθμών**, αυτόν στον οποίον την κάτω αριστερή κορυφή κατέχει ένας αριθμός (x) και την αντιδιαγώνιόν του κορυφήν (επάνω δεξιά) κατέχει ο τριπλάσιός του αριθμός (3x).

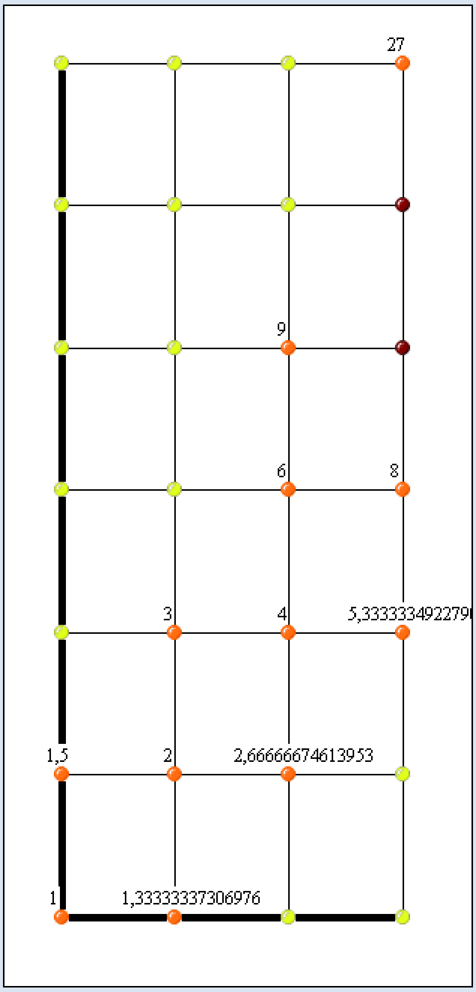
Ένας σύνθετος βρόχος τριπλασίων αριθμών δομείται με την υπέρθεση δύο απλών βρόχων διπλασίων αριθμών.

2.2 Προτάσεις μεσοτήτων (αριθμητικού και αρμονικού)

2.2.1 1η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

Σε κάθε απλό βρόχο διπλασίων αριθμών την δεξιόθεν της διαγωνίου (x-2x) κορυφήν (κάτω δεξιά) κατέχει ο αρμονικός των μέσος $\left(\frac{2\cdot x\cdot 2x}{x+2x}\right)=\frac{4}{3}\cdot x$ και την αντιδιαγώνιον αυτής κορυφήν (επάνω αριστερά) κατέχει ο αριθμητικός των μέσος $\left(\frac{x+2x}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot x$ (Σχήμα 2.2.1.1)

[7] Βλέπε Σπυρίδεια Δικτυωτά στο Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2006, σσ. 156-161.



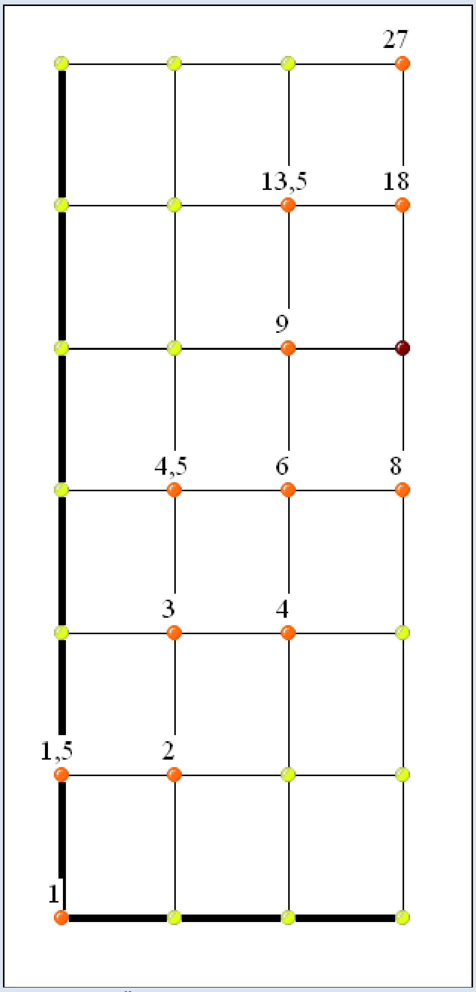
Σχήμα 2.2.1.1: 1η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

2.2.2 2η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

Σε κάθε σύνθετο βρόχο τριπλασίων αριθμών (x-3x) οι μέσοι (αρμονικός και αριθμητικός) αυτών ευρίσκονται επί της πλευράς, η οποία τον χωρίζει σε δύο απλούς βρόχους διπλασίων αριθμών και, συγκεκριμένως, επάνω από τον μικρότερο αριθμό (x) ευρίσκεται ο αρμονικός μέσος

$$\left(\frac{2\cdot x\cdot 3x}{x+3x}\right)=\frac{6\cdot x^2}{4\cdot x}=\frac{3}{2}\cdot x$$

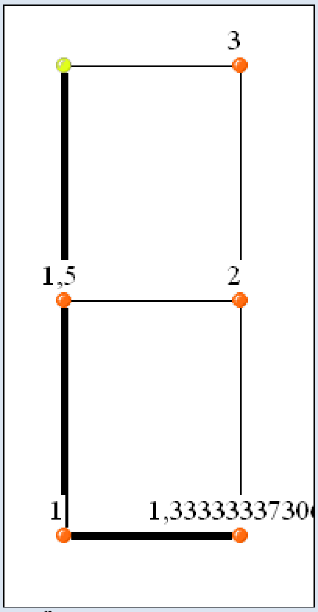
και κάτω από τον μεγαλύτερο (3x) ευρίσκεται ο αριθμητικός μέσος $\left(\frac{x+3x}{2}\right)=2\cdot x$ (Σχήμα 2.2.2.1)



Σχήμα 2.2.2.1: 2η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

2.2.3 3η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

Σε κάθε σύνθετο βρόχο τριπλασίων αριθμών (x-3x) (που δομείται με την υπέρθεση δύο απλών βρόχων διπλασίων αριθμών (x-2x)) ο αρμονικός μέσος αυτών (x-3x) συμπίπτει με τον αριθμητικό μέσο των αριθμών του κάτω απλού βρόχου διπλασίων αριθμών (x-2x) ο αριθμητικός μέσος αυτών (x-3x) συμπίπτει με τον μεγαλύτερο αριθμό του κάτω απλού βρόχου διπλασίων αριθμών (x-2x) (Σχήμα 2.2.3.1).



Σχήμα 2.2.3.1: $3^{η}$ Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

Αυτή είναι η πρόταση δια της οποίας ο Πλάτων προχωρεί στην επίλυση του προβλήματος «Γένεσις Ψυχής Κόσμου» και την οποία διατυπώνει ως εξής:

Έστωσαν δύο αριθμοί, οι οποίοι είναι, αντιστοίχως, ο διπλάσιος και ο τριπλάσιος ενός δοθέντος αριθμού. Εάν στο διπλάσιο διάστημα ληφθεί ο αριθμητικός μέσος των άκρων του, τότε:

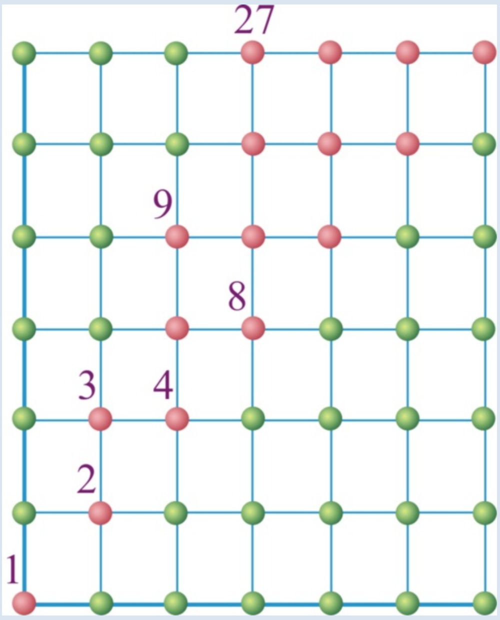
Αυτός ο αριθμητικός μέσος (στο διπλάσιο διάστημα) καθίσταται αρμονικός μέσος για το τριπλάσιο διάστημα.

Ο μεγαλύτερος των ακραίων αριθμών του διπλασίου διαστήματος καθίσταται αριθμητικός μέσος του τριπλασίου διαστήματος.

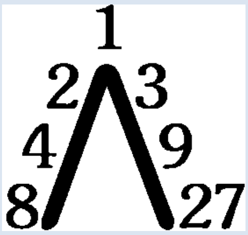
Δια της Ψυχής του Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού παρέχεται μεγίστη ευκολία υπολογισμού του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου δύο διπλασίων ή τριπλασίων αριθμών.

2.3. Κόσμος και Ψυχή

Προβληματιζόμενος με το τέλειο και απόλυτο γεωμετρικό σχέδιο του Κόσμου, εντός του οποίου, κατά τον ισχυρισμόν του Πλουτάρχου (1027 Ε 9), ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών (Σχήματα 2.3.1 και 2.3.2) και, βασιζόμενος επί της συμμετρίας, υποστηρίζω ότι το Σπυρίδειο δικτυωτό είναι ο κατά Πλάτωνα ΚΟΣΜΟΣ.



Σχήμα 2.3.1: Οι πρώτες τέσσερις τιμές των συναρτήσεων $\phi(x) = 2^x \quad x = 0,1,2,3$ και $\rho(y) = 3^y \quad y = 0,1,2,3$, οι οποίες δομούν την τετρακτύν του Πλάτωνος, με βάση την οποία αυτός δομεί την Ψυχή του Κόσμου στο «μουσικό χωρίο (35a1-36b6)» του διαλόγου του *Τίμαιος*.



Σχήμα 2.3.2: Το λαβδοειδές διάγραμμα του Αδράστου.

Πράγματι, επί του ΚΟΣΜΟΥ ο Πλάτων προσπαθεί να περιχαρακώσει ένα πεδίο τιμών, εντός του οποίου θα ευρίσκονται οι **ακέραιες** λύσεις του προβλήματός του και οι λύσεις του οποιουδήποτε προβλήματος της Πυθαγορείου μουσικής. Το πεδίο αυτό των ακεραίων τιμών –η κατά Πλάτωνα ΨΥΧΗ- είναι η τριγωνικής μορφής περιοχή του Σπυριδείου δικτυωτού, η οποία έχει κορυφή επί του κόμβου αναφοράς και πλευρές καθοριζόμενες από τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$\phi(x) = 2^x \quad x = 0,1,2,3,\ldots \text{ και } \rho(y) = 3^y \quad y = 0,1,2,3,\ldots$$

Με δύο τετρακτύες (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) –μία εξ εκάστης γεννητρίου συναρτήσεως- ο Πλάτων δομεί την μεγίστη τετρακτύν του 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 δια της οποίας μας υποδεικνύει τα όρια της Ψυχής του Κόσμου[8] (Σχήμα 2.3.1).

2.4 Διαστηματική ανάλυση βρόχου

Όπως έχει ήδη λεχθεί, κάθε κόμβος της Ψυχής Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού εκφράζεται δι ενός ακεραίου Πυθαγορείου αριθμού και παριστά ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής. Μετακίνηση από κόμβου εις κόμβον του Σπυριδείου δικτυωτού εκφράζει ένα μουσικό διάστημα, το οποίο υπολογίζεται από τον λόγο του αριθμού του κόμβου αφίξεως δια του αριθμού του κόμβου εκκινήσεως $\left(\frac{L_{αφίξεως}}{L_{εκκινήσεως}}\right)$.

Μετακίνηση από κόμβο μικρού αριθμού προς κόμβο μεγαλυτέρου αριθμού σημαίνει μετακίνηση από μικρό μήκος δονουμένου τμήματος χορδής προς μεγαλύτερο, δηλαδή εκτέλεση ενός καθοδικού μουσικού διαστήματος[9].

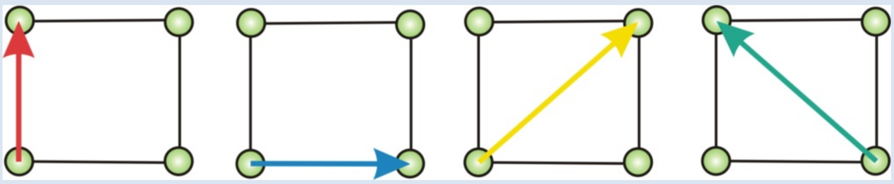
Οι στοιχειώδεις μετακινήσεις μεταξύ των κόμβων του Σπυριδείου δικτυωτού πραγματοποιούνται εντός ενός απλού βρόχου διπλασίων αριθμών (x-2x) και είναι οι:

- Μετακίνηση κατακορύφως μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων συνεπάγεται εκτέλεση ενός διαπέντε διαστήματος ανιόντος ή κατιόντος, αναλόγως της σχέσεως των αριθμών του κόμβου εκκινήσεως και του κόμβου αφίξεως.

- Μετακίνηση οριζοντίως μεταξύ των δύο διαδοχικών κόμβων συνεπάγεται εκτέλεση ενός διατεσσάρων διαστήματος.

- Μετακίνηση μεταξύ των κόμβων των δύο διπλασίων αριθμών συνεπάγεται εκτέλεση ενός διαστήματος διαπασών.

- Μετακίνηση μεταξύ των κόμβων της άλλης διαγωνίου του απλού βρόχου διπλασίων αριθμών συνεπάγεται εκτέλεση ενός επογδόου διαστήματος.



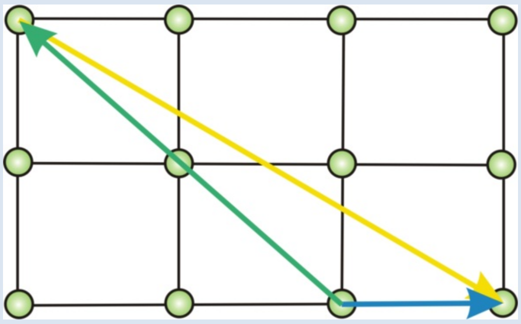
Σχήμα 2.4.1: Η γραφική παρουσίαση των τεσσάρων δυνατών κινήσεων μεταξύ των κόμβων ενός απλού βρόχου διπλασίων αριθμών.

[8] Ο Πλάτων, ως Πυθαγόρειος (Οἱ Πυθαγορικοὶ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων, Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10), πιστεύει ότι όλο το σύμπαν είναι «αρμονία και αριθμός», ότι η ψυχή γίνεται αντιληπτή ως «αρμονία», ως ευταξία, δηλαδή ένα σύστημα καλώς συντονισμένο με την συμπαντική αρμονία, ήτοι τον «κόσμο».

[9] Μήκος δονουμένου τμήματος χορδής και συχνότητα παραγομένου ήχου είναι μεγέθη αντίστροφα.

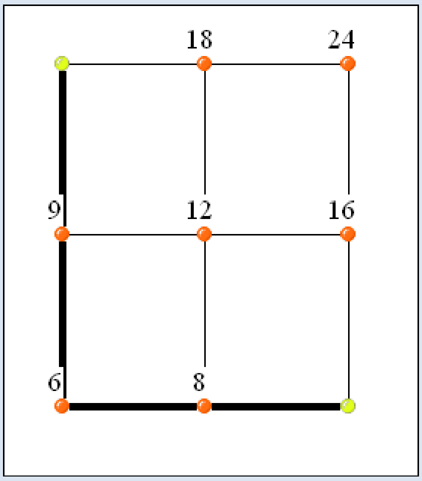
Οι μετακινήσεις μεταξύ κόμβων συνθετωτέρων βρόχων εκφράζουν μουσικά διαστήματα, το μέγεθος των οποίων προκύπτει δια της διανυσματικής συνθέσεως (προσθέσεως) ωρισμένων εκ των στοιχειωδών μετακινήσεως (διανυσμάτων) εντός του Σπυριδείου δικτυωτού.

Παράδειγμα 2.4.1. Του πυθαγορείου διτόνου (πυθαγόρειος τόνος+πυθαγόρειος τόνος, πράσινο διάνυσμα στο σχήμα 2.4.2) προστιθεμένου εις το διατονικόν ημίτονον ή λείμμα (κίτρινο διάνυσμα), γεννάται το διατεσσάρων (μπλε διάνυσμα).



Σχήμα 2.4.2: Διανυσματική πρόσθεση μουσικών διαστημάτων επί του Σπυριδείου δικτυωτού.

Παράδειγμα 2.4.2. Έστω το σχήμα 2.4.3, όπου παρουσιάζεται ένα τμήμα της Ψυχής του Κόσμου.



Σχήμα 2.4.3: Διαστηματική ανάλυση βρόχου.

Η μετακίνηση από τον κόμβο 6 στον κόμβο 24 ισοδυναμεί με ένα κατιόν ασύνθετο διάστημα μιας δις διαπασών. Τούτο το διάστημα, εάν αντιμετωπισθεί ως σύνθετο εκ κατιόντων ΜΟΝΟΝ διαστημάτων, θα μπορούσε να εκτελεσθεί με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους, το πλήθος των οποίων μπορεί να υπολογισθεί με βάση την θεμελιώδη αρχή της απαριθμήσεως ή την πολλαπλασιαστική αρχή[10] ως εξής:

Το πλήθος των τρόπων μεταβάσεως από τον κόμβο 6 στον κόμβο 24 μέσω του κόμβου 12 ισούται με το πλήθος των τρόπων μεταβάσεως από τον κόμβο 6 στον κόμβο 12 επί το πλήθος των τρόπων μεταβάσεως από τον κόμβο 12 στον κόμβο 24.

Από τον κόμβο 6 στον κόμβο 12 μπορούμε να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων με τους εξής 3 τρόπους:

6-12 διαπασών
6-8-12 διατεσσάρων+διαπέντε
6-9-12 διαπέντε+διατεσσάρων

[10] Αυτόθι, σελ. 95.

Από τον κόμβο 12 στον κόμβο 24 μπορούμε να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων με τους εξής 3 τρόπους:

12-24 διαπασών

12-16-24 διατεσσάρων+διαπέντε

12-18-24 διαπέντε+διατεσσάρων

Ώστε, από τον κόμβο 6 στον κόμβο 24 μπορούμε να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων με τους εξής $3 \cdot 3 = 9$ τρόπους:

6-12-24

6-12-16-24

6-12-18-24

6-8-12-24

6-8-12-16-24

6-8-12-18-24

6-9-12-24

6-9-12-16-24

6-9-12-18-24

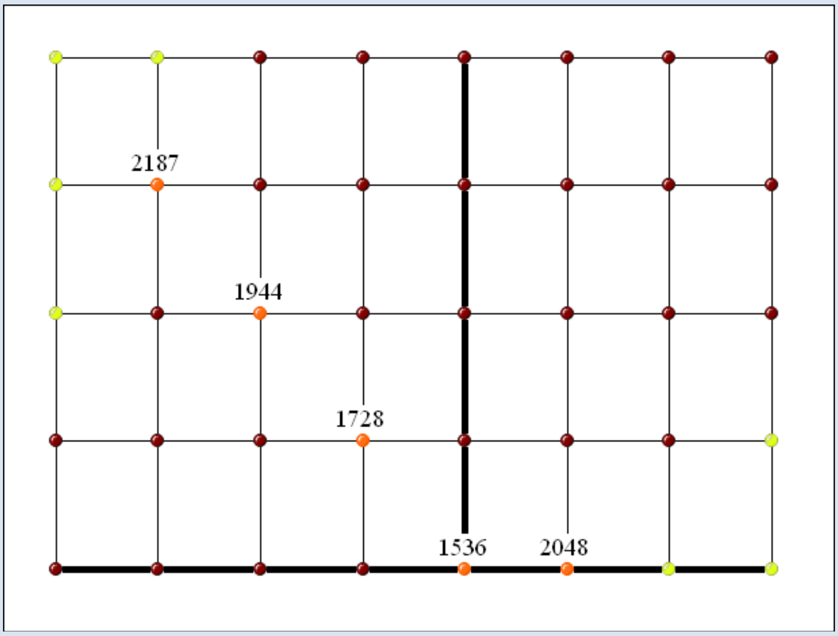
Από τον κόμβο 12 στον κόμβο 24 μπορούμε επίσης να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων χωρίς να διέλθωμε εκ του κόμβου 12 με τους εξής 2 τρόπους:

6-8-16-24 διατεσσάρων+διαπασών+διαπέντε

6-9-18-24 διαπέντε+διαπασών+διατεσσάρων

Εν κατακλείδι, από τον κόμβο 6 στον κόμβο 24 μπορούμε να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων με τους ανωτέρω 11 τρόπους.

Παράδειγμα 2.4.3. Έστω το σχήμα 2.4.4, όπου παρουσιάζεται ένα άλλο τμήμα της Ψυχής του Κόσμου.



Σχήμα 2.4.4: Διαστηματικαί κινήσεις εντός της Ψυχής του Κόσμου.

Η μετακίνηση από τον κόμβο 1536 στον κόμβο 2048 ισοδυναμεί με ένα κατιόν διατεσσάρων διάστημα. Τούτο το διάστημα μπορεί να συντεθεί ως 1536-1728-1944-2048, δηλαδή επόγδοος τόνος- επόγδοος τόνος-λείμμα (δομή Δωρίου τετραχόρδου).

Η μετακίνηση από τον κόμβο 1944 στον κόμβο 2187 ισοδυναμεί με το κατιόν διάστημα ενός επογδόου τόνου. Τούτο το διάστημα μπορεί να συντεθεί ως 1944-2048-2187, δηλαδή λείμμα+αποτομή μείζονος τόνου.

3. Το Πλατωνικό Λάβδωμα.

3.1 Η μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος κατά την λαβδοειδή διαδικασία.

Έχει λεχθεί ότι το χωρίο 35α1-36b6 του Τιμαίου, γνωστό και ως «μουσικό χωρίο», αναφέρεται στην δημιουργία και την σύσταση της Ψυχής Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου, διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία.

Στην προηγούμενη εργασία μου, η οποία εδημοσιεύθη στην επετηρίδα της Φιλοσοφικής Σχολής, όπως προανεφέρθη, είχα ασχοληθεί με την γραμμική ή Θεοδώρειο λύση του εν λόγω προβλήματος.

Ὁ γὰρ Θεόδωρος, … , ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐφεξῆς τούς τε
διπλασίους ἐκτάττων καὶ τοὺς τριπλασίους

Κράντωρ, Σπαράγματα, Σπάραγμα 6, γρ. 8-10

Τώρα θα εκτεθεί αναλυτικώς και με την πρέπουσα τεκμηρίωση η Σπυρίδειος λύση του προβλήματος «*περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου*» επί του Σπυριδείου δικτυωτού, η οποία οδηγεί αποκλειστικώς στην χρήση Δωρίων τετραχόρδων (τόνος-τόνος-λείμμα) κατά την κατιούσα διαδοχή κατά την λαβδοειδή διαδικασία.

Πρέπει να τονισθεί ότι περί της λαβδοειδούς λύσεως υπάρχουν δύο αναφορές. Η μία από τον Κλέαρχο

τοῖς δὲ περὶ τὸν Κράντορα βοηθοῦσιν αἵ τε θέσεις τῶν ἀριθμῶν, ἐπιπέδων ἐπιπέδοις καὶ τετραγώνων τετραγώνοις καὶ κύβων κύβοις ἀντιθέτως συζυγούντων, τῇ τε μὴ κατὰ τάξιν αὐτῶν λήψει, ἀλλ᾽ ἐναλλὰξ ἀρτίων καὶ [δευτέρα] περιττῶν

Κλέαρχος, *Σπαράγματα*, Σπάρεγμα 4, γρ. 12-15.

και η άλλη από τον Κράντορα

Τοῖς δὲ περὶ τὸν Κράντορα βοηθοῦσιν αἵ τε θέσεις τῶν ἀριθμῶν, ἐπιπέδων ἐπιπέδοις, καὶ τετραγώνων τετραγώνοις, καὶ κύβων κύβοις ἀντιθέτως συζυγούντων, τῇ τε μὴ κατὰ τάξιν αὐτῶν λήψει, ἀλλ' ἐναλλὰξ ἀρτίων καὶ ἐπιπέδων ἀρτίοις καὶ ἐπιπέδοις ἀντιθέτῳ συζυγίᾳ.

Περὶ δὲ τῆς τάξεως (ζητεῖται), πότερον ἐφ' ἑνὸς στίχου πάντας ἐκθετέον, ὡς Θεόδωρος· ἢ μᾶλλον, ὡς Κράντωρ, ἐν τῷ Λ σχήματι, τοῦ πρώτου κατὰ κορυφὴν τιθεμένου, καὶ χωρὶς μὲν τῶν διπλασίων, χωρὶς δὲ τῶν τριπλασίων ἐν δυσὶ στίχοις ὑποταττομένων.

Κράντωρ, Σπαράγματα, Σπάραγμα 6, γρ. 17- Σπάραγμα 7, γρ. 6

Λέει, λοιπόν, ο Πλατωνικός αλγόριθμος:

…τῆς ἀμερίστου
καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταὐτοῦ φύσεως [αὖ πέρι] καὶ τῆς τοῦ
ἑτέρου, καὶ κατὰ ταὐτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ

Πλάτωνος *Τίμαιος* (35 α, 1-6)

Κατά το απόσπασμα (35a5-b1) ανέμειξε την ουσία του ταυτού, (αμερούς, αμεταβλήτου) με την ουσία του ετέρου (μεριστού, μεταβλητού) και εδημιούργησε τρίτη ουσία σε σχέση πάλι με την φύση του ταυτού και του θατέρου. Επειδή στα *Θεολογούμενα της Αριθμητικής* του Ιαμβλίχου με την έννοια **σύνθεσις** υπονοείται η πράξη της προσθέσεως και με την έννοια **ανάμειξις** υπονοείται η πράξη του πολλαπλασιασμού, πολλαπλασιάζοντας, λοιπόν, ο θεός την ουσία του ταυτού, δηλαδή τον αρμονικό μέσο, επί την ουσίαν του θατέρου, δηλαδή

τον αριθμητικόν μέσο, εδημιούργησε την τρίτη ουσία, η οποία τιθεμένη ανάμεσα στις δύο προηγούμενες ουσίες, δομεί μία συνεχή αναλογία ως ακολούθως:

$$\frac{2\cdot x\cdot y}{x+y}\cdot\frac{x+y}{2}=x\cdot y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\alpha\rho\mu o\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma)\cdot(\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma)=x\cdot y$$

Η σχέση αυτή με ωδήγησε στη διατύπωση της θεωρίας των δικτυωτών.

Τώρα ο Πλάτων διαθέτει ένα υλικό, τους αριθμούς, τους οποίους θα ταξινομήσει και θα συσχετίσει με βάση τις αναλογίες, διότι ταξινομών το υλικό του, το καθιστά κτήμα του.

Εν συνεχεία ο Πλάτων παρουσιάζει την κατανομή των μερών του μείγματος βάσει του αλγορίθμου του και θέτει το μαθηματικό – αρμονικό πρόβλημα, το οποίο καλούμεθα να επιλύσουμε λαβδοειδώς.

Αφού ανακάτεψε το μεριστόν με το αμέριστον και με την ουσία και, αφού από τρία έκανε ένα, μοίρασε[11] ξανά το σύνολο αυτό στα κατάλληλα μερίδια, που το καθένα τους ήταν μείγμα από το ταυτό, το θάτερο και την ουσία. Άρχισε το μοίρασμα με τις εξής επτά ενέργειες:

ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς
μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ
τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης,
τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλῆν, πέμπτην δὲ τριπλῆν τῆς
τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ'
ἑπτακαιεικοσιπλασίαν τῆς πρώτης·

(35 b4-c2)

Αφήρεσε (ο Δημιουργός) από το όλον (το μείγμα) ένα μέρος (1),
μετά αφήρεσε το διπλάσιο αυτού (2),
μετά αφήρεσε ένα κομμάτι μιάμιση φορά το δεύτερο, δηλαδή τριπλάσιο του πρώτου (3),
μετά αφήρεσε ένα κομμάτι διπλάσιο του δευτέρου (4),
μετά αφήρεσε το τριπλάσιο του τρίτου (9),
μετά αφήρεσε ένα κομμάτι οκταπλάσιο του πρώτου (8) και
μετά αφήρεσε ένα κομμάτι εικοσιεπταπλάσιο του πρώτου (27).

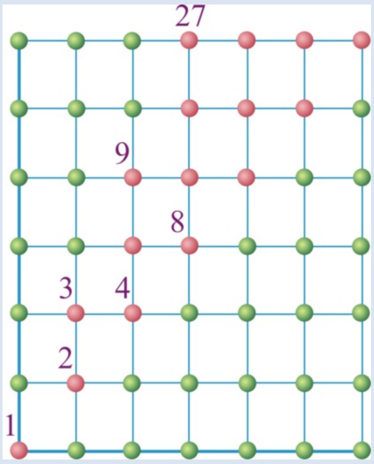
Από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος προκύπτουν οι αριθμοί του Πίνακα 3.1.1, οι οποίοι ορίζουν την Ψυχή Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού του σχήματος 3.1.1.

---

[11] Ο Πρόκλος γι’ αυτήν την ενέργεια διερωτώμενος (Πῶς δὲ μοίρας ἀφαιρεῖν τῆς ἀμερίστου κατ’ οὐσίαν;) επισημαίνει: Τούτο σημαίνει ότι το υλικό από την ανάμειξη του ταυτού, του θατέρου και της ουσίας είναι μεριστό. Ο δημιουργός εδόμησε την ψυχή σε ένα όλον προτού αρχίσει να την διαιρεί. Έτσι, λοιπόν, δεν χάνεται η ολότητα καθώς υφίστανται τα μέρη της, αλλά εξακολουθεί να υπάρχει και να προηγείται των μερών της. 199 D9-13.

Πίνακας 3.1.1: Οι αριθμοί από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος.

1	**2**	**3**	**4**	**9**	**8**	**27**
1	**2**	**3**	**2^2**	**3^2**	**2^3**	**3^3**
			Τετράγωνοι[12] αριθμοί		Κύβοι[13] αριθμοί	



Σχήμα 3.1.1: Οι αριθμοί από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος τοποθετημένοι επί του Σπυριδείου δικτυωτού.

Πρόκειται για τους επτά αριθμούς της μεγάλης τετρακτύος, που, όπως παρετήρησαν αρχαίοι σχολιαστές με πρώτον τον Κράντορα, δομείται από τη συνένωση της γεωμετρικής σειράς 1, 2, 4, 8 με πρώτον όρο την μονάδα και γενήτορα το 2 και της γεωμετρικής σειράς 1, 3, 9, 27 με πρώτον όρο την μονάδα και γενήτορα το 3. Η παρατήρηση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική και χαρακτηρίζει από παλιά όλα τα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα, με την έννοια ότι ένα μουσικό διάστημα χαρακτηρίζεται ως Πυθαγόρειο μόνον, όταν εκφράζεται ως γινόμενο δυνάμεων με βάση το 2 ή/και το 3, δηλαδή με τη μορφή $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \quad \kappa, \lambda \in Z$.

Σχολιάζοντας τη σειρά με την οποία παρουσιάζει ο Πλάτων τους αριθμούς της μεγάλης τετρακτύος, δηλαδή πρώτα τη μονάδα, μετά το 2, μετά το 3, μετά τα τετράγωνα του 2 και του 3 και μετά τους κύβους αυτών – καταλήγομε ότι αυτή συνηγορεί υπέρ:

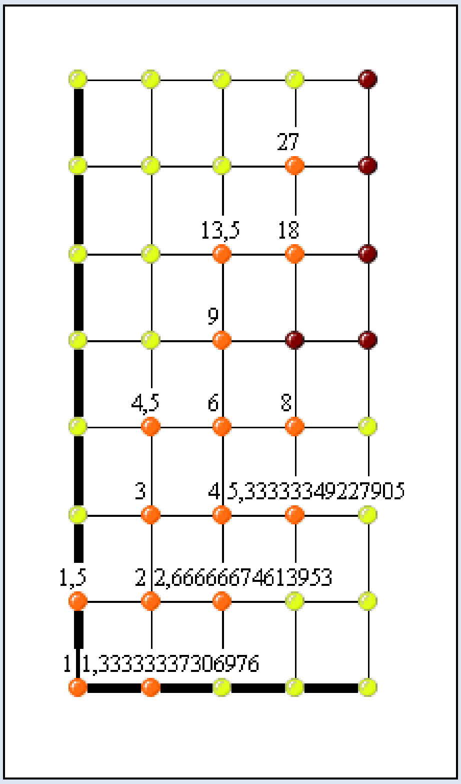
- της ενεργείας των μαθητών του Πλάτωνος, του Αδράστου και του Κράντωρος, οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος, να τοποθετούν λαβδοειδώς τους αριθμούς, δηλαδή να βάζουν επί του ενός σκέλους τους αρτίους και επί του άλλου σκέλους τους περιττούς αριθμούς και εις την κορυφή του Λ τη μονάδα (Σχήμα 3.1.1).
- του ισχυρισμού του Πλουτάρχου (1027 E 9) ότι ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών για τη λύση του εν λόγω προβλήματος.
- της δηλώσεως του Πρόκλου (*Εις τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5) «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ».

[12] Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.
Ευκλείδου, *Στοιχείων* ζ.

[13] Κύβος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.
Αυτόθι.

Όλα τα ανωτέρω με ωδήγησαν στη διατύπωση της θεωρίας των δικτυωτών.

Στη συνέχεια ο Πλάτων μας παραγγέλλει τα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα να τα συμπληρώσουμε με τις αρμονικές και τις αριθμητικές μεσότητες. Η εντολή εκτελείται με τη χρήση των $1^{ης}$, $2^{ης}$ και $3^{ης}$ Σπυριδείων προτάσεων των μεσοτήτων (Σχήμα 3.1.2).

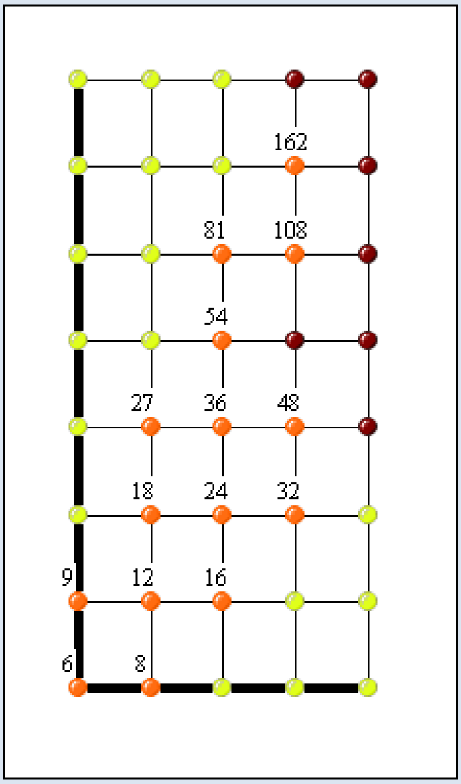


Σχήμα 3.1.2: Η ένθεση αρμονικών και αριθμητικών μεσοτήτων
στα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα.

Παρατηρούμε ότι με την ένθεση των αριθμητικών και αρμονικών μεσοτήτων κάποιοι κόμβοι και συγκεκριμένως οι 1,33 1,5 2,66 4,5 5,33 13,5 ευρίσκονται (ως μη έχοντες αριθμητικό βάρος ακέραιο αριθμό) εκτός της Ψυχής του Κόσμου. Μετακινώντας όλους τους κόμβους κατά ένα κατιόν διάστημα ενός δις διαπασών+διαπέντε, καθίστανται για πρώτη φορά και αυτοί οι κόμβοι **κόμβοι της Ψυχής του Κόσμου**. Τώρα έχομε να διαχειρισθούμε τους κόμβους της Ψυχής του Κόσμου που δείχνει το σχήμα 3.1.3.

Ας σχολιάσομε την σημασία της μετακινήσεως των συγκεκριμένων κόμβων κατά ένα κατιόν διάστημα ενός δις διαπασών+διαπέντε. Τούτο σημαίνει ότι οι αριθμητικές τιμές των κόμβων πολλαπλασιάζονται επί $\left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{4}{1}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{6}{1}\right)$, δηλαδή οι αριθμητικές τιμές των συγκεκριμένων κόμβων εξαπλασιάζονται. Αυτούς τους συγκεκριμένους κόμβους υπονοεί ο Άδραστος κατά την ρήση του Πρόκλου ότι περιέχει το δεύτερο τρίγωνο του τριπλού λαβδοειδούς σχήματος « Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἑξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότητας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον».

Πρόκλου Εις τον Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-9



Σχήμα 3.1.3: Μετατροπή σε κόμβους της Ψυχής του Κόσμου των εντεθεισών αρμονικών και αριθμητικών μεσοτήτων των διπλασίων και τριπλασίων διαστημάτων δια μετακινήσεώς των κατά ένα κατιόν διάστημα δις διαπασών+διαπέντε.

Τώρα θα πρέπει στη σειρά των αριθμών του Σχήματος 2.1.3 τα διαστήματα των όρων, που έχουν λόγο επίτριτο, να τα διαιρέσουμε σε επογδόους τόνους και σε λείμματα. Προς τούτοις θα εφαρμόσομε διαδικασίες από την διαστηματική ανάλυση του βρόχου. Οι κόμβοι που σχηματίζουν μουσικό διάστημα διατεσσάρων ή, ισοδυνάμως, έχουν λόγο επίτριτο είναι οι: 6-8, 9-12, 12-16, 18-24, 24-32, 27-36, 36-48 και 81-108.

Ως γνωστόν, ένα επίτριτο διάστημα απαρτίζεται από δύο επογδόους τόνους και ένα λείμμα. Πρέπει να τονισθεί με έμφαση ότι ο Πλάτων δεν καθορίζει την αλληλουχία των τριών αυτών διαστημάτων εντός του επιτρίτου διαστήματος. Έτσι, είμεθα υποχρεωμένοι, για την πλήρη λύση του Πλατωνικού προβλήματος, να αντιμετωπίσουμε το επίτριτο διάστημα σε όλες του τις διαστηματικές δομές, ήτοι την Δώριο (τ-τ-λ), την Φρύγιο (τ-λ-τ) και την Λύδιο (λ-τ-τ). Η σημειούμενη αλληλουχία των τριών διαστημάτων εντός του επιτρίτου διαστήματος είναι κατά την κατιούσα διαδοχή.

3.1.1 Εντοπισμός των αποτομών μείζονος τόνου

Πιθανώς ο μελετητής να διερωτάται πώς θα γνωρίζει εάν πρέπει να τοποθετήσει διαστήματα αποτομής μείζονος τόνου και σε ποιές θέσεις θα τα τοποθετήσει.

Το διάγραμμα εκ της αναλύσεως των επιτρίτων διαστημάτων καθεαυτων εις επογδόους τόνους και λείμματα ή των επιτρίτων διαστημάτων, τα οποία προέρχονται από την ανάλυση των ημιολίων διαστημάτων (επόγδοος τόνος + επίτριτο διάστημα ή επίτριτο διάστημα + επόγδοος τόνος) θα τον καθοδηγεί ως εξής:

Κάθε αναλελυμένο επίτριτο διάστημα σε δύο επογδόους τόνους και ένα λείμμα (με την πρέπουσα αλληλουχία, αναλόγως του τρόπου στον οποίον ανήκει, δηλαδή Δώριο, Φρύγιο, Λύδιο) παρίσταται ως μια τεθλασμένη γραμμή τριών ευθυγράμμων τμημάτων. (Βλέπε παράδειγμα 2.4.1 Κεφάλαιο 2.4 Διαστηματική ανάλυση βρόχου).

Συνεχής τεθλασμένη γραμμή δύο αναλελυμένων επιτρίτων διαστημάτων παριστά δύο συνημμένα τετράχορδα.

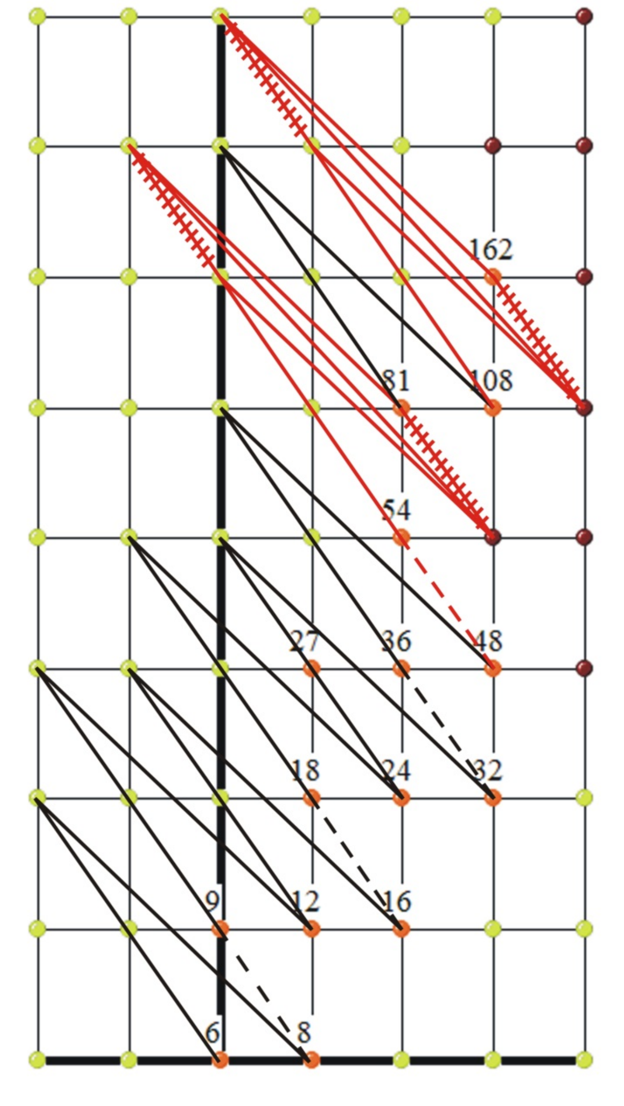
Δύο τεθλασμένες γραμμές, δύο αναλελυμένων επιτρίτων διαστημάτων, διαχωριζόμενες από ένα επόγδοο διάστημα, παριστούν δύο διεζευγμένα τετράχορδα, εις τα οποία το επόγδοο διάστημα του διαχωρισμού παριστά τον διαζευκτικό τόνο. (Βλέπε διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 3.1.1.1).

Από την συνένωση τεθλασμένων γραμμών δύο επιτρίτων διαστημάτων, τα οποία, είτε είναι εμπεπλεγμένα έχοντας ένα κοινό διάστημα ενός τριημιτόνου (επόγδοος τόνος+λείμμα), είτε είναι διεζευγμένα και σχηματίζεται με το χαμηλότερο εξ αυτών ένα συνημμένο επίτριτο διάστημα, δυνατόν να σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο. Το παραλληλόγραμμο αυτό στο σχήμα πάντοτε έχει μεγάλη πλευρά ίση με ένα λείμμα, μικρή πλευρά ίση με ένα επόγδοο διάστημα και μεγάλη διαγώνιο ίση με μια αποτομή μείζονος τόνου.

Όπου σχηματίζεται παραλληλόγραμμο:

- αντικαθιστούμε την επάνω μικρή πλευρά του παραλληλογράμμου (επόγδοος τόνος) από την αλληλουχία της μεγάλης του πλευράς (λείμμα) και της μεγάλης του διαγωνίου (αποτομή μείζονος τόνου), οι οποίες εκκινούν εκ των άκρων της,
- αγνοούμε την ύπαρξη **και** της άλλης μικρής πλευράς του παραλληλογράμμου (επόγδοος τόνος).

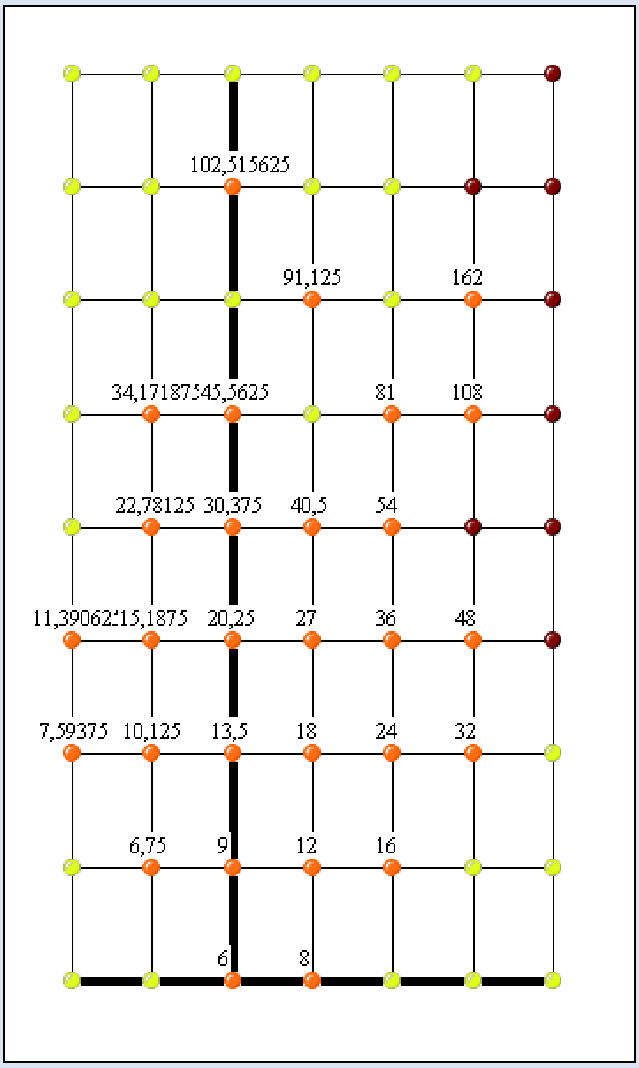
Όλα τα ανωτέρω παρουσιάζονται στο σχήμα 3.1.1.1, το οποίο παριστά την ανάλυση των επιτρίτων διαστημάτων σε επόγδοο τόνο, σε επόγδοο τόνο και σε λείμμα (Δώριο τετράχορδο κατά την κατιούσα διαδοχή).



Σχήμα 3.1.1.1: Ανάλυση των επιτρίτων διαστημάτων σε επόγδοο τόνο, σε επόγδοο τόνο και σε λείμμα (Δώριο τετράχορδο κατά την κατιούσα διαδοχή) για τον εντοπισμό των πιθανών υπαρχουσών αποτομών μείζονος τόνου εις τη δομή της Ψυχής του Κόσμου.

3.2 Λαβδοειδής λύση του Πλατωνικού προβλήματος «Γένεσις Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή.

Αναλύοντες τα μνημονευθέντα διατεσσάρων μουσικά διαστήματα 6-8, 9-12, 12-16, 18-24, 24-32, 27-36, 36-48 και 81-108 σε δύο επογδόους τόνους και ένα λείμμα κατά το παράδειγμα 2.4.1 και το σχήμα 2.4.2 (Δώρια τετράχορδα κατά την κατιούσα διαδοχή), προκύπτουν οι κόμβοι του Σχήματος 3.2.1.



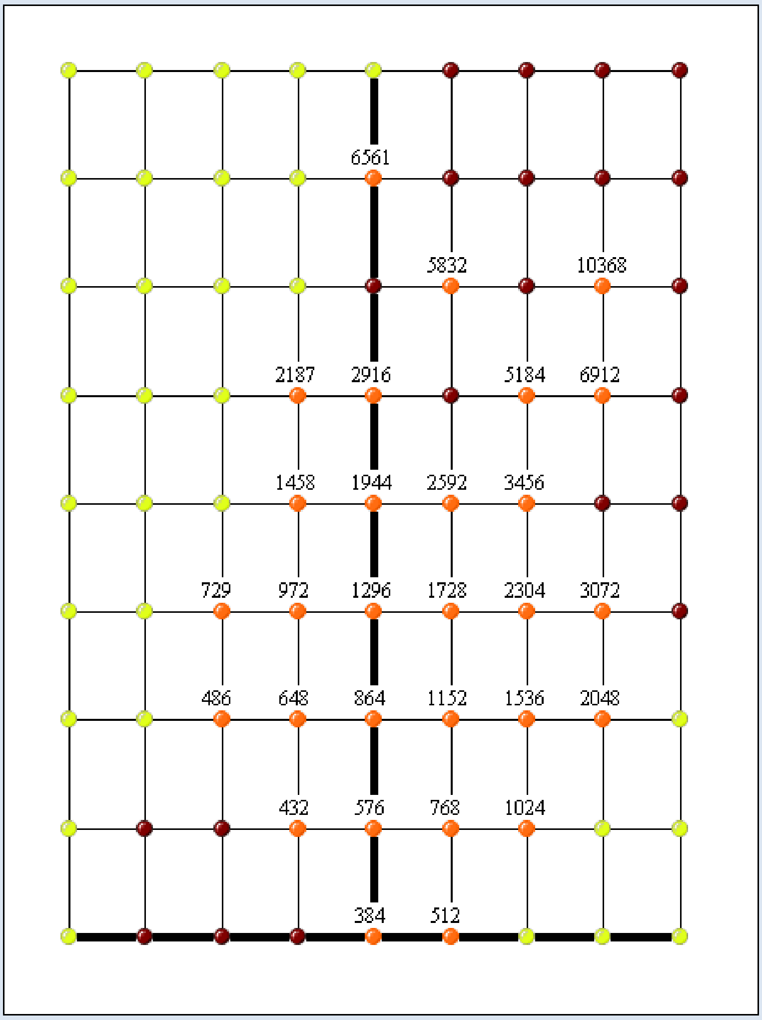
Σχήμα 3.2.1: Ανάλυση των διαστημάτων διατεσσάρων σε επογδόους τόνους και λείμματα.

Παρατηρούμε ότι με την ανάλυση όλων των διατεσσάρων μουσικών διαστημάτων σε δύο επογδόους τόνους και ένα λείμμα προκύπτουν πάλι κάποιοι κόμβοι με μη ακεραία τιμή. Αυτοί οι κόμβοι δεν ανήκουν στην Ψυχή του Κόσμου. Μετακινώντας, όμως, όλους τους προκύψαντες κόμβους κατά ένα κατιόν διάστημα έξι (6) διαπασών, καθίστανται για πρώτη φορά και αυτοί οι κόμβοι **κόμβοι της Ψυχής του Κόσμου**.

Ας σχολιάσομε την σημασία της μετακινήσεως των συγκεκριμένων κόμβων κατά ένα κατιόν διάστημα έξι διαπασών. Τούτο σημαίνει ότι οι αριθμητικές τιμές των κόμβων πολλαπλασιάζονται επί $\left(\frac{2}{1}\right)^6 = 64$, δηλαδή οι αριθμητικές τιμές των συγκεκριμένων κόμβων εξηκοντατετραπλασιάζονται. Αυτούς τους συγκεκριμένους κόμβους υπονοεί ο Άδραστος κατά την ρήση του Πρόκλου ότι περιέχει το εξώτατο τρίγωνο του τριπλού λαβδοειδούς σχήματος « Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἑξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότητας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξωτάτῳ τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».

Πρόκλου Εις τον Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-12

Τώρα έχομε να διαχειρισθούμε τους κόμβους της Ψυχής του Κόσμου, που δείχνει το σχήμα 3.2.2.



Σχήμα 3.2.2: Μετατροπή όλων των μέχρι στιγμής κόμβων σε κόμβους της Ψυχής του Κόσμου δια της μετακινήσεώς των κατά ένα κατιόν διάστημα έξι διαπασών.

Μεταξύ των κόμβων του σχήματος 3.2.2 σχηματίζονται διαστήματα επογδόων τόνων, λειμμάτων, ο επόγδοος τόνος 1944-2187 ανελύθη σε λείμμα 1944-2048 και σε αποτομή μείζονος τόνου 2048-2187. Υπάρχουν ακόμη και δύο διαστήματα διαπέντε (3456-5184 και 6912-10368).

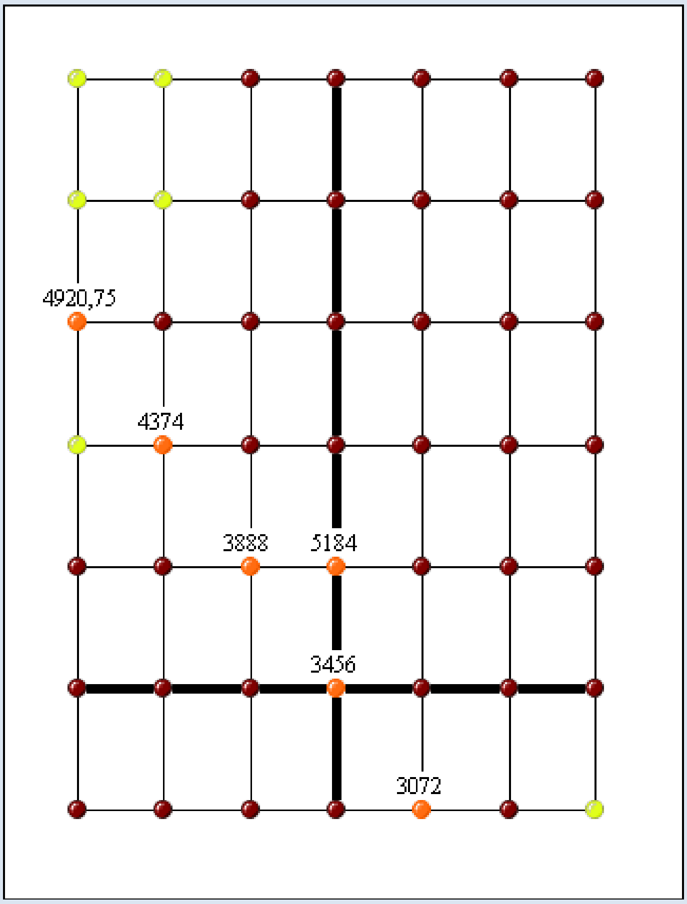
Για τα διαστήματα διαπέντε δεν κάνει μνεία ο Πλάτων. Ο Πλούταρχος στο κεφάλαιο 19 λέει ότι ο Πλάτων τα παρέλειψε. Εγώ ισχυρίζομαι ότι τα παρέλειψε, επειδή είναι ευκολονόητο[14] το τί θα πρέπει να κάνουμε. Πράγματι, το διάστημα διαπέντε ισούται με ένα διάστημα διατεσσάρων συν έναν επόγδοο τόνο ή έναν επόγδοο τόνο συν ένα διάστημα διατεσσάρων.

[14] Και όμως σε αυτό το σημείο συμβαίνουν τα λάθη στους υπολογισμούς όλων των αρχαιοελλήνων, που ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο πρόβλημα, μηδέ του Τιμαίου του Πυθαγορείου εξαιρουμένου.

3.2.1 Μελέτη της δομής του πρώτου ημιολίου διαστήματος μεταξύ των όρων 3456 και 5184

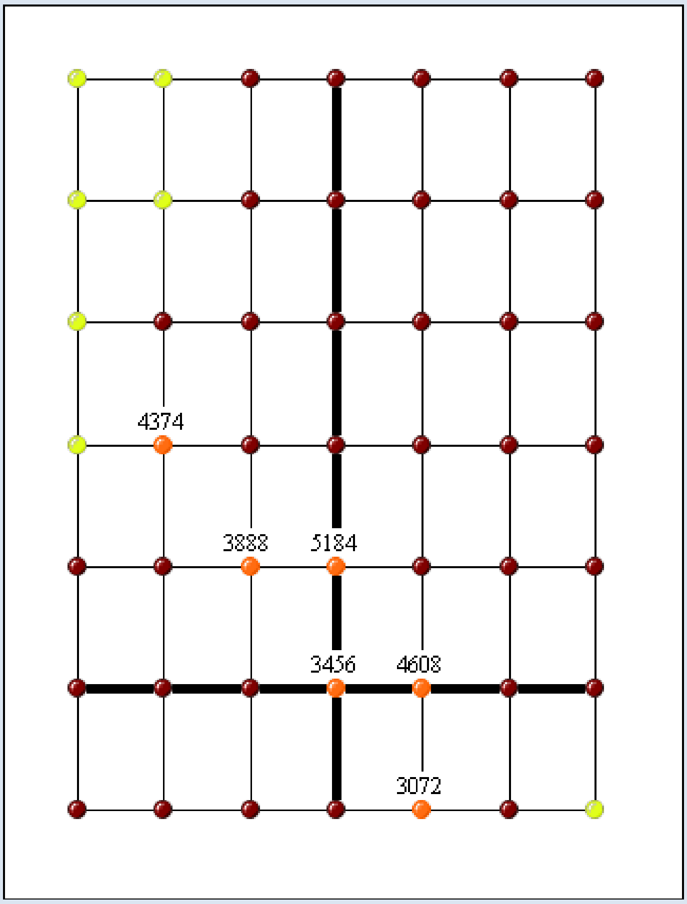
Έστω ότι αυτό το διάστημα διαπέντε (3456-5184) έχει τη δομή επόγδοος τόνος (3456-3888) συν διάστημα διατεσσάρων (3888-5184). Τούτο το διατεσσάρων διάστημα, αναλυόμενο σε δύο επογδόους τόνους (3888-4374 4374-4920,75) και λείμμα (4920,75-5184) (σχήμα 3.2.1.1) δημιουργεί κόμβο εκτός της Ψυχής του Κόσμου. Την υπόθεση αυτήν την απορρίπτουμε.

Εάν δεν απορρίπταμε αυτήν την εκδοχή και με μετατόπιση όλων των κόμβων κατά ένα κατιόν δις διαπασών διάστημα επιτυγχάναμε όλοι οι κόμβοι να είναι εντός της Ψυχής του Κόσμου, τότε θα είχαμε μεταφέρει και την αλληλουχία των τεσσάρων διαδοχικών επογδόων τόνων (3072-3456 3456-3888 3888-4374 και 4374-4920,75) (σχήμα 3.2.1.1). Όμως σε κανένα αρχαιοελληνικό μουσικό σύστημα δεν απαντάται αλληλουχία τεσσάρων διαδοχικών επογδόων τόνων και δια τούτο απορρίπτουμε αυτήν την εκδοχή.



Σχήμα 3.2.1.1: Ανάλυση του διαστήματος διαπέντε (3456-5184) σε επόγδοο τόνο (3456-3888) συν διάστημα διατεσσάρων (3888-5184).

Έστω τώρα ότι αυτό το διάστημα διαπέντε (3456-5184) έχει τη δομή διάστημα διατεσσάρων (3456-4608) συν επόγδοος τόνος (4608-5184). Τούτο το διατεσσάρων διάστημα, αναλυόμενο σε δύο επογδόους τόνους (3456-3888 3888-4374) και λείμμα (4374-4608) (σχήμα 3.2.1.2), δημιουργεί κόμβους εντός της Ψυχής του Κόσμου. Την υπόθεση αυτήν την αποδεχόμεθα.



Σχήμα 3.2.1.2: Ανάλυση του διαστήματος διαπέντε (3456-5184) σε διάστημα διατεσσάρων (3456-4608) συν επόγδοο τόνο (4608-5184).

Άρα το ημιόλιο αυτό διάστημα υποχρεωτικά θα έχει τη δομή επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος και θα υλοποιείται με τους αριθμούς 3456, 3888, 4374, 4608, 5184.

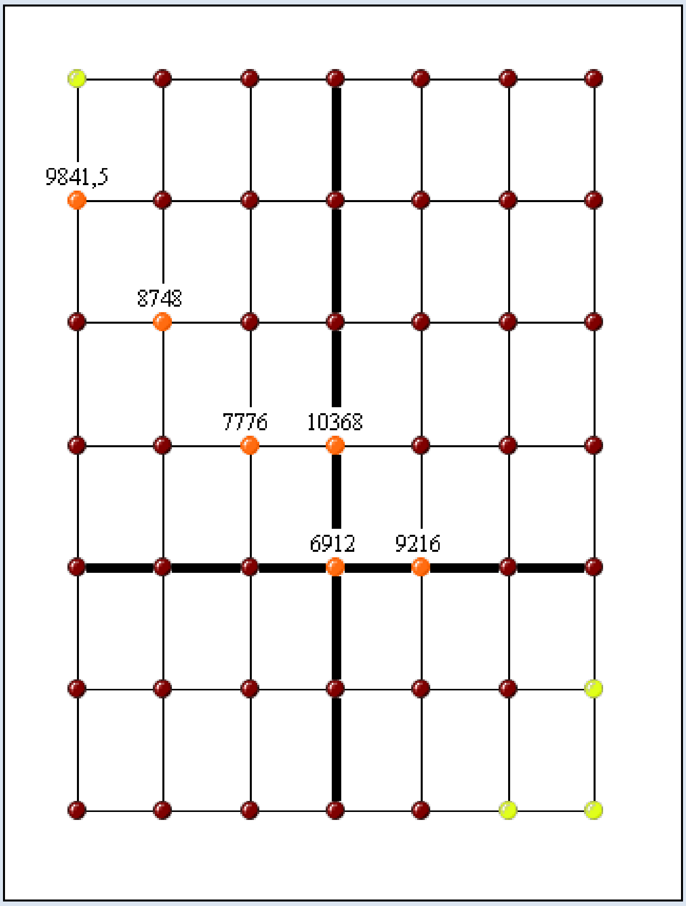
3.2.2 Μελέτη της δομής του δευτέρου ημιολίου διαστήματος μεταξύ των όρων 6912 και 10368

Το ημιόλιο αυτό διάστημα (6912-10368) μπορεί να έχει και τη δομή επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα [τ+(τ+τ(=λ+Α)+λ)] και τη δομή επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος [(τ+τ+λ)+τ]. Οι δύο αυτές δομές συνυπάρχουν στη συνισταμένη δομή της μορφής του σχήματος 3.2.2.1.

		τ		
τ 6912-7776	τ 7776-8748	λ 8748-9216	Α 9216-9841,5	λ 9841,5-10368
			τ	

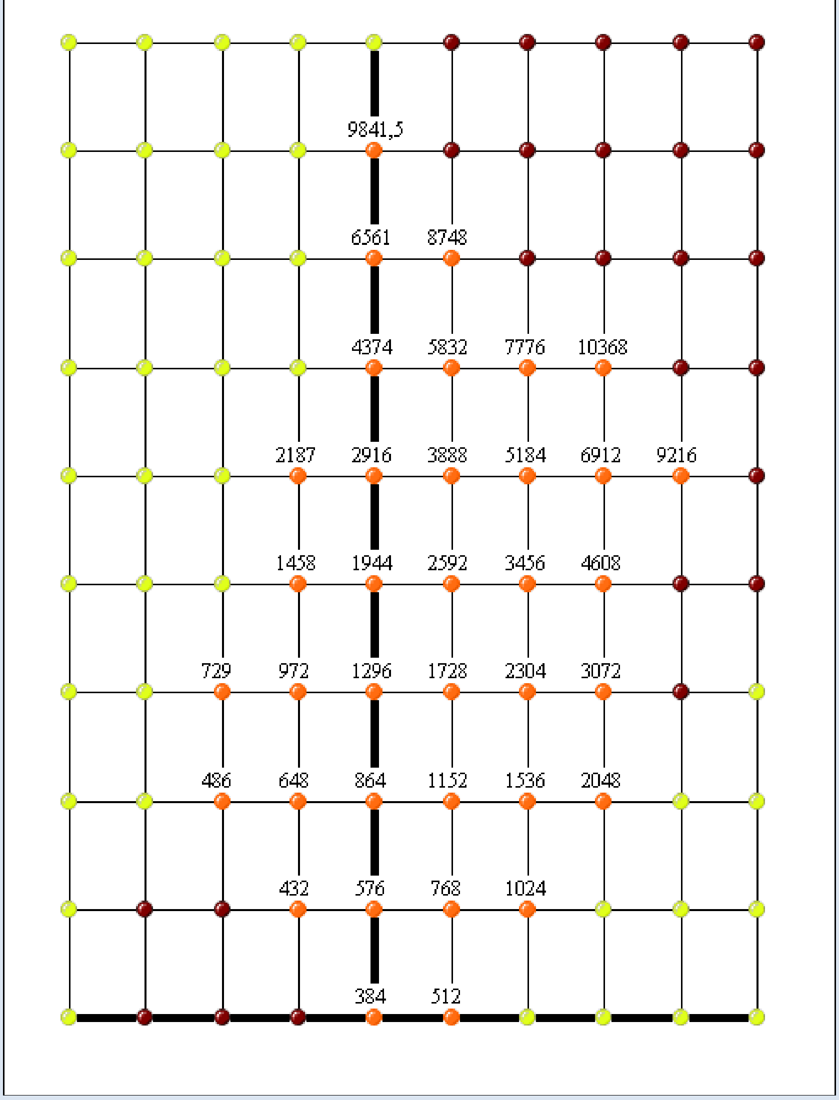
Σχήμα 3.2.2.1: Δομή ημιολίου διαστήματος· επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα [τ+(τ+τ(=λ+Α)+λ)] και επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος [(τ+τ+λ)+τ].

Τα παραπάνω υλοποιούνται από τους κόμβους του σχήματος 3.2.2.2.



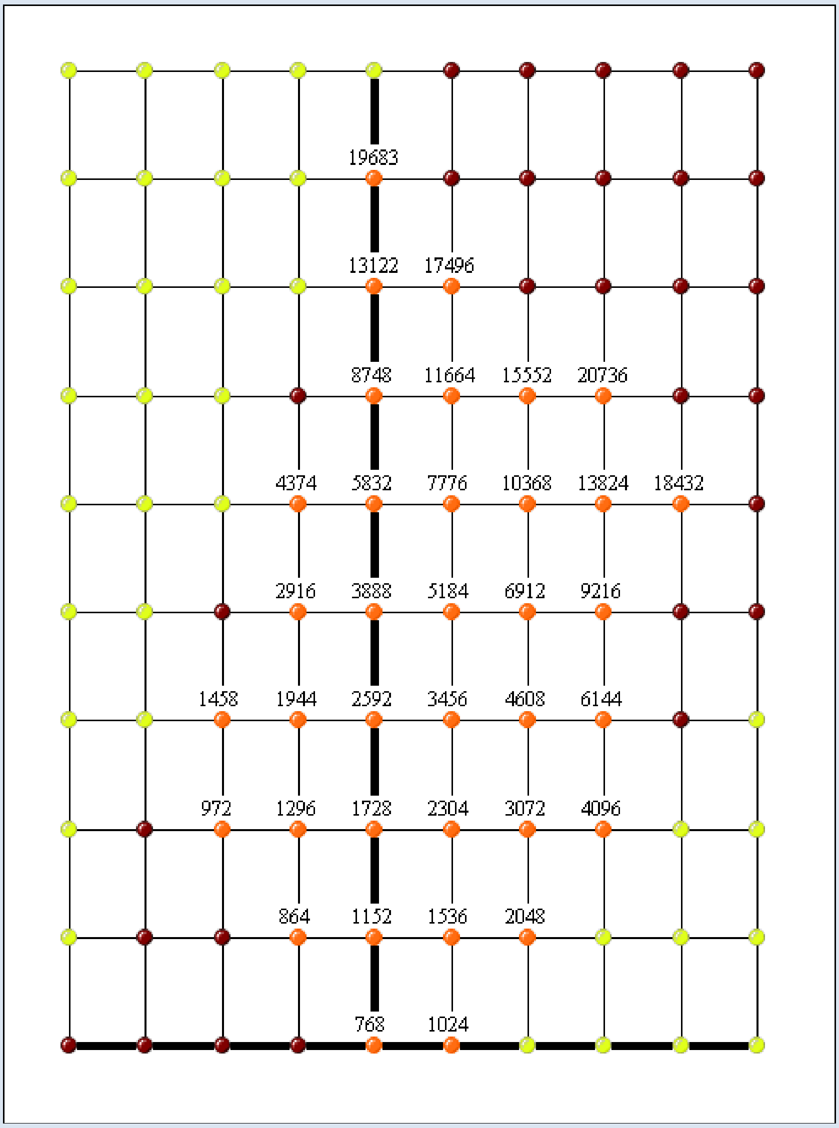
Σχήμα 3.2.2.2: Ανάλυση της δομής του διαστήματος διαπέντε (6912-10368).

Με τις μέχρι στιγμής διαδικασίες προέκυψαν οι 36 κόμβοι του σχήματος 3.2.2.3.



Σχήματος 3.2.2.3: Εκ των 36 κόμβων του Πλατωνικού προβλήματος, που προέκυψαν, οι 35 ανήκουν στην Ψυχή του Κόσμου και ένας (ο 9841,5) δεν ανήκει.

Ένας εξ αυτών των κόμβων -ο 9841,5- ως μη ακέραιος δεν ανήκει στην Ψυχή του Κόσμου. Δια μετατοπίσεως όλων των κόμβων κατά ένα κατιόν διαπασών διάστημα, τους καθιστούμε όλους για πρώτη φορά κόμβους της Ψυχής του Κόσμου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.2.4.



Σχήμα 3.2.2.4: Όλοι οι κόμβοι του σχήματος 2.2.2.3 δια της μετατοπίσεώς των κατά ένα κατιόν διαπασών διάστημα, καθίστανται κόμβοι της Ψυχής του Κόσμου.

Ο Τίμαιος ο Πυθαγόρειος λέγει[15] ότι οι όροι στο διάγραμμα είναι 36 ή, ισοδυνάμως, τα διαστήματα στο διάγραμμα είναι 35. Πράγματι, έχομε τοποθετήσει 22 επογδόους τόνους, 11 λείμματα και 2 αποτομές.

Και πάλι θα τονίσουμε το γεγονός ότι οι αριθμοί αυτοί παριστούν μια κατατομή του συμπαντικού μονοχόρδου. Δηλαδή παριστούν τις θέσεις των «τάστων» επάνω στο εν λόγω μονόχορδο ή, με άλλα λόγια, παριστούν μήκη δονουμένων τμημάτων χορδής αυτού του μονοχόρδου, ως κόμβοι του Σπυριδείου δικτυωτού.

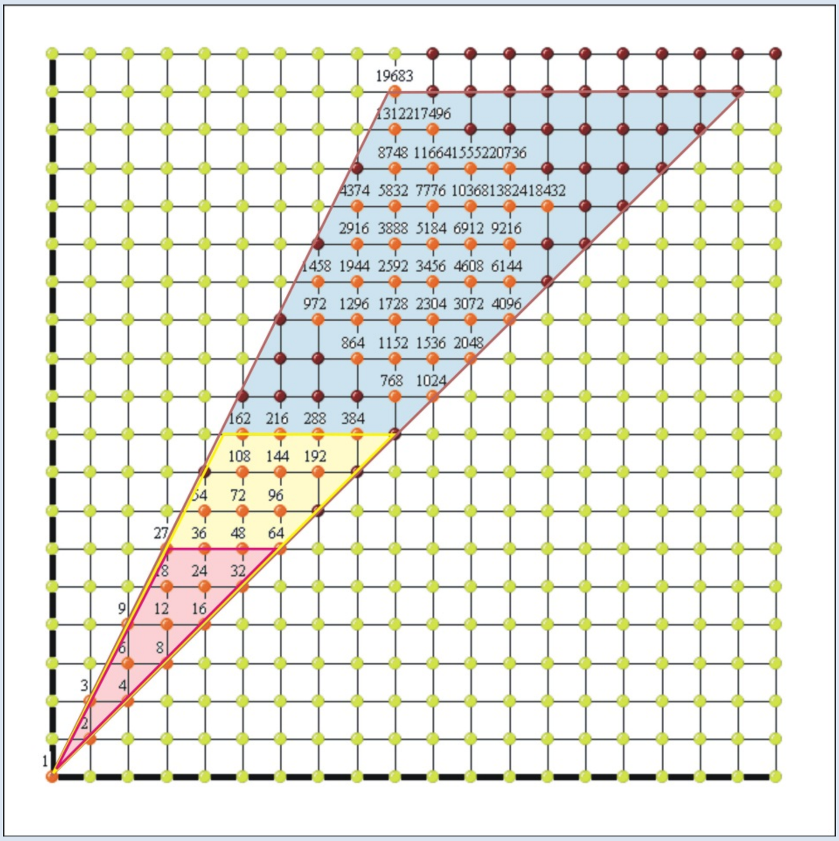
Στο σχήμα 3.2.2.5 οι εν λόγω αριθμοί φαίνονται ως κόμβοι του Σπυριδείου δικτυωτού να εμπεριέχονται σε ένα τμήμα επιφανείας λαβδοειδούς σχήματος στην κορυφή του οποίου

[15] δεῖ δ' εἶμέν πως πάντας σὺν τοῖς συμπληρώμασι
καὶ τοῖς ἐπογδόοις ὅρους ἑξ καὶ τριάκοντα,

Τίμαιος, Fragmenta et titulus, σ. 209, 6-7.

δεσπόζει η «ανθυφαιρετική» μονάς και επί του κάθε σκέλους της ευρίσκονται οι δύο τετρακτύες 1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27.

Εφαρμόζοντας και πάλι τη ρήση του Πρόκλου (*Εις τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5-8) «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους» όλοι οι αριθμοί της λύσεως εμπεριέχονται εντός τριών τριγώνων. Στο πρώτο τρίγωνο (τρίγωνο με κόκκινο χρώμα) τοποθετούνται οι αριθμοί της Πλατωνικής ή μεγίστης τετρακτύος, στο εσώτερο τρίγωνο (τρίγωνο με κίτρινο χρώμα) τοποθετούνται οι εξαπλάσιοί τους, οι οποίοι έχουν και αριθμητικό και αρμονικό μέσο και στο τρίτο τρίγωνο (τρίγωνο με γαλάζιο χρώμα) περικλείονται όλοι οι αριθμοί της δομής.



Σχήμα 3.2.2.5: Λύση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» επί του Σπυριδείου δικτυωτού με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή σύμφωνα με την αρχαιοελληνική μαθηματική διαδικασία και γεωμετρική ερμηνεία της ρήσεως του Πρόκλου « Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἑξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότητας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξωτάτῳ τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».

Πρόκλου Εις τον Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-12

Εάν θα θέλαμε να προσεγγίσουμε την δομή εκ της λύσεως του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή με την σύγχρονη ευρωπαϊκή σημειογραφία, θα λαμβάναμε την αλληλουχία νοτών του Πίνακα 3.2.2.1.

Πίνακας 3.2.2.1: Η Σπυρίδειος λύση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή αντιστοιχημένη με νότες της ευρωπαϊκής σημειογραφίας.

		ττλ	
E	768		
D	864	τόνος	
C	972	τόνος	
B	1024	λείμμα	
A	1152		τόνος
G	1296	τόνος	
F	1458	τόνος	
E	1536	λείμμα	
D	1728	τόνος	
C	1944	τόνος	
B	2048	λείμμα	
A	2304		τόνος
G	2592	τόνος	
F	2916	τόνος	
E	3072	λείμμα	
D	3456	τόνος	
C	3888	τόνος	τόνος
B	4096	λείμμα	λείμμα
B♭	4374		αποτομή
A	4608		λείμμα
G	5184	τόνος	
F	5832	τόνος	
E	6144	λείμμα	
D	6912		τόνος
C	7776	τόνος	
B♭	8748	τόνος	
A	9216	λείμμα	
G	10368		τόνος

F	11664	τόνος	
E♭	13122	τόνος	
D	13824	λείμμα	
C	15552	τόνος	
B♭	17496	τόνος	
A	18432	λείμμα	λείμμα
A♭	19683	αποτομή	αποτομή
G	20736		λείμμα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ
Α΄ ΠΗΓΕΣ

Ανών. Bell.	F. Bellermann, De Anonymi scriptio de Musica, Ανωνύμου σύγγραμμα περί Μουσικής, Βερολίνο 841. Νέα έκδ. D. Najock, Goettingen 1972.
Αριστείδης	Αριστείδης Κοϊντιλιανός, *Περί Μουσικής*, έκδ. Meibom 1652, A. Jahm 1882 και R. P. Winnington-Ingram, Λιψία 1963.
Αριστόξ. Αρμ.	Αριστόξενος, *Αρμονικά Στοιχεία*, έκδ. Meibom κ.α.
Αριστοτέλης	Bekker, I., Aristotelis opera omnia, Berlin, 1831-1870, new edn., O. Gigon ed., 1960-
Βάκχ. Εισ.	Βακχείος Γέρων, *Εισαγωγή Τέχνης Μουσικής*, έκδ. Meibom 1652 και C. v. Jan 1895.
Βρυέν.	Μανουήλ Βρυέννιος, Αρμονικά, έκδ. J. Wallis, τόμ III, Οξφόρδη 1699.
Γαυδ. Εισ.	Γαυδέντιος Φιλόσοφος, *Αρμονική Εισαγωγή*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
Ευκλ.	Ευκλείδης, *Opera Omnia*, ed. J. L. Heiberer και H. Monge, Leipzig (T.) 1883-1916.
Θέων Σμυρν.	Θέωνος Σμυρναίου, *Περί Μουσικής (Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν)*, B. G. Teubneri, Lipsiae, 1878, έκδ. Ism. Bullialdus, Παρίσι 1644 και ed. Hiller, Λιψία 1878, T.
C. v. J.	Carl v. Jan, *Supplementum melodiarum reliquiae*, Λιψία 1899.
Κλεον. Εισ.	Κλεονείδης (ή Κλεωνίδης), *Εισαγωγή Αρμονική*, έκδ. C. v. Jan 1895.
Ευκλείδου	«*Στοιχεία*» (τόμοι 4) (επιμέλεια, σχολιασμός, απόδοση στη νεοελληνική Ευαγγέλου Σταμάτη) (Ο.Ε.Δ.Β.), Αθήνα, 1953.
LSJ	Henry G. Liddell and R. Scott, *A Greek-English Lexicon*, revised and augmented by Sir Henry St. Jonew, with a Sup-

	plement, Οξφόρδη, 1968, ανατύπωση 1973.
Macran	Henry S. Macran, *The Harmonics of Aristoxenus* (Αριστοξένου Αρμονικά Στοιχεία, Οξφόρδη 1902).
Mb	Marc Meibom (Marcus Meibomius), *Antiquae Musicae Auctores Septem*, graece et latine, Amsterdam 1652.
Νικόμ. Εγχ.	Νικόμαχος Γερασηνός, *Αρμονικής Εγχειρίδιον*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
Παχυμ.	Γεώργιος Παχυμέρης, *Περί Αρμονικής* (Vincent, Notices), Παρίσι 1847, σσ. 401-552.
Πλάτων	Πλάτων, Νόμοι, Πολιτ. (Πολιτεία), Πρωταγ. (Πρωταγόρας), Φίληβος κλπ.
Πλούτ. Περί μουσ.	Πλούταρχος, *Περί μουσικής*.
Πορφύρ.Comment.	Πορφύριος, *Commentarius in Ptolemaei Harmonica*, έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During Goeteborg 1932.
Πρόκλου	Πρόκλος, «*Σχόλια εις το α΄ βιβλίο των «Στοιχείων*» *του Ευκλείδου*» τόμος Α΄ (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2001.
Πρόκλου	Πρόκλος, «*Σχόλια εις το α΄ βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου*» τόμος Β΄ (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2002.
Πρόκλου	Πρόκλος, *Εις τον Τίμαιον*, E. Diehl (ed.), Leipzing, 1903 (tr. By J. Festugiere, 5 vols, Paris, 1966-68.
Πρόκλου	Πρόκλος, *Περί της κατά Πλάτωνος θεολογίας*, στο Proclus, Opera inedita, V. Cousin (ed.), Paris, 1864 (αγγλική έκδοση από τους Morrow και Dillon, Princeton, 1987.
Πτολ. Αρμ.	Πτολεμαίος, *Αρμονικά*, έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During, Goeteborg 1930.
Rein. La us. Gr.	Theodore Reinach, *La musique grecque*, Παρίσι 1926.
Vincent Notices	A. J. H. Vincent, Notices sur divers manuscripts grecs relatifs a la musique, Παρίσι, 1847.

Φιλόλαος	Philolaus, Notices and fragments in Diels-Kranz 44 (Vol. 1, pp. 398-419); Timpanaro Cardini, Pitagorici 18, Fasc. II, pp. 82-249.
Μ. Ψελλ.	Μιχαήλ Ψελλός, *Μουσικής Σύνοψις ηκριβωμένη*, Παρίσι, 1545.
TLG	*MUSAIOS* version 1.0d-32 By Darl J. Dumont and Randall M. Smith.

Β΄ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ
ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ

Baeumker, C. –*Das Problem der Materie in der griechischen Philosophie* [Το πρόβλημα της ύλης στην ελληνική φιλοσοφία], σσ. 115-188.

Barker, Andrew, 1989, "*The Euclidean Sectio canonis*." In *Greek Musical Writings*, vol. 2, Harmonic and Acoustic Theory, pp. 190-208. Cambridge: Cambridge University Press.

Bekker, Immanuael (επιμ.) (1972) *Λεξικόν Σούδα (Σουΐδα). Φιλολογική αποκατάσταση*. I-V. (Βιβλιοθήκη των Ελλήνων, 7-11). Αθήνα: Ελληνικός Εκδοτικός Οργανισμός.

Bekker, Immanuael (επιμ.) (1960) *Aristotelis opera*. Editio altera quam curativ Olof Gygon. I. Berlin: De Gruyter.

Belis, Annie, 1985, *Οι πηγές της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, περ. *Αρχαιολογία*, τχ. 14 Φεβρουαρίου.

Belis, Annie, 2004, *Η καθημερινή ζωή των μουσικών στην αρχαιότητα*, Εκδ. Παπαδήμα, Αθήνα.

Brann, Eva, 1962, *The Cutting of the Canon*, In The Collegian, pp 1-63, Annapolis: St. John's College.

Burnet, J., *Greek Philosophy*, Μέρος I, σσ. 335-349· Platonism (1928), Κεφ. Vii.

Conford, F. M., 1937, *Plato's Cosmology*, Cambridge.

Da Rios, (επιμ.) (1954) Aristoxeni Elementa harmonica. Roma: Typis Publicae Officinae Polygraphicae.

Davy, Charles, 1787, "*Euclid's Introduction to the Section of the Canon*" In Letters, addressed chiefly to a young gentleman, upon subjects of literature: including a translation of Euclid's section of the canon; and his treatise on harmonic; with an explanation of the Greek musical modes, according to the doctrine of Ptolemy, 2:264-90. 2 vols. Bury St. Edmonds: Printed for the author by J. Rackham.

De Falco, V. (ed.), 1922, Theologumena Arithmeticae, Teubner, Lipsiae, μετάφραση στη νεοελληνική Ι. Ιωαννίδης, Α. Φωτόπουλος και Π. Γράβιγγερ (επ.), Ιδεοθέατρον, Αθήνα, 1998.

Deubner, L. (ed.), 1937, *De vita Pythagorica liber*, ανατ. U. Klein, Teubner, Stuttgart, 1975.

Diels, Hermann & Kranz Walther (επιμ.) (1964) *Die Fragmente der Vorsokratiker*. *Griechisch und Deutsch*. I-III. Zürich & Berlin: Weidmann.

Dillon, John (ed.), 1973, *Iamblichi Chalcidensis in Platonis Dialogos: Commentarium Fragmenta*, Leiden, Brill.

Fowler, D., 1979, *Ratio in early Greek Mathematics*, (Bulletin of American Mathematical Society, pp. 807-846), New York.

Fowler, H., 1999, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, Oxford.

Friedlein, Godfried (επιμ.) (1867) *Boetii De institutione musica libri quinque*. Leipzig: B. G. Teubner.

Godofredus Stallbaum, *Platonis Opera Omnia, Recensuit et Commentariis Instruxit*, Vol. VII, Continens TIMAEUM ET CRITIAM, Gothae et Erfordiae Sumptibus Guil. Hennings, MDCCCXXXVIII, Londini Apud Black et Armstrong.

Grove's, 1954, "Dictionary of Music & Musicians", 5th ed. Macmillan & Co, Ltd., London.

Heath, T., 1926, *Euclid; the thirteen books of the Elements*, Dover, N. York.

Heath, T., 1949, *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Preess, Oxford.

Heath, T., 1981, *A History of Greek Mathematics (Vol. I, II)*, Dover, N. York.

Herz – Fischler, R., 1998, *A mathematical history of the Golden number*, Dover Publ., New York.

Hoche, Richard, ed. Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II, Leipzing, 1866.

Isaac Asimov, 2004, *Το χρονικό των επιστημονικών ανακαλύψεων*, Απόδοση στα ελληνικά Γ. Μπαρουξής-Ν. Σταματάκης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Ivor Thomas, 1980, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. I-II, Cambridge Mass., London.

LOEB CLASSICAL LIBRARY, 1998, *Greek Mathematical Works II– Aristarchus to Pappus*, Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.
LOEB CLASSICAL LIBRARY, 2000, *Greek Mathematical Works I– Thales to Euclid*, Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.

Martin, T. H., 1841, *Μελέτες για τον Τίμαιο του Πλάτωνα*, Παρίσι.

Mathiesen, Thomas J. "*An Annotated Translation of Euclid's Division of a Monochord*", *Journal of Music Theory*, 19(1975): 236-58.

Pearson, L., 1990, *ARISTOXENUS: Elementa Rhythmica*, Clarendon Prees, Oxford.

Pistelli. H. (ed.), 1894, In Nicomahi Arithmeticam introductionem, ανατ. Teubner, Stuttgart, 1975.
Reinach, Theodore, 1999, *Η ελληνική μουσική*, Μτφρ. Αναστασίας-Μαρίας Καραστάθη, σελ. 158, Αθήνα.

Rivaud, A., 1925, *Πλάτων, Τίμαιος, Κριτίας*, Παρίσι.

Spiegel, R. Murray, 1959, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York.

Spyridis, H., C., 1988, *The Delphi musical system, ένα νέο σύστημα μουσικών διαστημάτων*, Ανακοίνωση στη Γ΄Διεθνή Μουσικολογική Συνάντηση των Δελφών με θέμα «*Ρυθμοί, τρόποι και κλίμακες της Μουσικής της Μεσογείου*», Δελφοί.

Szabo, Arpad, 1973, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, ΕκδόσειςΤεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

Taylor, A. E., 1992, *ΠΛΑΤΩΝ (Ο άνθρωπος και το έργο του)*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.

Taylor, Thomas, 1994, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων,* Μτφρ. Μαρία Οικονομοπούλου, *Εκδόσεις* ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ, Αθήνα.

Wallies, Maximilianus (επιμ.) (1891) *Alexandri Aphrodisiensis in Aristotelis Topicorum libros octo commentaria*. Berlin: Georg Reimer.

Wanzloeben, Sigfrid, 1911, *Das Monochord als Instrument und als System*, Halle.

Weyl, Hermann, 1991, *ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

West. M., L., 2004, *Αρχαία Ελληνική Μουσική*, Μτφρ. Στ. Κομνηνός, Εκδ. Παπαδήμα, Αθήνα.

Winington, R., P., - Ingram, 1968, *Mode in ancient greek music*, A. M. Hakkert Pub., Amsterdam.

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΑ

Ανδρεαδάκης, Ν., 1999, *Η τετρακτύς της Ιωνίας και ο Ιωνικός λόγος αποκαλύπτουν*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, Τόμος Α΄, 1995, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, *ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*, Τόμος Β΄, 1997, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Βασιλειάδης, Στ., 1984, *Για τη Μουσική*, Citibank, Αθήνα.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΑΡΧΑΙΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ, *Πλάτωνος Τίμαιος*, Εισαγωγή, μετάφραση, Σχόλια Θ. Βλυζιώτης, Χ. Παπαναστασίου, Εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.

Γεωργόπουλος, Κ., 1995, *Αρχαίοι Έλληνες Θετικοί Επιστήμονες*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήναι.

Δημητράκος, Δ., 1964, *Μέγα Λεξικόν όλης της Ελληνικής Γλώσσης*, τόμ. 1-9, Αθήναι.

Δρανδάκης, Π., *Μεγάλη Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια*, 2η έκδοσις, Εκδοτικός Οργανισμός «Ο ΦΟΙΝΙΞ» Ε.Π.Ε.

ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΑΘΗΝΩΝ Α.Ε., 1972, *ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΕΘΝΟΥΣ* (Κλασσικός Ελληνισμός 2), Τόμος Γ2, Αθήναι, σ.σ.469-472.

Ευστρατιάδης, Π., 1870, *Αρχαιολογική Εφημερίς*, σελ. 371.

Ιάμβλιχος, 1998, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής*, Εκδ. Ιδεοθέατρον, Αθήνα.

Θεοδωρίκας, Σ. Στέργιος, 1996, *Ορυκτολογία Πετρολογία*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Ιάμβλιχος, 2001, *Περί του Πυθαγορικού Βιου*, Εισαγωγή-Μετάφραση-Σχόλια Αλ. Α. Πέτρου, Πρόλογος Τ. Πεντζοπούλου-Βαλαλά, Εκδ. Ζήτρος, Θεσσαλονίκη.

Καϊμάκης, Π., 2005, *Φιλοσοφία και Μουσική*, ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ, Αθήνα.

Καλιτσουνάκις, Ιωάννης, 1922, *Επταδικαί Έρευναι,* Αθήναι, σ. 59.

Κάλφας, Βασίλης, 1997, *ΠΛΑΤΩΝ ΤΙΜΑΙΟΣ,* Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.

Κάλφας, Βασίλης, 2005, *Φιλοσοφία και Επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα,* Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.

Καπνισάκη, Κώστα, 1983, *ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

Καράς Σίμων, 1989, *Αρμονικά*, Ανακοίνωσις εις το Μουσικολογικόν Συνέδριον των Δελφών της 28-30 Οκτωβρίου 1988, Εκδ. Συλλόγου προς διάδοσιν της Εθνικής Μουσικής, Αθήνα.

Καράς Σίμων, *Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής*, εν χγφοις.

Κοκκόρου, Π., 1966, *Γενική Ορυκτολογία*, Έκδοσις Ζ, Θεσσαλονίκη.

Λαμπρίδης, Χ. Χ., 1996, *ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ*, Βιβλιοπωλείο ΚΛΕΙΩ, Πάτρα.

Λέκκας, Ε. Δημήτρης, 1995, *Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μουσικών Σπουδών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.

Λυκούρας, Γ., 1994, *Πυθαγορική Μουσική και Ανατολή*, Εκδ. Συρτός, Αθήνα.

Μιχαηλίδης, Σ., 1982, *Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα.

Μιχαηλίδης, Σ., 1982, *Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα.

Μπίλλα, Π., 1998, *Μαθήματα Αρχαίας Ελληνικής Γραμματικής*, Εκδ. Σαββάλας, Αθήνα.

Μπίλλα, Π., 1998, *Μαθήματα Αρχαίας Ελληνικής Γραμματικής*, Εκδόσεις Σαββάλας, Αθήνα.

Μωυσιάδης, Θ. Χρόνης και Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 1994, *ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Μωυσιάδης, Θ. Χρόνης, 2002, *ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ Η τέχνη να μετράμε χωρίς μέτρημα*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Μωυσιάδης, Χ., και Σπυρίδης, Χ., 1995, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Μωυσιάδης, Χ., και Σπυρίδης, Χ., 1995, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Νεγρεπόντης, Στ., 2-4/9/2005, *Η επίδραση των Πυθαγορείων στη διαμόρφωση του ελληνικού πολιτισμού*, Εισήγηση στο Επιστημονικό Συνέδριο «*Πυθαγόρεια Σκέψη και Επιστημονικός Λόγος*», Πυθαγόρειον Σάμου (Doryssa Bay Hotel, αίθουσα “Sybilla”).

Παπαδοπούλου Μ., Σπυρίδης, Χ., 2004, *Ο Ελικών*, Επιστημονική Ανακοίνωση στο 3^{ο} Διεθνές Συνέδριο Ακουστικής του ΕΛ.ΙΝ.Α., Θεσσαλονίκη, 27-28/9.

Παπαθανασίου, Μάρω, *Η Πυθαγορική διανόηση και τα Μαθηματικά*, Ελληνική *Φιλοσοφική Επιθεώρηση*, τ. 3, τχ. 7, Ιαν. 1986.

Παπανικολάου, Γ., Χ., 1960, *Μαθήματα Άλγεβρας*, 7η έκδοση, Αθήνα.

Παπανικολάου, Γ., Χ., 1962, *Θεωρητική Γεωμετρία*, Αθήνα.

Παπούλας. Β., Ι., 1907, *Έκθεσις κατατομής του κανόνος, επί τε του αμεταβόλου τόνου και των καθ' έκαστον γενών*, Φόρμιγξ Β΄, Β΄, Φ. 6, σ. 2-3.
Αυτόθι, Φ. 7-8, σ. 6-7 (συνέχεια).
Αυτόθι, Φ. 9, σ. 2-3 (συνέχεια).
Αυτόθι, Φ. 19-20, σ. 4-5: *Περί λόγου και αναλογίας*, *Περί πολλαπλασίων και επιμορίων λόγων, Περί επιμερών*
Αυτόθι, Φ. 23-24, σ. 4-5: *Περί πολλαπλασιεπιμορίων, Περί πολλαπλασιεπιμερών και αριθμού προς αριθμόν.*

Παπούλας. Β., Ι., 1908, *Έκθεσις κατατομής του κανόνος επί του Δωρίου τόνου* (του τετάρτου καθ΄ημάς ήχου), Φόρμιγξ Β΄, έτος Δ΄, Φ. 1-2, σ. 4-5.

Πασχαλίδη, Δ., 1998, *ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ της αρχαίας ελληνικής γλώσσας*, Θεωρία – Ασκήσεις, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Πρινιανάκη, Χ. Γιάννη, 1999, *Η γλώσσα των Ελλήνων είναι η γλώσσα που ομιλεί η φύση*, Αυτοέκδοση, Αθήνα.

Ρεμάντας, Α., και Ζαχαρίας, Π.Δ., 1917, *Η μουσική των Ελλήνων ως διεσώθη από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρι της σήμερον*, Αρίων, Αθήναι, σ. η΄- θ΄.

Ρεντζεπέρης, Ι. Παναγιώτης, 1982, *Εισαγωγή στην Κρυσταλλοδομή και τη Φυσική των ακτίνων Χ*, Τόμος 1ος, Θεσσαλονίκη.

Σακελλαρίου, Γεώργιος, 1962, *ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ο διδάσκαλος των αιώνων*, Εκδόσεις ΙΔΕΟΘΕΑΤΡΟΝ, Αθήναι, σ. 174 κ.ε.

Σκαρλάτου Δ. του Βυζαντίου, 1852, Λεξικόν της Ελληνικής Γλώσσης, Αθήναι.

Σκιάς. Α., 1894, *Ελληνικαί Γραμματικαί*, Εν Αθήναις, σ. 120 και εφεξής.
Σουΐδας, Βυζαντινό Λεξικό, Θύραθεν Εκδόσεις, Θεσσαλονίκη.

Σπανδάγου Ευαγ., 2001, *Η Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., 2003, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν του Θέωνος του Σμυρναίου*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., 2004, *Η Αστρονομία των αρχαίων Ελλήνων*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., Σπανδάγου Ρ., Τραυλού Δ., 2000, *Οι μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδος*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 1988, *Μια εισαγωγή στη Φυσική της Μουσικής*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 1990, *Μουσική Ακουστική*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 1998, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Κατατομή Κανόνος*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2004, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, σελ. 222.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2006, ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗ, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2008, Πλάτωνος Τίμαιος: ΓΕΝΕΣΙΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις), Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.

Σταματάκου, Ιωάν., 1994, Λεξικόν της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης, Αθήνα.

Σταμάτη, Ε. Σ., 1975, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλία 1, 2, 3, 4*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.

Σταμάτη, Ε. Σ., 1953, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών – Στοιχείων Βιβλία V, VI, VII, VIII, IX.*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.

Σταμάτη, Ε. Σ., 1975, *Ευκλείδου παρί ασυμμέτρων στοιχεία, Βιβλίον Χ. Εισαγωγή-Αρχαίον Κείμενον, Μετάφρασις-Επεξηγήσεις, Τόμος ΙΙΙ*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.

Σταμάτη, Ε. Σ., 1980, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Αριθμητικά – Αι αρχαί της Ελληνικής Γεωμετρίας*, Αυτοέκδοσις, Αθήναι.

Σταμάτης, Ε., Σ., 1963, *Περί του μαθηματικού Ευκλείδου*, μετάφρασις εκ του γερμανικού μετ' εισαγωγής, Εκδ. Οικονομικής & Λογιστικής Εγκυκλοπαιδείας, Αθήνα.

Ταίηλορ Νέστωρ, 2000, *Η Αρμονία των Πυθαγορείων*, Εκδ. ΝΕΦΕΛΗ, Αθήνα.

Φιλολογική Ομάδα Κάκτου (μετ.) (2005) *Αριστόξενος. Άπαντα Μουσικά έργα. Αρμονικά στοιχεία, Ρυθμικά στοιχεία, Αποσπάσματα.* (Οι Έλληνες, 687). Αθήνα: Κάκτος.

Χατζοπούλου, Ι. Δ., 1965, *Ανώτερα Μαθηματικά δια τους πρωτοετείς φοιτητάς*, Αυτοέκδοσις, Θεσσαλονίκη.

Το «Δήλιον πρόβλημα» ή ο διπλασιασμός του κύβου ή η τριχοτόμησις της αρμονίας

1. Προλεγόμενα

Κυρίες και κύριοι σύνεδροι, ως καθηγητής της Ακουστικής ησχολήθην με τον Πυθαγορισμόν στοχεύων εις την κατανόησιν του τρόπου μελέτης υπό των πυθαγορείων των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί σειράν αιώνων κατ' αυτόν ή τον άλλον τρόπον εις την ανθρωπίνην αίσθησιν.

Καθ' οδόν εντυπωσιάσθην τα μάλα υπό του μυστικισμού, ο οποίος διέκρινεν την μετάδοσιν της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμυημένων οπαδών του Πυθαγορισμού, αλλά συντόμως διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο εις τον συμβολισμόν.
Η επιστημονική γνώσις παρέμενεν κρυφή και αρρήκτως συνδεδεμένη μετά σημείων, συμβόλων, αριθμών και αστερισμών, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά, τα οποία, εν εναντίᾳ περιπτώσει, παρερχομένου του χρόνου, θα υφίσταντο διαστρέβλωσιν.
Ιδού γιατί οι «παλαιοὶ» [1] Έλληνες φιλόσοφοι, τραγικοί και ποιητές εδίδασκον κρυφίως «μύθῳ φιλοσοφοῦντες» κάποιες απόκρυφες διδασκαλίες, κεκαλυμμένες δι' αριστοτεχνικού φιλοσοφικού τρόπου.

2. Η Γεωμετρική εκδοχή του διπλασιασμού του κύβου

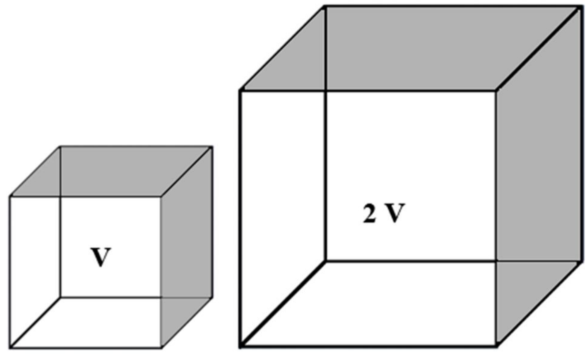
Ο διπλασιασμός του κύβου[2] ή το «Δήλιον πρόβλημα» κατελέγετο μεταξύ των τριών αλύτων προβλημάτων της Ελληνικής αρχαιότητος μετά κανόνος και διαβήτου μόνον. Τα έτερα δύο άλυτα προβλήματα ήσαν η τριχοτόμησις δοθείσης γωνίας και ο τετραγωνισμός του κύκλου.

---

[1] οἱ παλαιοὶ πολλοῖς αἰνίγμασιν ἐχρῶντο καὶ μάλιστα πρὸς τοὺς ἱερεῖς,
Plutarchus, Αίτια Ρωμαϊκά και Ελληνικά, 281, A10-B1.

Οἱ γὰρ παλαιοὶ τὰ ποιήματα αὐτῶν πρῶτον ἐν προοιμίοις καὶ αἰνίγμασιν γεγράφασιν. ὕστερον δὲ καὶ καθόλου φανερῷ ἐχρῶντο τῷ λόγῳ.
Σχόλια εις τον Προμηθέα Δεσμώτην του Αισχύλου, 610, 3.

[2] Ανάλογον του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου ήτο το κατά πολύ παλαιότερον πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου, το οδηγούν εις το άρρητον μέγεθος $\sqrt{2}$, δια του οποίου το διαπασών διχοτομείται.



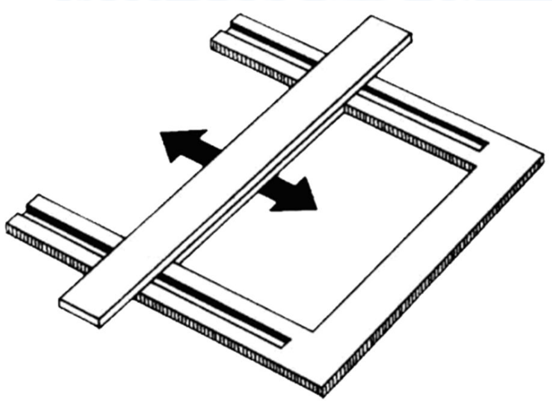
Σχήμα 1: Ο διπλασιασμός του κύβου ή το «Δήλιον πρόβλημα»

Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου ήτο γνωστόν κατά την αρχαιότητα και εις τους Αιγυπτίους και τους Ινδούς.
Κατά τον διπλασιασμόν του κύβου, δοθέντος ενός κύβου, ζητείται να κατασκευασθεί έτερος κύβος διπλασίου όγκου.

Κατά τους υπάρχοντες μύθους περί του διπλασιασμού του κύβου λέγεται ότι ο Ερατοσθένης εκ της Κυρήνης, τον 3^{ον} π.Χ. αι., απέστειλεν επιστολήν εις τον βασιλέα της Αιγύπτου Πτολεμαίον αναφέρων έναν θρύλον εκ μιας τραγωδίας. Κατά τον θρύλον ο Γλαύκος, ο μικρός υιός του Μίνωος και της Πασιφάης, διέλαθεν της προσοχής των ιδικών του και πεσών εις ένα πιθάρι με μέλι επνίγη. Ο Μίνως, ο βασιλεύς της Κρήτης, παρήγγειλεν κυβικού σχήματος τάφον για τον αποθανόντα υιόν του. Ιδών τον ολοκληρωθέντα τάφον, του εφάνη μικρός και διέταξεν τον διπλασιασμόν του όγκου του άνευ μεταβολής του σχήματός του.
Σημειωτέον ότι κατά μίαν εκδοχήν τον Κρήτα πρίγκιπα με βότανα ανέστησεν ο Αργείος μάντις Πολύϊδας και κατ' άλλην ο θεός Ασκληπιός.

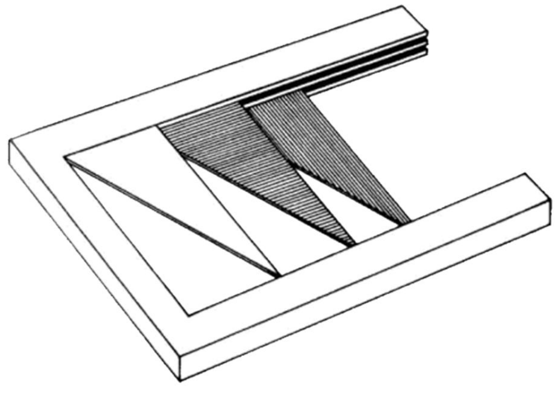
Ετέρα πλοκή του μύθου μας δίδεται υπό του Θέωνος του Σμυρναίου, επί τῇ βάσει ενός απολεσθέντος διαλόγου υπό τον τίτλον *Πλατωνικός*, όστις αναφέρει ότι οι Δήλιοι κατά την διάρκειαν λοιμού περί το έτος 430 π.Χ. ηρώτησαν το Μαντείον των Δελφών περί του πρακτέου για την σωτηρίαν των. Ο χρησμός της Πυθίας έλεγεν ότι έπρεπε να διπλασιάσουν του όγκον του κυβικού σχήματος ναού του Απόλλωνος άνευ μεταβολής του σχήματός του εξ οὗ και «Δήλιον πρόβλημα». Θεωρήσαντες ως εύκολον λύσιν τον διπλασιασμόν του μήκους της ακμής του κυβικού ναού, ωδηγήθησαν εις λάθος αποτέλεσμα και απέλπιδες απηυθύνθησαν εις επαΐοντες, ζητούντες να τους υποδειχθεί η σωστή λύσις του προβλήματος.
Ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνεύς (6^{ος} μ.Χ. αι.), ο σχολιαστής των έργων του Αρχιμήδους, μας διασώζει δώδεκα λύσεις του «Δηλίου προβλήματος», ήτοι του Ιπποκράτους του Χίου (470-400 π.Χ.), του Αρχύτου του Ταραντίνου (428-365 π.Χ.), του Πλάτωνος (427-347 π.Χ.), του

Μεναίχμου (375-352 π.Χ.), του Ευλείδου (Πρότασις ΙΙ.6 των *Στοιχείων*, 3ος π.Χ. αι.), του Αρχιμήδους (287-212 π.Χ.), του Ερατοσθένους (276-194 π.Χ.), του Απολλωνίου (265-170 π.Χ.), του Νικομήδους (2ος π.Χ. αι.), του Ήρωνος του Αλεξανδρέως (1ος-2ος μ.Χ. αι.), του Διοκλέους (1ος π.Χ. αι.) και του Πάππου του Αλεξανδρέως (3ος μ.Χ. αι.).
Πρώτος ο Ιπποκράτης ο Χίος εσκέφθη να εύρει δύο μέσες αναλόγους β και γ εις συνεχήν αναλογίαν μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων, των οποίων τα μήκη είχον σχέσιν 2:1, ήτοι $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}}$.
Εξ αυτής της τριπλής συνημμένης αναλογίας προκύπτει ότι $\boldsymbol{\beta} = \sqrt[3]{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\gamma} = \left(\sqrt[3]{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\alpha}$, οπότε ο κύβος ακμής β έχει διπλάσιον όγκον του κύβου ακμής α, ήτοι $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{3}} = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{3}}$. Επομένως, πρέπει να κατασκευασθεί ακμή μήκους εκφραζομένου δια του αρρήτου κατά τους Πυθαγορείους αριθμού -υπό την έννοιαν του μη επιτρεπτέου να λέγεται (α στερητικόν + ρητός)- $\sqrt[3]{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\alpha}$.
Ο Μέναιχμος έλυσεν το Δήλιον πρόβλημα δια δύο παραβολών, ο Νικόδημος επενόησεν μίαν λίαν πολύπλοκον λύσιν δια της λεγομένης *κογχοειδούς του Νικοδήμου* και ο Διοκλής δια του ομωνύμου *κισσοειδούς*.
Ο Πλάτων επενόησεν μίαν διάταξιν, τον *κυβιστήν*, δια της οποίας ηδύνατο αμέσως να παρεμβάλλει μεταξύ των μηκών α και 2α τις μέσες αναλόγους β και γ.



Σχήμα 2: Ο Πλατωνικός *κυβιστής*.

Ομοίως, ο Ερατοσθένης κατεσκεύασεν όργανον, το *μεσολάβιον*, δια του οποίου παρενέβαλλεν τις δύο μέσες αναλόγους β και γ μεταξύ των μηκών α και 2α.



Σχήμα 3: Το *μεσολάβιον* του Ερατοσθένους.

3. Η αλληγορία του προβλήματος

Το εκτεθέν φαινομενικώς στερεομετρικόν μόνον «Δήλιον πρόβλημα» ή πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου έχει αλληγορικόν φιλοσοφικόν νόημα, αντανακλών

1. εις τον ετήσιον κύκλον της φύσεως,
2. εις την θεωρητικήν και την πρακτικήν μουσικήν,
3. εις την αστρονομίαν και την κοσμολογίαν σχετικώς με την διάταξιν των θείων ουρανίων γενητών, των επί σταθερών κυκλικών τροχιών περιφερομένων.

3.1. Ετήσιος κύκλος της φύσεως

Η ανάστασις και επαναφορά εις την ζωήν του νεαρού Κρητός πρίγκιπος, του Γλαύκου, είτε τῇ μεσολαβήσει του Αργείου μάντεως Πολυΐδου, του κατέχοντος την γνώσιν της θεραπευτικής δράσεως των βοτάνων, είτε τῇ θεϊκῇ δυνάμει του Ασκληπιού, το «Δήλιον πρόβλημα» ή το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου αλληγορικώς θεολογεί και θεοποιεί την ανακύκλησιν των εποχών και την αναγέννησιν της βλαστανούσης φύσεως κατά τον ετήσιον αυτής κύκλον.

3.2. Μουσική αλληγορία

3.2.1 Θεωρητική μουσική αλληγορία

Η έννοια μουσικόν «διάστημα» εις την Πυθαγόρειον θεωρίαν της Μουσικής ωρίζετο ως ο λόγος δύο αριθμών και εις την μουσικήν πράξιν ως ο λόγος των μηκών δύο ταλαντουμένων τμημάτων χορδής του μονοχόρδου ή του κανόνος.

Λόγω αυτού του ορισμού του μουσικού διαστήματος η Πυθαγόρειος θεωρία των μουσικών διαστημάτων εμφανίζει λογαριθμικόν χαρακτήρα και δια τούτο τα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα

- προστίθενται δια πολλαπλασιασμού των αριθμητικών των σχέσεων

$\delta_1 \oplus \delta_2 = (f_2/f_1) \oplus (g_2/g_1) = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{g_2}{g_1} = (f_2 g_2/f_1 g_1)$

- αφαιρούνται δια διαιρέσεως των αριθμητικών των σχέσεων

$\delta_1 \Theta\, \delta_2 = (f_2/f_1)\ \Theta\, (g_2/g_1) = \frac{f_2}{f_1} : \frac{g_2}{g_1} = (f_2 g_1/f_1 g_2)$, όπου $f_2\, g_1 > f_1 g_2$

- ο πολλαπλασιασμός των επί αριθμόν λ προκύπτει δι' υψώσεως της αριθμητικής των σχέσεως εις την λ δύναμιν

$\lambda\delta = (f_2/f_1) \oplus (f_2/f_1) \oplus \ldots \oplus (f_2/f_1) = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{\lambda} = (f_2^{\lambda}/f_1^{\lambda})$

- η διαίρεσίς των εις λ ίσα μεταξύ των μουσικά διαστήματα δίδεται υπό της λ τάξεως ρίζης της αριθμητικής των σχέσεως

$(1/\lambda)\delta = \sqrt[\lambda]{\frac{f_2}{f_1}} = \left(\sqrt[\lambda]{f_2}/\sqrt[\lambda]{f_1}\right)$.

Κατά τα ανωτέρω, εις το «Δήλιον πρόβλημα» αφενός ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Πλάτων και ο Ερατοσθένης εβασίσθησαν επί δύο ευθυγράμμων τμημάτων, των οποίων τα μήκη είχον σχέσιν 2:1, ήτοι εβασίσθησαν επί της σχέσεως της αρμονίας κατά τον Πυθαγόραν και τον Φιλόλαον ή διαπασών ή οκτάβας, αφετέρου η έκφρασις

«*ακμή μήκους* $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{2}{1}}$» ορίζει μουσικόν διάστημα ίσον προς το 1/3 της αρμονίας ή του διαπασών ή της οκτάβας.

Αυτό, όμως, άμεσα υπονοεί «*ίσον συγκερασμόν εις τρία*», ήτοι την τριχοτόμησιν της αρμονίας. Εν άλλοις λόγοις σημαίνει την διαίρεσιν της οκτάβας εις τρία ίσα μεταξύ των μουσικά διαστήματα με διτονιαίον μέγεθος εκάστου εξ οὗ και τριχοτόμησις της αρμονίας.

Τούτο είναι πρωτοφανές εις τα μουσικά χρονικά της πυθαγορείου μουσικής, δεδομένου ότι διδασκόμεθα ως εισηγητήν του ίσου συγκερασμού τον Αριστόξενον τον Ταραντίνον (354-300 π.Χ.), τον μαθητήν του Αριστοτέλους (384-322 π.Χ.), όστις διετέλεσεν μαθητής του Πλάτωνος.

Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι άρρητος, υπό την Πυθαγόρειον έννοιαν του όρου, ήτοι δεν επετρέπετο να κοινολογηθεί υπό των Πυθαγορείων επί ποινῇ θανάτου. Ο Πλάτων, ως Πυθαγόρειος, δεν ομιλεί περί αυτού εις ανοικτήν γλώσσαν, παρά μόνον «μύθῳ φιλοσοφών».

Δι’ αυτού του διτονιαίου μουσικού διαστήματος επέρχεται αναστάτωσις εις την συμπλήρωσιν των μέχρι στιγμής υπαρχουσών κατατομών κανόνος, διότι απαιτείται ο ακριβής προσδιορισμός των αρρήτων θέσεων νέων τάστων εις το μάνικον των εγχόρδων μουσικών οργάνων της εποχής.

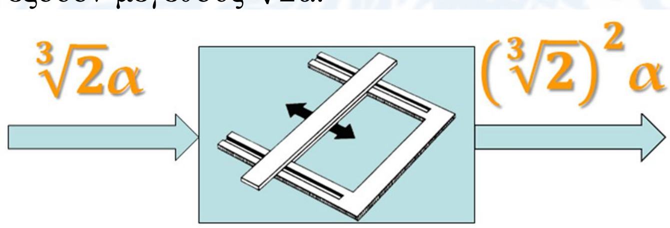
Πράγματι, μέχρι τότε ήσαν γνωστά δύο έτερα διτονιαία μουσικά διαστήματα, ήτοι η Πυθαγόρειος τρίτη $\left(\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}\right)$ με μέγεθος 4,0782 δωδέκατα της οκτάβας και το Αρχύτειον δίτονον, η μετέπειτα φυσική (just) τρίτη (5:4). Το Αρχύτειον δίτονον είναι κατά ένα κόμμα (81:80) μικρότερον της Πυθαγορείου τρίτης και έχει μέγεθος 3,8631 δωδέκατα της οκτάβας. Τώρα μεταξύ αυτών εγκαθίσταται το συγκερασμένον δίτονον $\sqrt[3]{2}$ με μέγεθος 4 δωδέκατα της οκτάβας και περί αυτού ομιλεί ο Πλάτων εις το 10^{ον} Βιβλίον της *Πολιτείας* του (617) δια του μύθου των Μοιρών.

3.2.2 Πρακτική μουσική αλληγορία

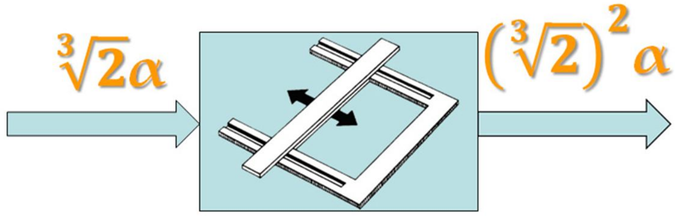
Το νέον διτονιαίον μουσικόν διάστημα $\sqrt[3]{2}$ οδηγεί εις μίαν νέαν Κατατομήν του Κανόνος, ήτοι εις μίαν νέαν χάραξιν (σημείωσιν) κατά μήκος του κανόνος των πρεπόντων μηκών των δονουμένων τμημάτων χορδής, ώστε ακουστικώς να δύναται να υλοποιηθεί. Ο Πλάτων θα επαναλάμβανε την έκφρασιν «ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος γεωμετρικός ἐστι» παρακινών εμάς να επιτύχωμεν την ζητουμένην κατατομήν του κανόνος γεωμετρικῷ τῷ τρόπῳ -κατ’ εμέ- ως ακολούθως:

Έστωσαν α και 2α τα μήκη των δύο ευθυγράμμων τμημάτων, των οριζόντων την σχέσιν 2:1 της αρμονίας (διαπασών ή οκτάβας). Έστω, επίσης, ο Πλατωνικός κυβιστής, αντιμετωπιζόμενος ως ένα black box με μίαν είσοδον και με μίαν έξοδον, το μέγεθος της οποίας εξόδου είναι $\sqrt[3]{2}$ φορές το μέγεθος της εισόδου.

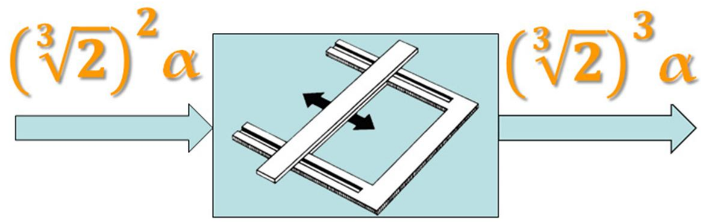
<u>Βήμα 1^{ον}</u>: Με είσοδον μεγέθους α εκ του Πλατωνικού κυβιστού λαμβάνομεν έξοδον μεγέθους $\sqrt[3]{2}$α.



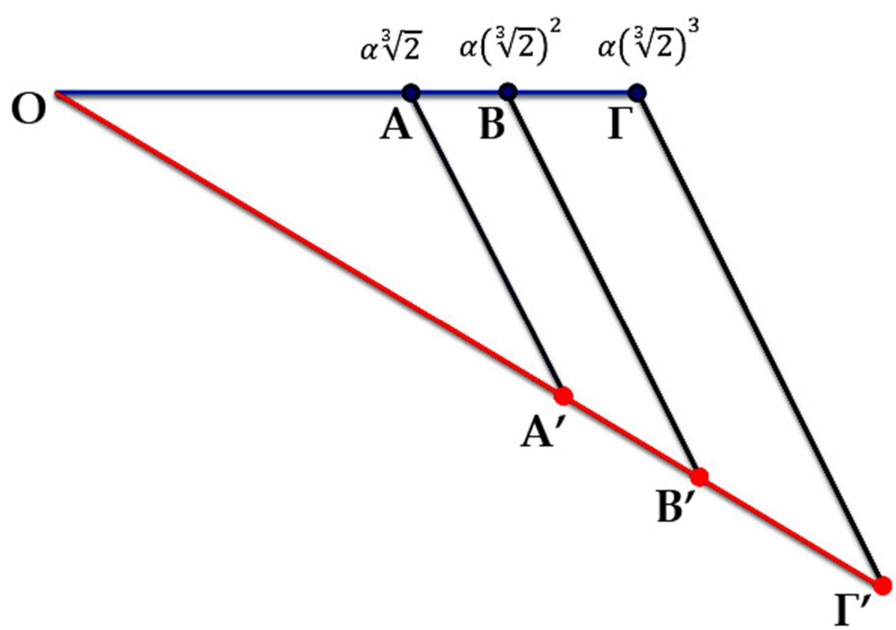
<u>Βήμα 2^{ον}</u>: Με είσοδον μεγέθους $\sqrt[3]{2}$α εκ του Πλατωνικού κυβιστού λαμβάνομεν έξοδον μεγέθους $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$α=$\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\alpha$.



Βήμα 3ον: Με είσοδον μεγέθους $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\alpha$ εκ του Πλατωνικού κυβιστού λαμβάνομεν έξοδον μεγέθους
$\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\alpha = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3\alpha = 2\alpha.$



Δια της ανωτέρω διαδικασίας ετριχοτομήθη μουσικώς το διάστημα της αρμονίας (2:1) μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων με μήκη α και 2α. Βάσει αυτής της μουσικής τριχοτομήσεως θα πρέπει κατ' αναλογίαν να τριχοτομήσωμεν γεωμετρικώς το μήκος L της χορδής ή του μάνικου εγχόρδου μουσικού οργάνου (κατατομή κανόνος) χρησιμοποιούντες το θεώρημα του Θαλού.
Δια του γεωμετρικού αυτού τρόπου επροσδιορίσθησαν επακριβώς τα μήκη των ζητουμένων αποψαλμάτων.



Σχήμα 5: Η κατατομή του κανόνος εις συγκερασμένα τρίτα της αρμονίας (διαπασών, οκτάβας).

3.3 Θεία γενητά

3.3.1 Αστρονομική αλληγορία

Ο προαναφερθείς ίσος συγκερασμός εις τρία πρέπει να απαντάται και εις κάποιαν μουσικήν κλίμακα διατονικού χαρακτήρος, ώστε να δύναται να διαιρείται και εις συγκερασμένους τόνους, ήτοι κατά τον ίσον συγκερασμόν εις έξι $\left(\sqrt[6]{2}\right)$ και εις συγκερασμένα ημίτονα, ήτοι κατά τον ίσον συγκερασμόν εις δώδεκα $\left(\sqrt[12]{2}\right)$.

Προκειμένου τα συγκερασμένα ημίτονα και οι συγκερασμένοι τόνοι να δύνανται δια συνθέσεως να δομούν μουσικά συγκερασμένα διτονιαία διαστήματα υπάρχει μία και μοναδική δομή της υπό συζήτησιν μουσικής κλίμακος, ήτις συνίσταται εκ δύο διεζευγμένων εναντιομόρφων τετραχόρδων, ήτοι τετραχόρδων κατοπτρικής δομής.
Τοιαύτα τετράχορδα είναι το Δώριον (τ-τ-η) και το Λύδιον (η-τ-τ) αμφότερα κατά την κατιούσα διαδοχήν.

Εκ πρώτης όψεως μία τοιαύτη δομή οκταχόρδου κλίμακος εκ δύο ανομοίων τετραχόρδων εν διαζεύξει είναι ανήκουστη για τα Πλατωνικά δεδομένα. Και όμως ο Πλάτων αναφέρει αλληγορικώς την ύπαρξίν της εις τον *Πολιτικόν* 270 d, e λέγων:

… ὅταν ἡ τῆς νῦν καθεστηκυίας ἐναντία γίγνηται τροπή…
Ἣν ἡλικίαν ἕκαστον εἶχε τῶν ζῴων, αὕτη πρῶτον μὲν ἔστη πάντων, καὶ ἐπαύσατο πᾶν ὅσον ἦν θνητὸν ἐπὶ τὸ γεραίτερον ἰδεῖν πορευόμενον, μεταβάλλον δὲ πάλιν ἐπὶ τοὐναντίον οἷον νεώτερον καὶ ἁπαλώτερον ἐφύετο**…**

[… όταν η κίνησις του σύμπαντος που επικρατεί σήμερον αντιστρέφεται…
Κατά πρώτον σταματά την πορεία της η ηλικία, την οποίαν είχεν έκαστον των ζώων και οιονδήποτε θνητόν παύει να εμφανίζει εξέλιξιν προς τα γηρατειά, ενώ, όταν η κατάστασις αντιστρέφεται, παρουσιάζεται νεότερον και τρυφερότερον…].

Τις ανάστροφες δομές του χρόνου κατά τις δύο περιόδους Κρόνου και Διός (*Πολιτικός* 272 b) εκλαμβάνω ως ανάστροφες δομές των δύο τετραχόρδων Δωρίου και Λυδίου εις την προαναφερθείσαν οκτάχορδον κλίμακα.

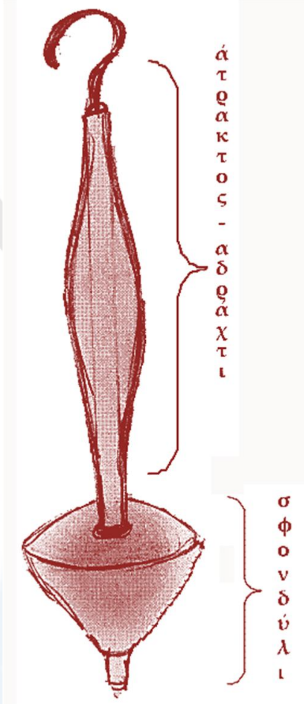
Η υπό συζήτησιν μουσική κλίμαξ θα είναι κατά μεν την κατιούσα διαδοχήν[3]
Δώριον τετράχορδον, διαζευκτικός τόνος, Λύδιον τετράχορδον A G F E D C♯ B A΄, κατά δε την ανιούσαν διαδοχήν[4] Λύδιον τετράχορδον, διαζευκτικός τόνος, Δώριον τετράχορδον A B C♯ D E F G A΄.

Επί των φθόγγων αυτής της μουσικής κλίμακος ο Πλάτων τοποθετεί τα περιφερόμενα περί την ακίνητον Γην θεία γενητά Σελήνη, Ερμής, Αφροδίτη, Ήλιος, Άρης, Ζεύς, Κρόνος, Απλανείς αστέρες.

Αυτήν την μουσικήν κλίμακα ο Πλάτων την συσχετίζει με την κοσμικήν μουσικήν του μύθου του Ηρός (*Πολιτεία*, 617b ff). Ο μύθος αυτός ομιλεί περί του αναστάντος Ηρός του Αρμενίου, η ψυχή του οποίου κατά την διάρκειαν του ταξιδίου του εντός των ουρανών είδεν μίαν τεραστίαν στήλην φωτός, διερχομένη δια του κέντρου του κόσμου. Τμήμα αυτού του κοσμικού άξονος απετελείτο εξ ενός αδραχτιού μετ’ οκτώ σφονδυλίων, συνδεδεμένων μετ’ αυτού. Το συγκεκριμένον αδράχτι συμβολίζει το κοσμικόν σύστημα των απλανών αστέρων και των πλανητών, οίτινες περιφέρονται περιστρεφόμενοι περί τον άξονα του σύμπαντος (Σχήματα 6 και 7). Ο Ηρ, επίσης, παρατήρησεν οκτώ Σειρήνες καθήμενες εις το χείλος των σφονδυλίων του αδραχτιού, εκάστη άδουσα έναν συγκεκριμένον φθόγγον (αρμονία των ουρανίων σφαιρών).

[3] Αυτή η φορά αναφέρεται εις την μη πραγματικήν κίνησιν των θείων γενητών, ότι δηλαδή τα πλησιέστερα ουράνια σώματα περιφέρονται με μεγαλυτέραν ταχύτητα των απωτέρων ως προς την Γην και, συνεπώς, παράγουν οξυτέρους ήχους.

[4] Αυτή η φορά αναφέρεται εις την πραγματικήν κίνησιν των θείων γενητών, ότι δηλαδή τα απώτερα ουράνια σώματα περιφέρονται με μεγαλυτέραν ταχύτητα των πλησιεστέρων ως προς την Γην και, συνεπώς, παράγουν οξυτέρους ήχους.



Σχήμα 6: Δομή αδραχτιού.

Σχήμα 7: Τα οκτώ σφονδύλια του Ηρείου αδραχτιού.

3.3.2 Κοσμολογική αλληγορία

Η ιδέα του αδραχτιού προέρχεται εκ των μυθολογικών υφαντών της μοίρας των ανθρώπων, ήτοι των μοιρών (Πλάτων, *Πολιτεία*, 617 b-d) (Εικών 1).

Εικών 1: Οι μοίρες, οι μυθολογικοί υφαντές της μοίρας των ανθρώπων.

Τρεις λευκοφορεμένες γυναίκες, οι Μοίρες, οι θυγατέρες της Ανάγκης, φέρουσες τα ονόματα Λάχεσις, Κλωθώ και Άτροπος «κύκλω καθήμεναι» εις ίσες μεταξύ των αποστάσεις επί των τριών θρόνων των, άδουν εις τις

μελωδίες των σειρήνων η Λάχεσις τα παρελθόντα, η Κλωθώ τα παρόντα και η Άτροπος τα μέλλοντα να συμβούν.

Η Κλωθώ, εγγίζουσα το αδράχτι με την δεξιάν της χείρα κατά διαστήματα, εβοήθει την περιστροφήν των εξωτερικών του μερών. Η Άτροπος, εγγίζουσα το αδράχτι με την αριστεράν της χείρα κατά διαστήματα, εβοήθει την περιστροφήν των εσωτερικών του μερών. Η Λάχεσις, εγγίζουσα το αδράχτι πότε με την δεξιάν και πότε με την αριστεράν της χείρα κατά διαστήματα, εβοήθει την περιστροφήν των εξωτερικών και των εσωτερικών του μερών.

Ως προελέχθη, επί των φθόγγων της μνημονευθείσης μουσικής κλίμακος των δύο διεζευγμένων εναντιομόρφων τετραχόρδων ο Πλάτων τοποθετεί τα περιφερόμενα θεία γεννητά Σελήνη, Ερμής, Αφροδίτη, Ήλιος, Άρης, Ζεύς, Κρόνος, Απλανείς αστέρες. Τα τέσσερα πρώτα επί των φθόγγων του κατιόντος Δωρίου ή ανιόντος Λυδίου τετραχόρδου και τα υπόλοιπα τέσσερα επί των φθόγγων του ανιόντος Δωρίου ή κατιόντος Λυδίου τετραχόρδου αντιστοίχως.

Πλησίον κάποιων φθόγγων αυτής της κλίμακος κάθηνται οι μοίρες, διότι άδουν την ιδίαν μελωδίαν μετά κάποιων σειρήνων. Κάθηνται ισαπέχουσες μεταξύ των κατά μουσικά συγκερασμένα διτονιαία διαστήματα (Σχήμα 8).

Επί τῇ βάσει των πληροφοριών της πραγματικής κινήσεως των θείων γενητών, ο θρὀνος της Λαχέσεως – προκειμένου να δύναται αυτή να επηρεάζει την περιφοράν και των εσωτερικών και των εξωτερικών πλανητών- τοποθετείται επί της Υπάτης και της Νήτης[5] ένθα ο φθόγγος A, αντιδιαμετρικώς προς το μέσον της κλίμακος $(\sqrt{2})$, ήτοι το μέσον Μέσης και Παραμέσης.

Ο θρόνος της Ατρόπου τοποθετείται εις το Λύδιον ανιόν τετράχορδον των εσωτερικών πλανητών και εις απόστασιν ενός συγκερασμένου διτονιαίου μουσικού διαστήματος εκ της Λαχέσεως, ήτοι εγγύτατα του φθόγγου C♯, τον λιχανόν της κλίμακος.

Ο θρόνος της Κλωθούς τοποθετείται εις το Δώριον ανιόν τετράχορδον των εξωτερικών πλανητών και εις απόστασιν ενός συγκερασμένου διτονιαίου μουσικού διαστήματος εκ της Λαχέσεως, ήτοι εγγύτατα του φθόγγου F, την τρίτην της κλίμακος.

[5] Λόγω της κυκλικής τοποθετήσεως των τριών θρόνων.

Σχήμα 8: Οι θέσεις των θρόνων των τριών μοιρών «κύκλῳ ίσαπέχουσαι».

Ο λιχανός C♯ απέχει εκ της υπάτης κατά 4,0782 συγκερασμένα ημίτονα, ενώ ο θρόνος της Ατρόπου απέχει εκ της υπάτης ακριβώς 4 συγκερασμένα ημίτονα. Τουτέστιν, λόγω του ίσου συγκερασμού εις τρία, έχομεν μίαν εκτροπήν προς τα αριστερά της τροχιάς της Αφροδίτης, την οποίαν δια της αριστεράς της χειρός διορθώνει η Άτροπος.

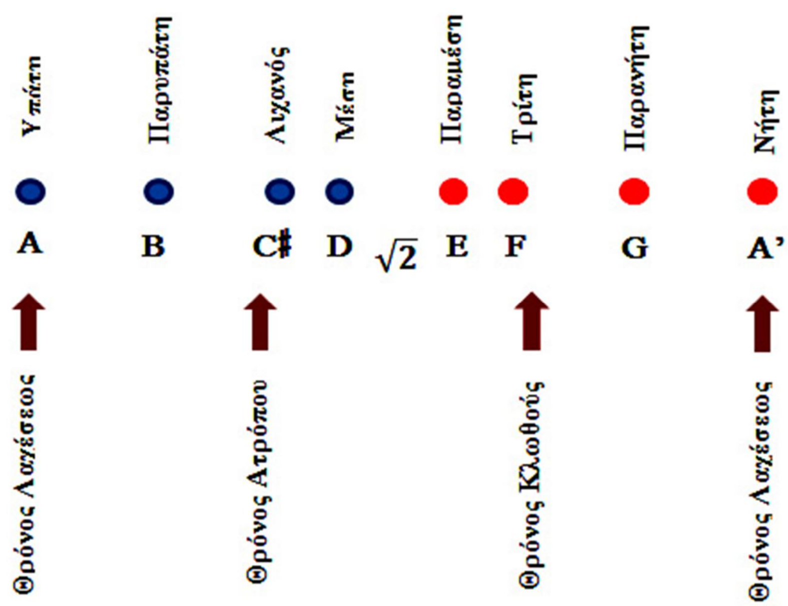
Η τρίτη F απέχει κανονικώς εκ της νήτης κατά 4,0782 συγκερασμένα ημίτονα, ενώ ο θρόνος της Κλωθούς απέχει εκ της νήτης ακριβώς 4 συγκερασμένα ημίτονα. Τουτέστιν, λόγω του ίσου συγκερασμού εις τρία, έχομεν μίαν εκτροπήν προς τα δεξιά της τροχιάς του Διός, την οποίαν δια της δεξιάς της χειρός διορθώνει η Κλωθώ.

Ως προελέχθη, ο θρὸνος της Λαχέσεως τοποθετείται αντιδιαμετρικώς προς το κέντρον της κλίμακος $(\sqrt{2})$, ήτοι του μέσου Μέσης και Παραμέσης, ένθα το κέντρον συμμετρίας της μελετουμένης μουσικής κλίμακος. Τον άρρητον αριθμόν $(\sqrt{2})$, τον διχοτομούντα την αρμονίαν, κατά καιρούς αριθμητικώς τον προσήγγισαν ποικιλοτρόπως.

Οι Ινδοί την εποχήν των Βεδών (1500 – 1000 π.Χ.) τον προσήγγισαν δια του λόγου $\frac{7}{5}$. Επί τῇ βάσει αυτής της αριθμητικής τιμής το μέσον της αρμονίας τοποθετείται εις απόστασιν 5,82512 συγκερασμένων ημιτόνων εκ της υπάτης αντί 6. Εμφανίζεται δηλαδή μία εκτροπή του προς τα αριστερά.

Οι Πυθαγόρειοι τον προσήγγισαν δια του λόγου $\frac{729}{512}$ (ο Πλάτων αλληγορικώς αναφέρεται εις τον αριθμόν 729 εις το IX βιβλίον της *Πολιτείας*). Επί τῇ βάσει αυτής της αριθμητικής τιμής το μέσον της αρμονίας τοποθετείται εις απόστασιν 6,11730 συγκερασμένων ημιτόνων

εκ της υπάτης αντί 6. Εμφανίζεται δηλαδή μία εκτροπή του προς τα δεξιά.
Οι θεωρητικοί του Φυσικού χορδίσματος (just tuning) τον προσήγγισαν δια των λόγων $\frac{45}{32} = \frac{720}{512}$ και $\frac{78125}{55296}$. Επί τῇ βάσει αυτών των αριθμητικών τιμών το μέσον της αρμονίας τοποθετείται εις απόστασιν 5,90224 και 5,98331 συγκερασμένων ημιτόνων εκ της υπάτης, αντιστοίχως, αντί 6. Εμφανίζονται δηλαδή εκτροπές προς τα αριστερά. Τις προς αμφότερες τις κατευθύνσεις εκτροπές των ουρανίων γενητών, οι οποίες αντανακλούν εις την θέσιν του θρόνου της Λαχέσεως, διορθώνει η Λάχεσις χρησιμοποιούσα εκάστοτε την πρέπουσα χείρα της (Σχήμα 9).



Σχήμα 9:Οι επιπτώσεις του Πλατωνικού ίσου συγκερασμού εις τρία επί της αρμονίας των ουρανίων σφαιρών.

Κατακληίς

Η λύσις του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου ή του «Δηλίου προβλήματος» υποδηλοί την λύσιν της μουσικής τριχοτομήσεως της αρμονίας (διαπασών ή οκτάβας), ήτοι κατ’ ουσίαν τον ίσον συγκερασμόν, την κλείδα επιλύσεως δια των εναρμονίων φθόγγων παντός μελωδικού και αρμονικού προβλήματος εις μουσικούς πολιτισμούς ωσάν τον σύγχρονον ευρωπαϊκόν.
Ο μέγιστος Πλάτων εις τον διάλογόν του *Πολιτεία* ή *περὶ δικαίου* μύθῳ φιλοσοφῶν (ο μύθος των τριών μοιρών) εισάγει μεταξύ πλείστων άλλων μοναδικών μουσικών θεμάτων και τον ίσον συγκερασμόν εις τρία, η

εφαρμογή του οποίου εις την θεωρίαν της αρμονίας των ουρανίων σφαιρών επιφέρει αρμονικές διορθώσεις εις τις μεταξύ των συνηχήσεις και μέσω αυτών εις τις παρατηρούμενες εκτροπές εκ των κυκλικών των τροχιών των κινήσεων των θείων γενητών.

Κυρίες και κύριοι σύνεδροι, εισηγούμαι εις το Συνέδριόν μας, περαίνων την εισήγησίν μου, ως εμπνευστήν του ίσου συγκερασμού να αποδεχθώμεν τον μέγιστον Πλάτωνα.

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
e-mail: hspyridis@music.uoa.gr
☎ 210 - 72.77.832

ΕΡΑΝΙΣΜΑ

ΑΠΟ

ΤΗΝ

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΜΟΥΣΙΚΗ

«Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος

καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὴν συμμετρίαν

καὶ συμμετρία ἦν ὁ λόγος»

Πυθαγόρειοι

Ο Θέων ο Σμυρναίος στο έργο του «*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*» μας πληροφορεί ότι η λέξη «*λόγος*» θεωρείται από τους περιπατητικούς ως έχουσα πολλές έννοιες. Λόγο ονομάζουν την ομιλία, δηλαδή τον προφορικό λόγο, ακόμη μια ομιλία που γίνεται σε συναθροισμένο πλήθος λ.χ. ο Δημοσθενικός λόγος, ο Λυσιακός λόγος. Λόγο ονομάζουν τον συλλογισμό, την επαγωγή, τον μύθο, το εγκώμιο, την παροιμία. Λόγο ονομάζουν τη διανοητική συλλογιστική χωρίς εκπομπή φωνής. Λόγο ονομάζουν την αναλογία.
Στον Πλάτωνα ο «*λόγος*» χρησιμοποιείται με τέσσερις έννοιες. Ονομάζει λόγο

- τη νοητική και όχι τη ρηματική διανόηση,
- τις αγορεύσεις που ξεκινώντας από το πνεύμα εκφράζονται από τη φωνή,
- την επεξήγηση των στοιχείων του Σύμπαντος και
- τον λόγο της αναλογίας.

Κατά τον Άδραστο ο λόγος της αναλογίας εκφράζει μία σχέση μεταξύ ομοειδών οντοτήτων.

Από την άλλη μεριά «*συμμετρικό*» σημαίνει κάτι που έχει καλές αναλογίες, που είναι καλά ισορροπημένο και η λέξη «*συμμετρία*» υποδηλώνει αυτήν την ιδιαίτερη συμφωνία πολλών μερών με την οποία συγκροτούν ένα σύνολο.
Στο βιβλίο του περί αναλογιών ο Πολύκλειτος, τον οποίον οι αρχαίοι επαίνεσαν για την αρμονική τελειότητα των γλυπτών του, γράφει ότι η ομορφιά είναι συνδεδεμένη με τη συμμετρία.
Υπογραμμίζω ότι η συμμετρία με κανένα τρόπο δεν περιορίζεται μόνο σε αντικείμενα στο χώρο. Το συνώνυμο «*αρμονία*» τονίζει περισσότερο τις ηχητικές και μουσικές παρά τις γεωμετρικές της εφαρμογές.
Ο Βιτρούβιος ορίζει: «*Η συμμετρία απορρέει από την αναλογία, δηλαδή τον λόγο των ποικίλων συστατικών μερών προς το σύνολο*».
Η συμμετρία, λοιπόν, όσο πλατιά ή όσο στενά κι αν ορίσουμε τη σημασία της, είναι μια αντίληψη με την οποία ο άνθρωπος διαμέσου των αιώνων έχει προσπαθήσει να κατανοήσει και να δημιουργήσει τάξη, ομορφιά και τελειότητα.
Στον Ευκλείδη ο *σύμμετρος*, δηλαδή ο *ανάλογος*, ονομάζεται *ρητός* και το αντίθετό του είναι ο *άρρητος* και ο *άλογος*.

Η Μουσική για τους Πυθαγορείους αποτελούσε τη «*Θεωρία των λόγων*» και συγκαταλεγόταν ως τρίτο μέρος ανάμεσα στα τέσσερα μέρη της Μαθηματικής επιστήμης (Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική, Αστρονομία).

Για να καταστεί κατανοητό το θεωρητικό μέρος της Μουσικής, της Αστρονομίας, της Γεωμετρίας και της Φιλοσοφίας του Πλάτωνος και του Αριστοτέλους πρέπει να ορισθεί η έννοια της *μεσότητος* ή *αναλογικότητος* ή της *αναλογίας.*

Η θεωρία των αναλογικοτήτων ή των αναλογιών φαίνεται να πρωτοεισήχθη από τον Θαλή ($7^{ος}$-$6^{ος}$ π.Χ. αι.) και μετά να υπέστη από τους Πυθαγορείους συνεχείς βελτιώσεις. Βρήκε εφαρμογή

- στον τομέα των καθαρών Μαθηματικών (‘Ιππασος ο Μεταποντίνος [$6^{ος}$-$5^{ος}$ π.Χ. αι.], Ιπποκράτης ο Χίος [470-400 π.Χ.]),
- στη Μουσική (‘Ιππασος ο Μεταποντίνος, Φιλόλαος [530-470 π.Χ.], Αρχύτας ο Ταραντίνος [430-350 π.Χ.]),
- στη Γλυπτική (Πολύκλειτος ο Αργείος [$4^{ος}$ π.Χ. αι.]), και
- στην Ιατρική (!) (Αλκμαίων [570-500 π.Χ.], Φιλόλαος).

Ο στοιχειωτής Ευκλείδης μας διδάσκει την προϊστορία της αναλογίας στο βιβλίο V των Στοιχείων του. Πρέπει να τονισθεί ότι η Ευκλείδειος ορολογία της διδασκαλίας για την αναλογία προδίδει τη σχέση της προς τη θεωρία της Μουσικής.

Ο Πρόκλος ορίζει την αναλογία στο «*Ὑπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τίμαιον*» ως

- *«την ταυτότητα του λόγου και ως τον πλέον υπέροχο εκ των δεσμών»*,
- *«Αναλογικότητα είναι η αναγωγή δύο ή περισσοτέρων λόγων σε έναν»,*
- «Αναλογικότητα είναι η όμοια σχέση δύο ή περισσοτέρων λόγων, οι οποίοι δεν έχουν δομηθεί από τις ίδιες ποσότητες και διαφορές»,
- *«Λόγος είναι μια ορισμένη σχέση μεταξύ δύο όρων, που παράγει το αναλογικό ή ανάλογο και η αναλογικότητα προκύπτει από την ένωση λόγων».*

Τρεις αναλογίες, η Αριθμητική, η Γεωμετρική και η Αρμονική (ή Υπενάντιος), ήσαν γνωστές στους πιο αρχαίους Μαθηματικούς και οι οποίες παρουσιάσθηκαν στη φιλοσοφία του Πυθαγόρου (580-490 π.Χ.), του Πλάτωνος (427-347 π.Χ.) και του Αριστοτέλους (384-322 π.Χ.). Αυτές οι τρεις αναλογικότητες (μεσότητες) σύμφωνα με τον *Ιάμβλιχο* (346-414 μ.Χ.) χρησιμοποιήθηκαν από τον *Πλάτωνα* μέχρι τον *Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.)*.

«μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητική τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ Ἀρχύταν αὖθις καὶ Ἵππασον ἁρμονικὴ μετακληθεῖσα ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα».

[*παλιά κατά την εποχή του Πυθαγόρου και των μαθηματικών του υπήρχαν τρεις μεσότητες, η αριθμητική, η γεωμετρική και η τρίτη που ονομάζετο μεν υπεναντία. Από δε τον Αρχύτα, τον Ίππασο και τους μαθητές τους ονομάσθηκε αρμονική, διότι φαίνεται ότι περιέχει τους μουσικούς αρμονικούς λόγους*].

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός υπογραμμίζει ότι οι τρεις αυτές πρώτες αναλογίες πήραν τα ονόματά τους από τις τρεις πρώτες επιστήμες, δηλαδή την Αριθμητική, τη Γεωμετρία και την Αρμονική (=Μουσική).

Η Αριθμητική αναλογία

Εάν μεταξύ τριών δοθέντων ακεραίων αριθμών $\alpha > \beta > \gamma$ ισχύει η ισότητα των διαφορών $\alpha - \beta = \beta - \gamma$, λέμε ότι δομείται μια αριθμητική αναλογία.

Ο μεσαίος αριθμός β ονομάζεται αριθμητικός μέσος και εκφράζεται συναρτήσει των δύο άκρων αριθμών ως $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Πρέπει να τονισθεί ότι η Αριθμητική αναλογία ονομάζεται και «*αναλογία κατά ποσότητα*», διότι σε αυτήν δεν ισχύει η ισότητα των λόγων μεταξύ των τριών διαδοχικών όρων, αλλά η ισότητα των διαφορών τους.

Εάν μεταξύ των μερών ενός συνόλου δεν ισχύει η ταυτότητα του λόγου, δεν υφίσταται συνοχή μεταξύ των μερών του συνόλου. Γι' αυτό την αριθμητική αναλογία 1, 2, 3, 4, ... οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί την ονόμαζαν *Φυσικόν χύμα* (μη συνεκτικόν) και κατά τον Μιχαήλ Ψελλό ο Πλάτων την αποκαλεί στον Τίμαιο στο περί γενέσεως της Ψυχής του Κόσμου «*ετερότητα*».

Ο Πρόκλος στο «*Ὑπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τίμαιον*» αποκαλεί τον αριθμητικό μέσο *Ε ι ρ ή ν η*, όνομα της κόρης της Θέμιδος και τούτο, διότι υπερβαίνει και υπερβαίνεται από μια ίση ποσότητα και τον χρησιμοποιούμε στις συναλλαγές μας εν καιρώ ειρήνης.

Οι προγενέστεροι του Νικομάχου (50-120 μ.Χ.) εγνώριζαν ότι στην αριθμητική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι μεγαλύτερος του λόγου των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{2}{1} > \frac{3}{2}$, αφού ο πρώτος λόγος είναι ο διπλάσιος και ο δεύτερος είναι ο ημιόλιος. Βάσει αυτού ο α ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς μ έ σ ο ς σ υ γ κ ρ ί ν ε τ α ι μ ε τ η ν ο λ ι γ α ρ χ ί α ή τ η ν π ο λ ι τ ε ί α π ο υ κυ-β ε ρ ν ά τ α ι α π ό λ ί γ ο υ ς, ο ι ο π ο ί ο ι ε π ι δ ι ώ κ ο υ ν τ ο δ ι κ ό τ ο υ ς κ α λ ό κ α ι ό χ ι α υ τ ό τ η ς π ο λ ι τ ε ί α ς.

Η Γεωμετρική αναλογία

Εάν μεταξύ τριών δοθέντων ακεραίων αριθμών $\alpha > \beta > \gamma$ ισχύει η ισότητα των λόγων $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, λέμε ότι δομείται μια γεωμετρική αναλογία.

Ο μεσαίος αριθμός β ονομάζεται γεωμετρικός μέσος και εκφράζεται συναρτήσει των δύο άκρων αριθμών ως $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$. Παράδειγμα γεωμετρικής αναλογίας αποτελεί η τριάδα των αριθμών 4, 2, 1, διότι $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ και $2 = \sqrt{1 \cdot 4}$.

Ο Πρόκλος στο «*Ὑπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τίμαιον*» αποκαλεί τον γεωμετρικό μέσο *Ε υ ν ο μ ί α*, δηλαδή δίκαιη νομοθεσία, όνομα της άλλης κόρης της Θέμιδος, και ο Πλάτων τον ονομάζει *κρίση του Δία* μέσω της οποίας το σύμπαν κοσμείται με γεωμετρικές αναλογίες.

Οι προγενέστεροι του Νικομάχου εγνώριζαν ότι στη γεωμετρική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι ίσος προς το λόγο των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ (αναλογία κατά ποιότητα), αφού και οι δύο εκφράζουν τον διπλάσιο λόγο. Βάσει αυτού ο γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ό ς μ έ σ ο ς ε ί ν α ι α ν ά λ ο-

γος προς μια λαϊκή κυβέρνηση, όπου τόσο ο φτωχός, όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση.

Η αρμονική αναλογία

Εάν μεταξύ τριών δοθέντων ακεραίων αριθμών $\alpha > \beta > \gamma$ ο μεσαίος δεν έχει τον ίδιο λόγο με τους άκρους ως επόμενος του ενός και προηγούμενος του άλλου, όπως συμβαίνει στη γεωμετρική αναλογία, ούτε έχει ίσες διαφορές και άνισους λόγους, όπως συμβαίνει στην αριθμητική αναλογία, αλλά ο μέγιστος προς τον ελάχιστο όρο έχει λόγο ίσο με το λόγο της διαφοράς του μέσου από τον μέγιστο προς τη διαφορά του ελάχιστου από τον μέσο $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$, λέμε ότι δομείται μια αρμονική αναλογία.

Παράδειγμα αρμονικής αναλογίας αποτελεί η τριάδα των αριθμών 6, 4, 3, διότι $\frac{6}{3}=\frac{6-4}{4-3}$. Ο μεσαίος αριθμός β ονομάζεται αρμονικός μέσος και εκφράζεται συναρτήσει των δύο άκρων αριθμών ως $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$.

Οι προγενέστεροι του Νικομάχου εγνώριζαν ότι στην αρμονική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι μικρότερος του λόγου των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{4}{3}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, αφού ο πρώτος είναι επίτριτος και ο δεύτερος είναι ημιόλιος. Για το λόγο αυτό η αρμονική πρόοδος ονομάζεται *υπεναντία* της αριθμητικής προόδου.

Βάσει αυτού ο αρμονικός μέσος λέγεται ότι αντιστοιχεί στην αριστοκρατία, επειδή υπάρχει μεγαλύτερος λόγος στους μεγαλύτερους όρους.

Ο Πρόκλος στο «*Ὑπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τίμαιον*» θεωρεί ότι ο αρμονικός μέσος έχει σχέση με τη Δίκη ή Δικαιοσύνη, μέσω της οποίας οι μεγαλύτεροι όροι έχουν ένα μεγαλύτερο λόγο και οι μικρότεροι ένα μικρότερο λόγο.

Επειδή μεταξύ των μερών της αρμονικής αναλογίας ισχύει η ταυτότητα του λόγου, υφίσταται συνοχή μεταξύ αυτών και κατά τον Μιχαήλ Ψελλό ο Πλάτων την αποκαλεί στον Τίμαιο στο περί γενέσεως της Ψυχής του Κόσμου «*ταυτότητα*».

«Τῶν δὲ μεσοτήτων τριῶν οὐσῶν ἡ μὲν γεωμετρικὴ τὸ οὐσιῶδές πως συνδεῖ τῶν ψυχῶν, ἡ δὲ ἁρμονικὴ τὴν ταὐτότητα, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τὴν ἑτερότητα»

Μιχαήλ Ψελλός, Γεωργίου του Κεδρηνού Σύνοψις Ιστοριών, τόμος XI, έτος 1058.

...τῆς ἀμερίστου
καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος

Πλάτωνος Τίμαιος (35 α, 1-3)

[*Ανέμειξε (ο Θεός) την ουσία του ταυτού (αμερούς, αμεταβλήτου) με την ουσία του ετέρου (μεριστού, μεταβλητού) και εδημιούργησε από τις δύο μια τρίτη ενδιάμεση ουσία*].

$$\frac{2xy}{x+y}=\frac{xy}{\frac{x+y}{2}}=\frac{\left(\sqrt{xy}\right)^2}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2xy}{x+y}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow \frac{\text{αρμονικός μέσος}}{\text{γεωμετρικός μέσος}}=\frac{\text{γεωμετρικός μέσος}}{\text{αριθμητικόςμέσος}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ}}{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}}=\frac{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}}{\text{ΕΤΕΡΟΤΗΤΑ}}$$

Εφόσον μεταξύ των τριών μερών
- ταυτότης,
- ετερότης,
- ουσιώδες

δομείται ισότης λόγων, το όλον που προκύπτει χαρακτηρίζεται από ισχυρά συνοχή. Με αυτό το συνεκτικό υλικό ο Θεός θα πλάση την ψυχή του κόσμου, ακολουθώντας έναν συγκεκριμένο αλγόριθμο, ο οποίος έχει ως εξής:

μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς
μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ
τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης,
τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλῆν, πέμπτην δὲ τριπλῆν τῆς
τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ'
ἑπτακαιεικοσιπλασίαν τῆς πρώτης· μετὰ δὲ ταῦτα συνε-
πληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας
ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε
ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ
μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν
δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.
ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπιτρίτων καὶ ἐπογδόων γενο-
μένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν,
τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα πάντα συνεπληροῦτο,

Ο εν λόγω αλγόριθμος αλγεβρικώς εκφραζόμενος παρέχει τη σειρά των αριθμών 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27, τη λεγομένη «*μεγίστη τετρακτύς των Πυθαγορείων*».

x	2x	$\frac{3}{2}(2x)$	2(2x)	$3[\frac{3}{2}(2x)]$	8x	27x
1os	2os	3os	4os	5os	6os	7os
x	2x	3x	4x	9x	8x	27x

Δπλ Δπλ Δπλ

Τρπλ Τρπλ Τρπλ

Ο Πρόκλος αναφέρει (*Ὑπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τίμαιον*) ότι ο Πλούταρχος στο έργο του «*εν Τιμαίω ψυχογονίας*» σχολιάζει το χωρίο αυτό (35a 1-36b 5) του Πλατωνικού Τιμαίου και το χαρακτηρίζει ως ένα από τα πλέον δύσκολα ως προς την κατανόησή του μέσα στο συνολικό Πλατωνικό έργο.
Στο εν λόγω χωρίο ο Πλάτων αναφέρει το πώς εδημιουργήθη η ψυχή του κόσμου. Με την έννοια «*ψυχή*» ο Πλάτων πρέπει να θεωρεί και την έννοια «μουσική κλίμακα» και την έννοια «συχνοτικό εύρος». Το συγκεκριμένο χωρίο πρέπει να ομιλεί για μια διαδικασία της κατατομής του συμπαντικού μονοχόρδου κανόνος, δηλαδή της κατατομής της μουσικά εκτελούμενης ηχητικής περιοχής, η οποία εκάλυπτε μια έκταση (ampitus) δύο δις διαπασών, ενός διαπέντε και ενός επογδόου.

Στον αλγόριθμό του ο Πλάτων μας παραγγέλλει να συμπληρώσουμε τα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα με τις αρμονικές και τις αριθμητικές μεσότητες, οπότε καταλήγει να δημιουργεί την Ψυχή του Κόσμου με τους κάτωθι αριθμούς:

Πίνακας 1: Αναλυτική παρουσίαση των βημάτων του αλγορίθμου του Πλάτωνος για τη δημιουργία της Ψυχής του Κόσμου.

384	432	486	512	576	648	729	768
x	$\frac{9}{8}x$	$\frac{81}{64}x$	$\frac{4}{3}x$	$\frac{3}{2}x$	$\frac{27}{16}x$	$\frac{243}{128}x$	2x
768	864	972	1024	1152	1296	1458	1536
2x	$\frac{9}{4}x$	$\frac{81}{32}x$	$\frac{8}{3}x$	3x	$\frac{27}{8}x$	$\frac{243}{64}x$	4x
1536	1728	1944	2048Α2187Λ	2304	2592	2916	3072
4x	$\frac{9}{2}x$	$\frac{81}{16}x$	$\frac{16}{3}x$	6x	$\frac{27}{4}x$	$\frac{243}{32}x$	8x
3072	3456	3888	Λ1096Α4374	4608	5184	5832	6144
8x	9x	$\frac{81}{8}x$	$\frac{729}{64}x$	12x	$\frac{27}{2}x$	$\frac{243}{16}x$	16x
6144	6912	7776	8748	9216	10368		
16x	18x	$\frac{81}{4}x$	$\frac{729}{32}x$	24x	27x		

Μιλώντας με σημερινούς μουσικούς όρους και χρησιμοποιώντας το Αγγλοσαξωνικό σύστημα σημειογραφίας όλα τα παραπάνω σημαίνουν ότι οι φθόγγοι κατά την Κατατομή του Πλάτωνος εκτείνονται από το φθόγγο E_x έως τον φθόγγο G_{x-4}, $x \in N$.
Εάν ληφθεί x=6, τότε έχουμε ως υψηλότερο μουσικό ύψος κατά το συγκερασμένο σύστημα αυτό του φθόγγου E_6 (1318,5 Hz) και ως χαμηλότερο μουσικό ύψος αυτό του φθόγγου G_2 (97,9 Hz). Σήμερα δεχόμαστε ως κάτω μουσικό ύψος για τη φωνή του μπάσσου το φθόγγο E_2 (82,7 Hz) και ως άνω μουσικό ύψος για τη φωνή της υψιφώνου το φθόγγο D_6 (1174,7 Hz).

Κυρίες και κύριοι, όλα τα παραπάνω αποδεικνύουν τη σοβαρότητα με την οποία αντιμετώπιζε τη μουσική ο Πλάτων. Όχι τη μουσική εν γένει, αλλά τη μουσική την αρμόζουσα στην ιδανική του Πολιτεία. Συγκεκριμένα:

- Στον Κρατύλο ο Πλάτων ετυμολογεί τη λέξη «*μουσική*» από το ρήμα «*μώσθαι*», που σημαίνει σφοδρή επιθυμία για κάτι. Με αυτή την ετυμολόγηση η μουσική σημαίνει αναζήτηση της σοφίας.
- Στον Κρατύλο (*Κρατύλος 406, a 3-5*) διαβάζουμε ότι αυτή ακριβώς είναι και η αποστολή της φιλοσοφίας.
- Στον Σοφιστή (*Σοφιστής 259 c 2*) οι όροι «*άμουσος*» και «*αφιλόσοφος*» είναι ταυτόσημοι.
- Στον Τίμαιο (*Τίμαιος 88 c 1-6*) δηλούται ότι για μια σωστή ισορροπία σώματος και ψυχής, εκτός από τη Γυμναστική, είναι απαραίτητη η άσκηση σε ισότιμη βάση της μουσικής και της φιλοσοφίας.
- Στον Φαίδωνα (*Φαίδων 60 e 6-7* και *61 a 3*) ο Σωκράτης διακηρύσσει «*μουσικήν ποίει και εργάζου*» καθώς επίσης «*ως φιλοσοφίας ούσης μεγίστης μουσικής*» και γι' αυτό εξεπλήρωσε την του θεού επιταγήν ασχολούμενος δια βίου με τη φιλοσοφία.
- Στο Συμπόσιο ο Πλάτων μας δίδει να καταλάβουμε ότι υπάρχουν δύο είδη μουσικής: αυτή που απευθύνεται στο αυτί μας, *η αισθητή μουσική*, και αυτή που απευθύνεται στους φιλοσόφους, η οποία δεν είναι ακουστή ως ενυπάρχουσα στο ανθρώπινο πνεύμα, *η νοητή μουσική*. Η αισθητή μουσική παραμένει στο επίπεδο της τέχνης, χαρακτηριζόμενη από ασάφεια και αβεβαιότητα, διότι δεν λειτουργεί με βάση τον στοχασμό, αλλά την εμπειρία «*ώστε πολύ μεμειγμένον έχειν το μή σαφές, σμικρόν δε το βέβαιον*» (*Φίληβος 56 a 6-7*). Η ασάφεια αυτή δεν υπάρχει στη νοητή μουσική, διότι οι μουσικοί-φιλόσοφοι αποφεύγοντες την αβεβαιότητα του αυτιού, καταφεύγουν στην βεβαιότητα του νου «*ώτα του νου προστησάμενοι*» (*Πολιτεία 531 b 1*). Δηλαδή η ευχαρίστηση των αισθήσεων, η ηδονή, έχει για τον Πλάτωνα πολύ λιγότερη σημασία από τη θεώρηση της νοητής ομορφιάς, την ευφροσύνη.

Στο δεύτερο μισό της εισαγωγής της Ευκλειδείου πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»* αναφέρεται *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας. Οι Πυθαγόρειοι εξέφραζαν τα μουσικά διαστήματα ως λόγους ακεραίων αριθμών.

Κατά την Πυθαγόρειο μουσική θεωρία τα μουσικά διαστήματα κατετάσσοντο σε δύο βασικές κατηγορίες τις *ευφωνίες* ή *συμφωνίες* και τις *διαφωνίες* ή *ασυμφωνίες*. Οι συμφωνίες εκ του ρήματος συμφωνέω_ῶ (=φωνῶ ὁμοῦ).
Πρέπει να σημειώσουμε ότι κατά *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας ΜΟΝΟ μία *πολλαπλάσια* ή *επιμόρια* σχέση μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4) εκφράζει ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα.
Αυτό συμβαίνει στα διαστήματα *δις διαπασών* $\left(\frac{4}{1}\right)$, *διαπασών* $\left(\frac{2}{1}\right)$, *ημιόλιον* (διαπέντε ή διοξεία) $\left(\frac{3}{2}\right)$, *επίτριτον* (διατεσσάρων ή συλλαβά) $\left(\frac{4}{3}\right)$.
Έτσι, λοιπόν, κατά το *θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας το διάστημα του επογδόου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, παρόλο που αποτελεί μια επιμόρια σχέση, το κατέτασσαν στις διαφωνίες ή ασυμφωνίες, επειδή οι ακέραιοι αριθμοί 8 και 9, που το δομούν, δεν συγκαταλέγονται μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4).
Στα σύμφωνα μουσικά διαστήματα συγκαταλέγοντο και τα σύνθετα των παραπάνω συμφώνων διαστημάτων με την οκτάβα με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι δεν παραβιάζεται το Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία.
Έτσι, λοιπόν, η δις διαπασών (=διαπασών+διαπασών), που εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{1}\right)$, εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα, η διαπασών και δια πέντε (=διαπασών+δια πέντε), που εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{1}\right)$, εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα, η διαπασών και δια τεσσάρων (=διαπασών+δια τεσσάρων), που εκφράζεται με πολλαπλασιεπιμερή σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}\right)$, παραβιάζει το *Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία*, και, γι' αυτό, εντάσσεται στα διάφωνα ή ασύμφωνα διαστήματα.

Ο στοιχειωτής Ευκλείδης ήταν γνώστης και οπαδός της φιλοσοφίας του Πλάτωνος και γι αυτό έθεσε ως τελικό σκοπό της συγγραφής των Στοιχείων την κατασκευή των πέντε κανονικών πολυέδρων (*τετράεδρον, οκτάεδρον, εξάεδρον, εικοσάεδρον και πενταγωνικόν δωδεκάεδρον*), που αποκαλούνται *πλατωνικά στερεά.*
Τα τρία τελευταία βιβλία των στοιχείων, δηλαδή το ενδέκατο, δωδέκατο και το δέκατο τρίτο, περιλαμβάνουν τη Στερεομετρία Το τελευταίο μάλιστα βιβλίο με 18 θεωρήματα αναφέρεται στην εγγραφή των κανονικών πολυέδρων στη σφαίρα, γεγονός που φανερώνει ότι στους Πυθαγορείους ήσαν γνωστοί οι ασύμμετροι αριθμοί, όπως λ.χ. είναι ο αριθμός π.

π = 3 ,1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2

6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 8 4 1 9 7 1 6 9 3 9 9 3 7 5 1 0 5
8 2 0 9 7 4 9 4 4 5 9 2 3 0 7 8 1 6 4 0 6 2 8 6 2 0 8 9 9 8
6 2 8 0 3 4 8 2 5 3 4 2 1 1 7 0 6 7 9 8 2 1 4 8 0 8 6 5 1 3
2 8 2 3 0 6 6 4 7 0 9 3 8 4 4 6 0 9 5 5 0 5 8 2 2 3 1 7 2 5
3 5 9 4 0 8 1 2 8 4 8 1 1 1 7 4 5 0 2 8 4 1 0 2 7 0 1 9 3 8
5 2 1 1 0 5 5 5 9 6 4 4 6 2 2 9 4 8 9 5 4 9 3 0 3 8 1 9 6 4
4 2 8 8 1 0 9 7 5 6 6 5 9 3 3 4 4 6 1 2 8 4 7 5 6 4 8 2 3 3
7 8 6 7 8 3 1 6 5 2 7 1 2 0 1 9 0 9 1 4 5 6 4 8 5 6 6 9 2 3
4 6 0 3 4 8 6 1 0 4 5 4 3 2 6 6 4 8 2 1 3 3 9 3 6 0 7 2 6 0
2 4 9 1 4 1 2 7 3 7 2 4 5 8 7 0 0 6 6 0 6 3 1 5 5 8 8 1 7 4
8 8 1 5 2 0 9 2 0 9 6 2 8 2 9 2 5 4 0 9 1 7 1 5 3 6 4 3 6 7
8 9 2 5 9 0 3 6 0 0 1 1 3 3 0 5 3 0 5 4 8 8 2 0 4 6 6 5 2 1
3 8 4 1 4 6 9 5 1 9 4 1 5 1 1 6 0 9 4 3 3 0 5 7 2 7 0 3 6 5
7 5 9 5 9 1 9 5 3 0 9 2 1 8 6 1 1 7 3 8 1 9 3 2 6 1 1 7 9 3
1 0 5 1 1 8 5 4 8 0 7 4 4 6 2 3 7 9 9 6 2 7 4 9 5 6 7 3 5 1
8 8 5 7 5 2 7 2 4 8 9 1 2 2 7 9 3 8 1 8 3 0 1 1 9 4 9 1 2 9
8 3 3 6 7 3 3 6 2 4 4 0 6 5 6 6 4 3 0 8 6 0 2 1 3 9 4 9 4 6
3 9 5 2 2 4 7 3 7 1 9 0 7 0 2 1 7 9 8 6 0 9 4 3 7 0 2 7 7 0
5 3 9 2 1 7 1 7 6 2 9 3 1 7 6 7 5 2 3 8 4 6 7 4 8 1 8 4 6 7
6 6 9 4 0 5 1 3 2 0 0 0 5 6 8 1 2 7 1 4 5 2 6 3 5 6 0 8 2 7
7 8 5 7 7 1 3 4 2 7 5 7 7 8 9 6 0 9 1 7 3 6 3 7 1 7 8 7 2 1
4 6 8 4 4 0 9 0 1 2 2 4 9 5 3 4 3 0 1 4 6 5 4 9 5 8 5 3 7 1
0 5 0 7 9 2 2 7 9 6 8 9 2 5 8 9 2 3 5 4 2 0 1 9 9 5 6 1 1 2
1 2 9 0 2 1 9 6 0 8 6 4 0 3 4 4 1 8 1 5 9 8 1 3 6 2 9 7 7 4
7 7 1 3 0 9 9 6 0 5 1 8 7 0 7 2 1 1 3 4 9 9 9 9 9 9 8 3 7 2
9 7 8 0 4 9 9 5 1 0 5 9 7 3 1 7 3 2 8 1 6 0 9 6 3 1 8 5 9 5
0 2 4 4 5 9 4 5 5 3 4 6 9 0 8 3 0 2 6 4 2 5 2 2 3 0 8 2 5 3
3 4 4 6 8 5 0 3 5 2 6 1 9 3 1 1 8 8 1 7 1 0 1 0 0 0 3 1 3 7
8 3 8 7 5 2 8 8 6 5 8 7 5 3 3 2 0 8 3 8 1 4 2 0 6 1 7 1 7 7
6 6 9 1 4 7 3 0 3 5 9 8 2 5 3 4 9 0 4 2 8 7 5 5 4 6 8 7 3 1
1 5 9 5 6 2 8 6 3 8 8 2 3 5 3 7 8 7 5 9 3 7 5 1 9 5 7 7 8 1
8 5 7 7 8 0 5 3 2 1 7 1 2 2 6 8 0 6 6 1 3 0 0 1 9 2 7 8 7 6
6 1 1 1 9 5 9 0 9 2 1 6 4 2 0 1 9 8 9 3 8 0 9 5 2 5 7 2 0 1
0 6 5 4 8 5 8 6 3 2 7 8 8 6 5 9 3 6 1 5 3 3 8 1 8 2 7 9 6 8
2 3 0 3 0 1 9 5 2 0 3 5 3 0 1 8 5 2 9 6 8 9 9 5 7 7 3 6 2 2
5 9 9 4 1 3 8 9 1 2 4 9 7 2 1 7 7 5 2 8 3 4 7 9 1 3 1 5 1 5
5 7 4 8 5 7 2 4 2 4 5 4 1 5 0 6 9 5 9 5 0 8 2 9 5 3 3 1 1 6

8 6 1 7 2 7 8 5 5 8 8 9 0 7 5 0 9 8 3 8 1 7 5 4 6 3 7 4 6 4
9 3 9 3 1 9 2 5 5 0 6 0 4 0 0 9 2 7 7 0 1 6 7 1 1 3 9 0 0 9
8 4 8 8 2 4 0 1 2 8 5 8 3 6 1 6 0 3 5 6 3 7 0 7 6 6 0 1 0 4
7 1 0 1 8 1 9 4 2 9 5 5 5 9 6 1 9 8 9 4 6 7 6 7 8 3 7 4 4 9
4 4 8 2 5 5 3 7 9 7 7 4 7 2 6 8 4 7 1 0 4 0 4 7 5 3 4 6 4 6
2 0 8 0 4 6 6 8 4 2 5 9 0 6 9 4 9 1 2 9 3 3 1 3 6 7 7 0 2 8
9 8 9 1 5 2 1 0 4 7 5 2 1 6 2 0 5 6 9 6 6 0 2 4 0 5 8 0 3 8
1 5 0 1 9 3 5 1 1 2 5 3 3 8 2 4 3 0 0 3 5 5 8 7 6 4 0 2 4 7
4 9 6 4 7 3 2 6 3 9 1 4 1 9 9 2 7 2 6 0 4 2 6 9 9 2 2 7 9 6

Στον Τίμαιο ο Πλάτων συσχετίζει
- το τετράεδρο με το πυρ,
- το οκτάεδρο με τον αέρα,
- το εξάεδρο με τη γη,
- το εικοσάεδρο με το νερό και
- το δωδεκάεδρο με την εικόνα ολοκλήρου του σύμπαντος ή, κατ’ άλλους μελετητές, με τον αιθέρα (η πέμπτη ουσία, δηλαδή η μεμπτουσία).

Η πρώτη κατασκευή του πενταγωνικού δωδεκαέδρου αποδίδεται στον μεγάλο Αθηναίο μαθηματικό Θεαίτητο (415-369 π.Χ.), ο οποίος υπήρξε φίλος του Πλάτωνος, μαθητής του Πυθαγορείου μαθηματικού Θεοδώρου του Κυρηναίου και σύγχρονος του Αρχύτου του Ταραντίνου. Ο τρόπος κατασκευής και εγγραφής σε σφαίρα ενός οκταέδρου και ενός εικοσαέδρου (από τις απόρρητες Πυθαγόρειες γνώσεις) οφείλονται στον Θεαίτητο.
Ο ‘Ιππασος ο Μεταποντίνος (5^{ος} π.Χ. αιώνας), αθετών τον Πυθαγόρειο όρκο σιωπής, ετόλμησε και φανέρωσε στους μη μεμυημένους αυτά τα μυστικά και γι’ αυτό, λέγεται, ότι εξαναγκάσθηκε να αυτοκτονήσει δια πνιγμού στη θάλασσα.

Κύβος, η «Γεωμετρική Αρμονία» (Νικόμαχος, Εγχειρ. 12, 26,2)

«γεωμετρικὴν ἁρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις. ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται. πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν ιβ', γωνίαι δὲ η', ἐπίπεδα δὲ ς'. μεσότης ἄρα ὁ η' τῶν ς' καὶ τῶν ιβ' κατὰ τὴν ἁρμονικήν».

- Δηλαδή στον κύβο προχωρώντας κατά το μήκος, το πλάτος και το ύψος κατά ίσα διαστήματα, προκύπτει στερεό που συμφωνεί με τον εαυτό του.
- Στον κάθε κύβο διακρίνονται 12 ακμές, 8 κορυφές και 6 έδρες.
- Οι αριθμοί 6, 8, 12 συνιστούν αρμονική αναλογία, διότι $\frac{12}{6} = \frac{12-8}{8-6}$.

Στην εν λόγω αρμονική αναλογία διακρίνονται όλες οι μουσικές συμφωνίες.
- Η δια τεσσάρων συμφωνία είναι ο λόγος $\frac{8}{6}$, επειδή είναι ένας επίτριτος λόγος.

- Η δια πέντε συμφωνία είναι ο λόγος $\frac{12}{8}$, επειδή είναι ένας ημιόλιος λόγος.
- Η δια πασών συμφωνία εκφράζεται με τον λόγο $\frac{12}{6}$.
- Η δια πασών και η δια πέντε συμφωνία δηλαδή η $\frac{3}{1}$ εκφράζεται με το λόγο των διαφορών $\frac{12-6}{8-6}$.
- Η δις δια πασών συμφωνία είναι ορατή στο λόγο $\frac{8}{8-6}$.

Βάσει αυτών καταφαίνεται ότι σωστά η συγκεκριμένη αναλογικότητα ονομάζεται «*αρμονική*» και το ότι τον κύβο τον ονόμαζαν οι Πυθαγόρειοι «*Γεωμετρική Αρμονία*».
Καταφαίνεται προσέτι και τούτο: επειδή μεταξύ των μερών (εδρών, ακμών, κορυφών) του κύβου ισχύει η ταυτότητα του λόγου, αυτά τα μέρη του κύβου συνδέονται αρρήκτως μεταξύ των δι' ισχυρών δυνάμεων συνοχής. Γι' αυτό ο Πλάτων με τον κύβο συσχετίζει τη συνεκτική και στερεά γαία.
Το καθένα από τα άλλα τέσσερα Πλατωνικά στερεά (τετράεδρο, οκτάεδρο, εικοσάεδρο, πενταγωνικό δωδεκάεδρο) χαρακτηρίζεται από έλλειψη συνοχής μεταξύ των μερών του, επειδή δεν ισχύει μεταξύ αυτών η ταυτότης του λόγου. Δια τούτο ο Πλάτων τα συσχετίζει με τα ρευστά πυρ, αήρ, ύδωρ, αιθήρ, αντιστοίχως, της ρευστότητός των δηλουμένης δια του καταληκτικού γράμματος -ρ (ρο) του ονόματός των.

Κυρίες και κύριοι, ταύτα πάντα μαρτυρούν περί της μαθηματικής δομής της ελληνικής γλώσσης.

Σας ευχαριστώ

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
e-mail: hspyridis@music.uoa.gr
☎ 210 - 72.77.832

ΕΡΑΝΙΣΜΑ

ΑΠΟ ΤΗΝ

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΜΟΥΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1. **Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ**
2. **ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΤΗΤΕΣ ή ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ή ΜΕΣΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ**
3. **ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΜΟΥΣΙΚΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ**
4. **ΤΕΤΡΑΧΟΡΔΟ**
5. **ΠΕΝΤΑΧΟΡΔΟ**
6. **ΕΠΤΑΧΟΡΔΟ ΚΑΙ ΟΚΤΑΧΟΡΔΟ ΣΥΣΤΗΜΑ**
7. **Η ΜΕΙΖΩΝ ή ΤΕΛΕΙΟΤΑΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ**
8. **Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΜΟΥΣΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ**

ΕΡΑΝΙΣΜΑ
ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΜΟΥΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών στα πλαίσια μαθήματος ελεύθερης επιλογής διδάσκω την Ευκλείδειο μουσική πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*». Πρόκειται για μια πυθαγόρεια πραγματεία, η οποία πραγματεύεται τη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου.

Με την έννοια *κανών* υπονοείται το μονόχορδο. Είναι το όργανο πειραματισμού και έρευνας των «*κανονικών*», δηλαδή αυτών που στις μελέτες και τις έρευνές τους χρησιμοποιούσαν τον κανόνα.

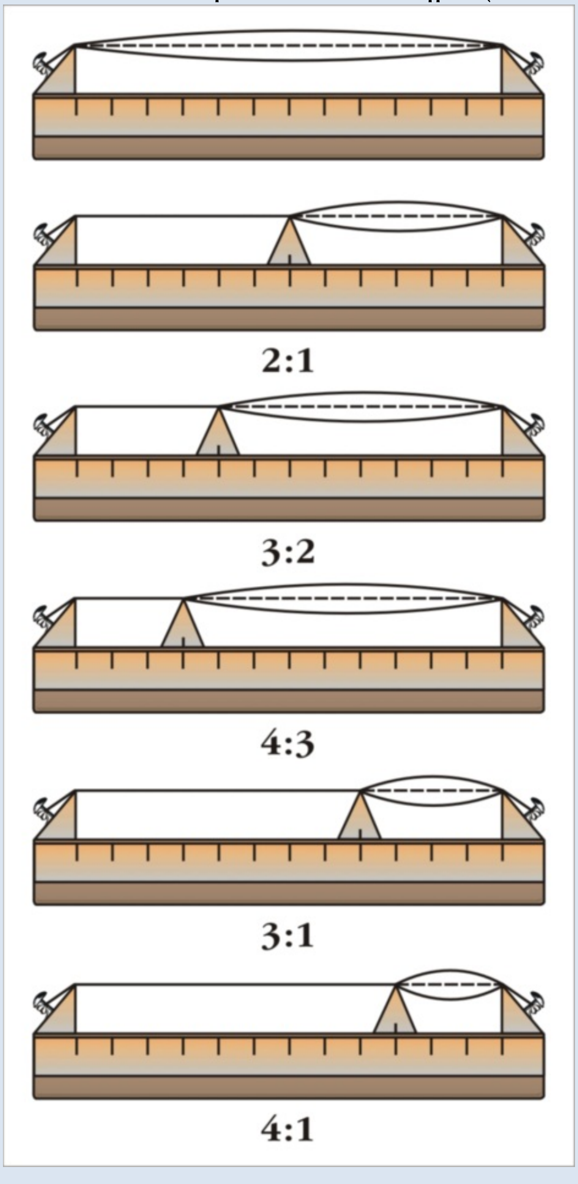
Κατατομή σημαίνει την υποδιαίρεση με μουσικομαθηματικές διαδικασίες του μήκους του κανόνος και την τοποθέτηση δεσμών, δηλαδή τάστων, επ΄ αυτού, προκειμένου να αποδίδονται κατά το *ηρμοσμένον* τα σύμφωνα μουσικά διαστήματα της τότε μουσικής θεωρίας.

Εντρυφώντας και εμβαθύνοντας στην πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*», διεπίστωσα ότι ο Ευκλείδης αντιμετωπίζει την έννοια «*μουσικό διάστημα*» από δύο εντελώς διαφορετικές οπτικές και για την κάθε μια οπτική, μάλιστα, χρησιμοποιεί με μεγάλη αυστηρότητα μια εντελώς διαφορετική ορολογία.
Αυτήν την Ευκλείδειο αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος ονόμασα «*δυϊσμό του μουσικού διαστήματος*» και πραγματεύομαι στο ομώνυμο σύγγραμμά μου.

Δυϊσμός είναι επιστημονικός και φιλοσοφικός όρος που δηλώνει σε γενική έννοια κάθε διδασκαλία, η οποία σε κάποιο τμήμα του επιστητού ή σε κάποιο θέμα –οποιοδήποτε και αν είναι αυτό- παραδέχεται την ύπαρξη δύο αρχών κατ΄ ουσίαν διαφορετικών, που δεν μπορεί να αναχθεί απ΄ ευθείας η μία στην άλλη, παρά μόνον με κάποιον μετασχηματισμό.
Με δυϊσμό, επί παραδείγματι, αντιμετωπίζεται ο χαρακτήρας του φωτός στην Οπτική. Κυματικός χαρακτήρας κατά τη θεωρία Huygens (17ος αιώνας) και την Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία του Maxwell (μέσον 19ου αιώνα), σωματιδιακός χαρακτήρας κατά τη θεωρία του Newton (17ος αιώνας) και τη θεωρία των φωτονίων του Planck (20ος αιώνας).

Συγκεκριμένα, στην πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*» ο Ευκλείδης ασχολείται διεξοδικώτατα με τον δυϊσμό του μουσικού διαστήματος, αντιμετωπίζοντας το μουσικό διάστημα αφενός μεν ως μία σχέση δύο αριθμών προς αλλήλους, αφετέρου δε ως μία απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος. Δικαιολογείται η ενέργειά του αυτή από δύο σχόλια του Πορφυρίου στην περί της αρμονίας διδασκαλία του Πτολεμαίου, τα οποία αναφέρουν «καὶ τῶν κανονικῶν δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ

τῶν λόγων λέγουσιν» και «τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων τὸ διάστημα καλοῦσι». Αυτά μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι στην Πυθαγόρεια μουσική θεωρία οι έννοιες «*διάστημα*» και «*λόγος* (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» είναι ταυτόσημες.
Πρέπει να διευκρινισθεί ότι η σχέση των δύο αριθμών προς αλλήλους εκφράζει το λόγο των μηκών δύο δονουμένων τμημάτων χορδής επί του κανόνος, τα οποία ακουστικά υλοποιούν το μουσικό διάστημα.
Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος εκφράζει το μήκος του *σιγούντος* (=μη ηχούντος) τμήματος χορδής μεταξύ των δύο δεσμών (=τάστων) επί του κανόνος δια των οποίων υλοποιείται ακουστικά το μουσικό διάστημα (Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Προσδιορισμός των μουσικών διαστημάτων κατά τον Πυθαγόρα και κατά τον Αριστόξενο.

Η πρώτη αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος είναι η Πυθαγόρεια και πραγματοποιείται με λόγους αριθμητικούς.

Η δεύτερη αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος είναι η Αριστοξένεια και θεάται το μουσικό διάστημα ως ένα ευθύγραμμο ακίνητο τμήμα μιας τεντωμένης χορδής. Αμφότερες εμπεριέχουν στη φύση τους τη λογαριθμηκότητα κατά τη σημερινή Άλγεβρα.
Η με τους αριθμητικούς λόγους αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων είναι περισσότερον «εύπλαστη» κατά τη μαθηματική της επεξεργασία και προτιμητέα από τους γνωρίζοντες Μαθηματικά.
Η αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων με τις αποστάσεις μεταξύ δύο σημείων είναι περισσότερον «κατανοητή» από τους μουσικούς εκτελεστές, που δεν κατέχουν μαθηματικές γνώσεις.
Για την κατανόηση του παραπάνω δυϊσμού, θεώρησα καλό να παραθέσω ένα δείγμα εκ των πολλών δυϊκών εκφράσεων για το μουσικό διάστημα από την Ευκλείδειο πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*».

Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα
ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.
(Πρόταση η, 1-3)

ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ τεσσάρων
ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα τὸ ἄρα
τονιαῖον διάστημά ἐστιν ἐπόγδοον.
(Πρόταση 13, 5-7)

Στην Ευκλείδειο πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*» από τη χρησιμοποιούμενη διαφορετική ορολογία για την ονομασία των μουσικών διαστημάτων (Πίνακας 1) αντιλαμβανόμεθα την οπτική με την οποία αντιμετωπίζονται από τον Ευκλείδη αυτά.

Πίνακας 1: Ονομασία των μουσικών διαστημάτων με βάση
την Πυθαγόρεια ή την Αριστοξένεια οπτική αντιμετωπίσεώς τους.

Μουσικό Διάστημα	Πυθαγόρεια οπτική	Αριστοξένεια οπτική
$\frac{4}{1}$	τετραπλάσιον	δὶς διὰ πασῶν
$\frac{2}{1}$	διπλάσιον	διὰ πασῶν
$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$	ἡμιόλιον	διὰ πέντε
$\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$	ἐπίτριτον	διὰ τεσσάρων
$\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8}$	ἐπόγδοον	τονιαῖον

Οι πράξεις μεταξύ των μουσικών διαστημάτων στην Πυθαγόρεια αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος διέπονται από μια ιδιάζουσα Άλγεβρα, λογαριθμικού χαρακτήρα, ακατανόητη από τον νου του τότε μη μαθηματικού μουσικού εκτελεστή. Κατ' αυτήν η πρόσθεση μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται με πολλαπλασιασμό των αριθμητικών τους λόγων, ενώ η αφαίρεση μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται με διαίρεση του αριθμητικού λόγου του μειωτέου δια του αριθμητικού λόγου του αφαιρετέου.
Ο απλός μουσικός οργανοπαίχτης έχει μάθει ότι τα μεγέθη αθροίζονται με πρόσθεση και όχι με πολλαπλασιασμό και η διαφορά τους προκύπτει με αφαίρεση και όχι με

διαίρεση. Με αυτή τη φιλοσοφία πραγματοποιούνται οι πράξεις των διαστημάτων κατά την Αριστοξένεια αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων, ο βασικότερος λόγος που επεκράτησε ανάμεσα στους μουσικούς εκτελεστές εκείνου του καιρού.

Ο Αριστόξενος τον 4ον αιώνα π.Χ. επιβάλλει τη γραμμικότητα των μουσικών διαστημάτων. Καταργεί τις τέσσερις θεμελειώδεις Πυθαγόρειες ανισότητες μεταξύ των συνωνύμων διαστημάτων,

- Ἐπιμορίου διαστήματος οὐδεὶς μέσος (Πρόταση γ)
- Τὸ διὰ πασῶν ἔλαττον ἢ ἑξ τόνων (Πρόταση ιδ)
- Τὸ διὰ τεσσάρων ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου,

καὶ τὸ διὰ πέντε ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου. (Πρόταση ιε)

εισηγούμενος για πρώτη φορά στην ιστορία της Μουσικής τον *ίσο συγκερασμό*.
Κατά τον Αριστόξενο το διάστημα της διαπασών (=οκτάβας) διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος διαιρείται σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα, τις διέσεις.
Σήμερα θα λέγαμε ότι ο Αριστόξενος εισηγήθηκε τους συγκερασμούς στα 6, στα 12, στα 18 και στα 24, δηλαδή τον χωρισμό της οκτάβας σε 6 (κλίμακα ολόκληρων τόνων), σε 12 (κλίμακα 12 ίσων ημιτονίων, όπως τα ισχύοντα ευρωπαϊκά ημιτόνια), σε 18 και σε 24 ίσα μεταξύ τους μουσικά διαστήματα. Η γραμμικότητα σε όλο της το μεγαλείο!
Κακώς διδάσκεται ότι εισηγητής του ίσου συγκερασμού είναι ο J. S. Bach το έτος 1722.

Ο Αριστόξενος ονομάζει μουσικό διάστημα την απόσταση ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού μουσικού ύψους. Πρέπει να σημειωθεί ότι η έννοια φθόγγος είναι συνώνυμη και της θέσεως του δεσμού που πατάει στο μάνικο μουσικού οργάνου το δάκτυλο του μουσικού εκτελεστού, προκειμένου να παραχθεί ένας ήχος συγκεκριμένου μουσικού ύψους. Κατά τον Κλεονίδη, τον Βακχείο και τον Ανώνυμο του Bellermann μουσικό διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους, δηλαδή δεσμούς, διαφορετικούς στο ύψος και στο βάθος.
Ο Νικόμαχος γράφει «διάστημα δ’ ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης», δηλαδή διάστημα είναι ό,τι μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο πατήματα επί του μάνικου.
Σε αυτούς τους ορισμούς, θεωρώντας την έννοια φθόγγος με τη σημασία «*θέση πατήματος επί του μάνικου του μουσικού οργάνου*», το διάστημα αποκτά τη σημασία ενός ακινήτου ευθυγράμμου τμήματος κατά μήκος της χορδής του μονοχόρδου μουσικού οργάνου.

Κρίνω σκόπιμο στο σημείο αυτό να παραθέσω μια εξαιρετικά εύστοχη παρατήρηση του Νεοπυθαγορείου και Νεοπλατωνικού φιλοσόφου Θέωνος του Σμυρναίου (1ος-2ος μ.Χ. αι.) ότι δηλαδή η ταυτοφωνία δεν αποτελεί μουσικό διάστημα, αφού δεν υφίσταται μήκος μη ηχούντος τμήματος της χορδής του κανόνος ή, με άλλα λόγια, το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του κανόνος είναι μηδενικό

διαφέρει δὲ διάστημα καὶ λόγος, ἐπειδὴ διάστημα
μέν ἐστι τὸ μεταξὺ τῶν ὁμογενῶν τε καὶ ἀνίσων ὅρων,
λόγος δὲ ἁπλῶς ἡ τῶν ὁμογενῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους
σχέσις. διὸ καὶ τῶν ἴσων ὅρων διάστημα μὲν οὐδέν

ἐστι μεταξύ, λόγος δὲ πρὸς ἀλλήλους εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ὁ τῆς ἰσότητος·

... Ἐρατοσθένης δὲ ἐν τῷ Πλατωνικῷ φησι, μὴ ταὐτὸν εἶναι διάστημα καὶ λόγον,

(«Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν», λ, 1-4).

Πιθανόν να διερωτάσθε τώρα για το ποιός έχει δίκαιο, όσον αφορά στο μουσικό διάστημα, ο επιστήμων Πυθαγόρας ή ο μουσικός Αριστόξενος;

Υπάρχει, κυρίες και κύριοι, ο ψυχοφυσικός νόμος των Weber-Fechner, ο οποίος λέει ότι το αίσθημα είναι ανάλογο του δεκαδικού λογάριθμου του ερεθίσματος, που το προκαλεί. Δηλαδή
Αίσθημα = k log(Ερέθισμα),
όπου το k είναι μια σταθερά αναλογίας, που κατά περίπτωση παίρνει διαφορετικές τιμές.

Από δύο δοθέντα ομοειδή ερεθίσματα ε_1 και ε_2 τα προκαλούμενα αισθήματα α_1 και α_2, αντίστοιχα, είναι:

$$\alpha_1 = k \ \log(\varepsilon_1)$$

$$\alpha_2 = k \ \log(\varepsilon_2)$$

Η διαφορά α_1-α_2 των δύο προκαλούμενων αισθημάτων εκφράζει το μέγεθος του προκαλούμενου αισθήματος του ερεθίσματος ε_1 ως προς το ερέθισμα ε_2 και δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = k \log(\varepsilon_1) - k \log(\varepsilon_2) = k \log(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$$

Στην Ακουστική μια συχνότητα f αποτελεί ερεθισμό του ακουστικού οργάνου, του αυτιού, και προκαλείται η ακουστική εντύπωση, δηλαδή το ακουστικό αίσθημα.
Εάν μας δοθούν δύο ακουστικά ερεθίσματα, δηλαδή δύο ακουστικές συχνότητες f_1 και f_2, το μέγεθος της προκαλούμενης ακουστικής εντύπωσης, δηλαδή του ακουστικού αισθήματος, θα δίνεται σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, από την έκφραση:
Μέγεθος ακουστικής εντύπωσης=$\alpha_1 - \alpha_2 = k \log(f_1/f_2)$

Στη Μουσική Ακουστική και στην Ακουστική, εν γένει, ο λόγος δύο ακουστικών συχνοτήτων (f_1/f_2) ορίζεται ως μουσικό διάστημα και το μέγεθος της προκαλούμενης ακουστικής εντύπωσης ορίζεται ως μέγεθος του μουσικού διαστήματος.
Μάλιστα, επειδή η συχνότητα του θεμέλιου ήχου μιας χορδής είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους της, μπορούμε να εκφράζουμε το διάστημα με τον αντίστροφο λόγο των μηκών των χορδών $\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1}$.
Όλα αυτά απαντούν στο ερώτημά μας και δικαιώνουν τον Πυθαγόρα.

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΤΗΤΕΣ Η ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ Η ΜΕΣΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ

Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν πως η αρμονία της ψυχής, δηλαδή η αρμονία των ήχων και αυτή η ίδια η αρμονία του σύμπαντος, σχετίζεται με τον τέλειο αριθμό, την ιερά τετρακτύν[1], της οποίας ενσαρκωτές είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4. Ανακάλυψαν πως οι τέλειες συμφωνίες εκφράζονται ως αναλογίες αφενός μεν μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος, αφετέρου δε μεταξύ των γεωμετρικών στοιχείων του κύβου («γεωμετρική αρμονία»)[2]. Επιβεβαίωσαν με ακρίβεια ότι μέσα σε αυτήν καθεαυτήν τη φύση του ήχου υφίσταται μια αυστηρή αριθμητική οργάνωση, είτε αυτός παράγεται από ένα μουσικό όργανο, είτε από το ίδιο το Σύμπαν (Μουσική των Σφαιρών), διότι η μουσική εξέφραζε την υφιστάμενη συμπαντική αρμονία και ήταν ένα μέσο προσέγγισής της μέσω του ίδιου του κάλλους της.

Ο Πυθαγόρας έδωσε τον ορισμό της αρμονίας (=διαπασών ή οκτάβας) στη μουσική ως «ἁρμονία ἐστὶ κρᾶσις καὶ σύνθεσις ἐναντίων» υπονοώντας ότι η οκτάβα δομείται από τη σύνθεση της αριθμητικής και της αρμονικής (υπενάντιας) αναλογίας.

Η Μουσική για τους Πυθαγορείους αποτελούσε τη «*Θεωρία των λόγων*» και συγκαταλεγόταν ως τρίτο μέρος ανάμεσα στα τέσσερα μέρη (Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική, Αστρονομία) της Μαθηματικής επιστήμης[3].

---

[1] Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν αναγκαίο το να πλάθουν λέξεις εσωτερικής σημασίας όπως π.χ. φιλοσοφία, κόσμος, τετρακτύς (εκ του τέτταρα και άγω), κάθαρσις, εχεμύθια, κατάρτυσις κ.α., στις οποίες απέδιδαν ιδιαίτερη σημασία. Η ιερά τετρακτύς συμβολικά παριστάνεται με δέκα κουκίδες, που έχουν την εξής διάταξη:

Την τετρακτύ γνώρισε ο Πυθαγόρας στη Βαβυλώνα. Έχει βρεθεί έντυπη η τετρακτύς επάνω σε χρυσή λαβή ξίφους (2700 π.Χ.) στην πόλη Ουρ. Κάθε μέρος της τετρακτύος ήταν και ένα σπουδαιότατο σύμβολο. Έτσι η μία στιγμή ήταν σύμβολο του ενεργού στοιχείου ή του Δημιουργού. Οι δύο στιγμές συμβόλιζαν την ύλη, το παθητικό στοιχείο. Οι τρεις στιγμές συμβόλιζαν τον Κόσμο, δηλαδή την ένωση του ενεργού και του παθητικού στοιχείου. Οι τέσσερις στιγμές συμβόλιζαν τις ελεύθερες τέχνες, που συμπληρώνουν και τελειοποιούν τον Κόσμο.

Ο Dacier υποστηρίζει ότι η τετρακτύς παρίστανε την θεότητα, την πηγή της Φύσεως, η οποία συνεχώς ρέει. Επίσης η τετρακτύς εταυτίζετο με το Απολλώνιον ΕΙ. Η τριγωνική δομή της τετρακτύος ήταν η σφραγίδα της Πυθαγορείου Στοάς και το πλήθος των στιγμών της παρίστανε τον αριθμό των μελών της Στοάς (ομάδος). Ο Vander Warden αναφέρει ότι η τετρακτύς γεωμετρικώς εκφράζεται δια του «τελείου τριγώνου» -του ισοσκελούς- αριθμητικώς δε εκφράζεται δια του «τριγωνικού» αριθμού 10=1+2+3+4. Κατά τον Πυθαγόρα η τετρακτύς εξέφραζε τη λειτουργία της Δημιουργίας υπό της Μονάδος, διότι η τετρακτύς ήταν εσωτερική παράσταση της δημιουργικής ενώσεως των αρχών του Σύμπαντος, Άρρενος και Θήλεος, (των αριθμών 1 και 2) εντός της χειρός του Δημιουργού, (συμβολιζομένων με τους αριθμούς 1 και 4), ενώ ταυτόχρονα οι αριθμοί αυτοί καταδεικνύουν τη Μουσική αρμονία κάθε δημιουργήματος. (Βλέπε βιβλίο Γεωργίου Σακελλαρίου, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ο διδάσκαλος των αιώνων, εκδ. ΙΔΕΟΘΕΑΤΡΟΝ, Αθήναι, 1962, σ. 174 και εφεξής).

Κατά την τελετή της μυήσεως των Πυθαγορείων οι νεόφυτοι ήσαν υποχρεωμένοι να δίνουν τον περίφημο Πυθαγόρειο όρκο στην ιερή τετρακτύ «Οὐ, μὰ τὸν ἁμετέρα ψυχὰ παραδόντα τετρακτύν, παγὰν ἀενάου φύσιος ριζῶματ' ἔχουσαν».

[2] Βλέπε υποσημείωση 401.

[3] Οι Πυθαγόρειοι διαχώριζαν τη Μαθηματική επιστήμη σε τέσσερα μέρη. Το ένα από τα μέρη της το απέδιδαν στο πόσα πολλά και το άλλο στο πόσο πολύ. Διαχώριζαν πάλι σε δύο το καθένα απ' αυτά τα δύο μέρη, διότι έλεγαν ότι το πόσα πολλά δηλαδή μια ποσότητα είτε υφίσταται αυτή καθεαυτή (εκφράζεται με απόλυτους αριθμούς), είτε μελετάται σε σχέση με κάτι άλλο (εκφράζεται με αναλογία) και ότι το πόσο πολύ είτε είναι σταθερό, είτε είναι σε κίνηση. Επίσης έλεγαν ότι η Αριθμητική ερευνά το πόσα πολλά που υφίστανται καθεαυτά, ενώ η Μουσική ερευνά το

Για να καταστεί κατανοητό το θεωρητικό μέρος της Μουσικής, της Αστρονομίας, της Γεωμετρίας και της Φιλοσοφίας του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη πρέπει να ορισθεί η έννοια της μεσότητας ή αναλογίας[4].
Η θεωρία των αναλογιών φαίνεται να πρωτοεισήχθη από τον Θαλή και μετά να υπέστη από τους Πυθαγορείους συνεχείς βελτιώσεις. Βρήκε εφαρμογή στον τομέα των καθαρών Μαθηματικών (Ίππασος ο Μεταποντίνος [6ος-5ος π.Χ. αι.], Ιπποκράτης ο Χίος [470-400 π.Χ.]), στη Μουσική (Ίππασος ο Μεταποντίνος, Φιλόλαος [530-470 π.Χ.], Αρχύτας ο Ταραντίνος [430-350 π.Χ.]), στη Γλυπτική (Πολύκλειτος ο Αργείος [4ος π.Χ. αι.]), και στη, Ιατρική (!) (Αλκμαίων [570-500 π.Χ.], Φιλόλαος).
Ο στοιχειωτής Ευκλείδης μας διδάσκει την προϊστορία της αναλογίας στο βιβλίο V των Στοιχείων του (Τα κυριώτερα σημεία του βιβλίου V των Στοιχείων είναι έργο του Ευδόξου), παραθέτοντας έναν θαυμαστής τελειότητας ορισμό του Ευδόξου. Πρόκειται για τον Ορισμό 5.
Πρέπει να τονισθεί ότι η Ευκλείδειος ορολογία της διδασκαλίας για την αναλογία προδίδει τη σχέση της προς τη θεωρία της Μουσικής.
Τέσσερα (4) είναι το ελάχιστο πλήθος αριθμών, που δομούν μια αναλογία διεζευγμένη, δηλαδή μη συνεχή, μη συνημμένη π.χ. $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.
Εάν, όμως, εισαχθεί στην αναλογία ως όρος αυτής η διαφορά δύο όρων της ή καταστεί συνεχής (=συνημμένη) με την επανάληψη του παρονομαστού[5] του πρώτου λόγου στον αριθμητή[6] του δεύτερου λόγου, τότε το πλήθος των αριθμών περιορίζεται στο τρία (3) π.χ. $\frac{a}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$.
Τρεις αναλογίες, η Αριθμητική, η Γεωμετρική και η Αρμονική (ή Υπενάντια)[7], ήσαν γνωστές στους πιο αρχαίους Μαθηματικούς και οι οποίες παρουσιάσθηκαν στη φιλοσοφία του Πυθαγόρα (580-490 π.Χ.), του Πλάτωνα (427-347 π.Χ.) και του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.). Αυτές οι τρεις αναλογίες (μεσότητες) σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο (346-414 μ.Χ.) χρησιμοποιήθηκαν από τον Πλάτωνα μέχρι τον Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.).
Πρέπει να τονισθεί ότι στην Αριθμητική αναλογία, από την οποία παράγεται ο αριθμητικός μέσος[8], «αγνοείται η ταυτότητα του λόγου και εξετάζεται μόνον η διαφορά των

πόσα πολλά που υφίστανται αναφορικά προς κάτι άλλο. Η Γεωμετρία μελετά το πόσο πολύ που είναι ακίνητο, αλλά η Αστρονομία μελετά το πόσο πολύ που είναι από μόνο του ή κατ' ουσίαν κινητό.

[4] Ο όρος «αναλογία» κανονικά ισχύει μόνον στις γεωμετρικές προόδους. Όμως, οι αρχαίοι 'Ελληνες Μαθηματικοί συνήθιζαν να χρησιμοποιούν τον όρο «αναλογία» και για τις αριθμητικές και για τις γεωμετρικές και για τις αρμονικές προόδους.

[5] Ο παρονομαστής κλάσματος ελέγετο κατά τους αρχαίους Υπόλογος.

[6] Ο αριθμητής κλάσματος ελέγετο κατά τους αρχαίους Πρόλογος.

[7] Ο Νικόμαχος υπογραμμίζει ότι οι τρεις αυτές πρώτες αναλογίες πήραν τα ονόματά τους από τις τρεις πρώτες επιστήμες, δηλαδή την Αριθμητική, τη Γεωμετρία και την Αρμονική (=Μουσική).

[8] Οι μέσοι από τους αρχαίους απεκαλούντο μέσα. Τρία ήσαν τα μέσα που ήσαν γνωστά στους πιο αρχαίους μαθηματικούς και αυτά ήσαν το αριθμητικό, το γεωμετρικό και το αρμονικό.

όρων» ή, με άλλα λόγια, «διατηρεί τις σχέσεις των όρων σύμφωνα με την ισότητα της ποσότητας, αρνούμενη την ομοιότητα του λόγου»[9].

Στον Πίνακα 2 παρατίθενται οι τρεις αναλογίες του Πυθαγόρα για τις οποίες έγινε προηγουμένως λόγος.

Όσον αφορά στους τρεις μέσους αριθμητικό, γεωμετρικό και αρμονικό[10] ο Πρόκλος στο Ὑπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τίμαιον σελ. 238 κάνει την εξής παρατήρηση: «έχουν σχέση με την Ευνομία, τη Δίκη και την Ειρήνη, τις τρεις κόρες της Θέμιδος. Ο αριθμητικός μέσος σχετίζεται με την Ειρήνη. Επειδή υπερβαίνει και υπερβαίνεται από μια ίση ποσότητα, τον χρησιμοποιούμε στις συναλλαγές μας εν καιρώ ειρήνης. Ο γεωμετρικός μέσος έχει σχέση με την Ευνομία, τη δίκαιη νομοθεσία, την οποία ο Πλάτων ονομάζει και κρίση του Δία, μέσω της οποίας το σύμπαν κοσμείται με γεωμετρικές αναλογίες. Ο αρμονικός μέσος έχει σχέση με τη Δίκη ή Δικαιοσύνη, μέσω της οποίας οι μεγαλύτεροι όροι έχουν ένα μεγαλύτερο λόγο και οι μικρότεροι ένα μικρότερο λόγο.

---

[9] Σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιεί ο Νικόμαχος ο Γερασηνός δύο ζεύγη αριθμών έχουν μια όμοια ποιοτική σχέση, όταν παρουσιάζουν τον ίδιο λόγο και έχουν μια όμοια ποσοτική σχέση, όταν παρουσιάζουν την ίδια διαφορά.

[10] Γενικά, δοθέντων δύο αριθμών χ, y (έστω χ<y) ισχύει η πολλαπλή ανισότητα, που απεδείχθη από τους Πυθαγορείους: χ < αρμονικός μέσος < γεωμετρικός μέσος < αριθμητικός μέσος < y ή

$$x < \frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{x}+\frac{\mathbf{1}}{y}} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{\mathbf{2}} < y$$

$$\text{και} \quad \frac{y}{\frac{x+y}{2}} = \frac{\frac{2xy}{x+y}}{x}$$

$$\text{και} \quad \frac{y}{x} = \frac{\frac{x+y}{2}}{x} \cdot \frac{\frac{2xy}{x+y}}{x}$$

Πίνακας 2: Οι τρεις Πυθαγόρειες αναλογίες (έστω ότι $\alpha > \beta > \gamma$).

α/α	Ονομασία	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
1	Αριθμητική[11]	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha}=\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\gamma}$ ή $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ ή $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$	3, 2, 1
2	Γεωμετρική[12]	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ ή $\beta=\sqrt{\alpha\gamma}$	4, 2, 1
3	Αρμονική[13]	$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{\beta}$ ή	6, 4, 3

[11] Η Αριθμητική αναλογικότητα μας είναι σήμερα γνωστή ως Αριθμητική πρόοδος. Ονομάζεται και «αναλογία κατά ποσότητα», διότι σε αυτήν δεν ισχύει η ισότητα των λόγων μεταξύ τριών διαδοχικών όρων, αλλά η ισότητα των διαφορών τους. Πράγματι, εάν α, β, γ (α>β>γ) είναι τρεις διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει η κατά ποσότητα αναλογία α-β=β-γ και όχι η κατά ποιότητα αναλογία α:β=β:γ. Οι προγενέστεροι του Νικομάχου (50-120 μ.Χ.) γνώριζαν ότι στην αριθμητική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι μεγαλύτερος του λόγου των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{2}{1}>\frac{3}{2}$, αφού ο πρώτος είναι διπλάσιος και ο δεύτερος είναι ημιόλιος. Βάσει αυτού ο αριθμητικός μέσος συγκρίνεται με την ολιγαρχία ή την πολιτεία που κυβερνάται από λίγους, οι οποίοι επιδιώκουν το δικό τους καλό και όχι αυτό της πολιτείας.

[12] Η Γεωμετρική αναλογικότητα μας είναι σήμερα γνωστή ως Γεωμετρική πρόοδος. Οι προγενέστεροι του Νικομάχου γνώριζαν ότι στη γεωμετρική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι ίσος προς το λόγο των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$ (αναλογία κατά ποιότητα), αφού και οι δύο εκφράζουν τον διπλάσιο λόγο. Βάσει αυτού ο γεωμετρικός μέσος είναι ανάλογος προς μια λαϊκή κυβέρνηση, όπου τόσο ο φτωχός όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση.

[13] Η Αρμονική ή Υπενάντιος αναλογικότητα, που μας είναι σήμερα γνωστή ως Αρμονική πρόοδος, αποδίδεται στον ‘Ιππασο τον Μεταποντίνο, ο οποίος ήταν λίγο προγενέστερος του Φιλολάου. Σύμφωνα με τον Φιλόλαο ονομάστηκε Αρμονική, διότι ασχολείται με τη «Γεωμετρική Αρμονία», δηλαδή την αρμονία του κύβου. Οι προγενέστεροι του Νικομάχου γνώριζαν ότι στην αρμονική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι μικρότερος του λόγου των δύο μεγαλυτέρων όρων της π.χ. $\frac{4}{3}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, αφού ο πρώτος είναι επίτριτος και ο δεύτερος είναι ημιόλιος. Για το λόγο αυτό η αρμονική πρόοδος ονομάζεται υπεναντία της αριθμητικής προόδου.
Βάσει αυτού ο αρμονικός μέσος λέγεται ότι αντιστοιχεί στην αριστοκρατία, επειδή υπάρχει μεγαλύτερος λόγος στους μεγαλύτερους όρους.

		$\beta = \dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$	

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΜΟΥΣΙΚΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από μία σχέση της μορφής
$2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \quad \kappa, \lambda \in Z$, ονομάζεται **Πυθαγόρειο**.

Η συγκεκριμένη αριθμητική έκφραση οφείλεται στο γεγονός ότι τα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα προκύπτουν από αλληλοπροσθέσεις ή/και αλληλοαφαιρέσεις των δύο θεμελειωδών μουσικών διαστημάτων, δηλαδή του επίτριτου $\left(\dfrac{4}{3}\right)$ και των ημιόλιου $\left(\dfrac{3}{2}\right)$
.
Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα με τις ονομασίες τους και τις αριθμητικές σχέσεις, που τα εκφράζουν.

Πίνακας 3: Μουσικά διαστήματα του Πυθαγορείου συστήματος με τις ονομασίες τους και τις αριθμητικές σχέσεις, που τα εκφράζουν

α/α	Ονομασία	Αριθμητική έκ-φραση	Αριθμητική έκφραση υπό μορφήν δυνάμεων
1	Πυθαγόρειο κόμμα	531.441/524.288	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$
2	Αποτομή μείζονος τόνου	2.187/2.048	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$
3	Λείμμα	256/243	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$
4	Δίλειμμα	65.536/59.049	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$
5	Επόγδοος τόνος	9/8	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$
6	Πυθαγόρειος μικρά τρίτη	32/27	$\frac{2^{5}}{3^{3}}$
7	Πυθαγόρειος ελαττωμένη τε-τάρτη	8.192/6.561	$\frac{2^{13}}{3^{8}}$
8	Πυθαγόρειον δίτονον	81/64	$\frac{3^{4}}{2^{6}}$
9	Πυθαγόρειον τρίτονον	729/512	$\frac{3^{6}}{2^{9}}$
10	Πυθαγόρειος μικρά έκτη	128/81	$\frac{2^{7}}{3^{4}}$
11	Πυθαγόρειος μικρά εβδόμη	243/128	$\frac{3^{5}}{2^{7}}$
12	Διαπασών	2/1	$\frac{2^{1}}{3^{0}}$
13	Δις διαπασών	4/1	$\frac{2^{2}}{3^{0}}$
14	Διαπασών και δια πέντε	3/1	$\frac{3^{1}}{2^{0}}$
15	Διαπασών και δια τεσσάρων	8/3	$\frac{2^{3}}{3^{1}}$
16	Δις διατεσσάρων	16/9	$\frac{2^{4}}{3^{2}}$

17	Δις διαπέντε	9/4	$\frac{3^2}{2^2}$

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται μουσικά διαστήματα, που ανήκουν σε άλλα μουσικά συστήματα.

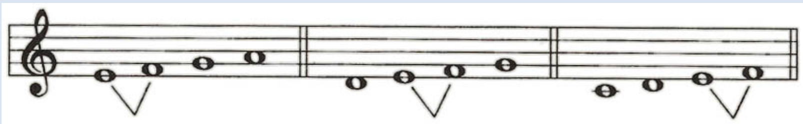
Πίνακας 4: Άλλα μουσικά διαστήματα

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από μία σχέση της μορφής	ονομάζεται
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}$ $\kappa,\lambda,\mu\in Z$	**Φυσικό**
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}$ $\kappa,\lambda,\mu,\nu\in Z$	**Εβδομικό**
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}\cdot 11^{\xi}$ $\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi\in Z$	**Πτολεμαϊκό**
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}\cdot 11^{\xi}\cdot 13^{\pi}$ $\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi\in Z$	**Παχυμέρειο**
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}\cdot 11^{\xi}\cdot 13^{\pi}\cdot 17^{\rho}$ $\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi,\rho\in Z$	**Διχοτονικό**
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}\cdot 11^{\xi}\cdot 13^{\pi}\cdot 17^{\rho}\cdot 19^{\sigma}$ $\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi,\rho,\sigma\in Z$	**Ερατοσθένειο**
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}\cdot 11^{\xi}\cdot 13^{\pi}\cdot 17^{\rho}\cdot 19^{\sigma}\cdot 23^{\tau}$ $\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi,\rho,\sigma,\tau\in Z$	**Διαχρωματικό**
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}\cdot 11^{\xi}\cdot 13^{\pi}\cdot 17^{\rho}\cdot 19^{\sigma}\cdot 23^{\tau}\cdot 29^{\upsilon}$ $\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi,\rho,\sigma,\tau,\upsilon\in Z$	**Προεναρμόνιο**
$2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}\cdot 11^{\xi}\cdot 13^{\pi}\cdot 17^{\rho}\cdot 19^{\sigma}\cdot 23^{\tau}\cdot 29^{\upsilon}\cdot 31^{\phi}$ $\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi,\rho,\sigma,\tau,\upsilon,\phi\in Z$	**Εναρμόνιο**

ΤΕΤΡΑΧΟΡΔΟ

Το σύνολο των τεσσάρων διαδοχικών (=ἑξῆς μελῳδουμένων[14]) χορδών ή φθόγγων, που δομούν την διατεσσάρων συμφωνία (=καθαρή τετάρτη).
Το τετράχορδο υπήρξε το πρώτο σύστημα της προϊστορικής Ελλάδας. Με την ανάπτυξη της μουσικής κατά την ιστορική εποχή έγινε η βάση του σχηματισμού του επτάχορδου και του οκτάχορδου και, αργότερα, των Τελείων (Μείζον, Έλασσον και Αμετάβολον) συστημάτων.
Υπήρχαν τρία γένη[15] τετράχορδου:
το διατονικό (διάτονον),
το χρωματικό (χρῶμα) και
το εναρμόνιο (ἁρμονία).

Το διατονικό[16] εδομείτο από δύο τόνους και ένα λείμμα (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Το διατονικό τετράχορδο.

Το χρωματικό[17] εδομείτο από ένα ασύνθετο διάστημα ενός και μισού τόνου (=τριημιτόνιο) και δύο λείμματα.
Τέλος, το εναρμόνιο[18] εδομείτο από ένα ασύνθετο διάστημα δύο τόνων (=δίτονον) και δύο διέσεις (=τέταρτα του τόνου)[19] (Σχήμα 2).

---

[14] Βακχ. (Εισαγ. 26).

[15] γένος δέ ἐστι ποιὰ τεττάρων φθόγγων διαίρεσις.
Κλεονείδης, *Αρμονική Εισαγωγή*, 1, 11.

[16] καλεῖται δὲ τὸ τοιοῦτον γένος
τῆς μελῳδίας διάτονον, ἤτοι ὅτι διὰ τῶν τόνων τὸ
πλεῖστον διοδεύει ἢ ὅτι σεμνόν τι καὶ ἐρρωμένον καὶ
εὔτονον ἦθος ἐπιφαίνει.
Θέων Σμυρναίος, Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων, 54, 12-15.

[17] ὥστε
γίνεσθαι τὴν τοιαύτην μελῳδίαν κατὰ ἡμιτόνιον καὶ
ἡμιτόνιον καὶ τριημιτόνιον ἀσύνθετον. καλεῖται δὲ
πάλιν τὸ γένος τῆς τοιαύτης μελῳδίας χρωματικὸν διὰ
τὸ παρατετράφθαι καὶ ἐξηλλάχθαι τοῦ πρόσθεν γοερώ-
τερόν τε καὶ παθητικώτερον ἦθος ἐμφαίνειν.
Θέων Σμυρναίος, Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων, 55, 2-7.

[18] λέγεται δέ τι καὶ τρίτον γένος μελῳδίας ἐναρμόνιον,
ἐπειδὰν ἀπὸ τοῦ βαρυτάτου φθόγγου κατὰ δίεσιν καὶ
δίεσιν καὶ δίτονον ἡ φωνὴ προελθοῦσα μελῳδήσῃ τὸ
τετράχορδον.
Θέων Σμυρναίος, Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων, 55, 8-11.

[19] Τὸ διὰ τεσσάρων φθόγγων μελῳδούμενον φθόγγων
ἐστὶ τεσσάρων, διαστημάτων τριῶν, τόνων δύο ἥμισυ,

Σχήμα 2: Το χρωματικό και εναρμόνιο τετράχορδο.

Οι ακραίοι φθόγγοι ενός δοθέντος τετράχορδου ελέγοντο *ἑστῶτες* ή *ἀκλινεῖς*, διότι το μουσικό τους ύψος ήτο αναλλοίωτο και ο λόγος τους έδινε ΠΑΝΤΑ την επίτριτη σχέση 4/3.

Οι εσωτερικοί φθόγγοι του τετράχορδου ελέγοντο *κινούμενοι* ή *φερόμενοι*, διότι το μουσικό τους ύψος άλλαζε είτε προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω και, έτσι, εσχηματίζοντο τα γένη του τετράχορδου.

ΠΕΝΤΑΧΟΡΔΟ

Προκύπτει με την προσθήκη ενός διαστήματος τόνου σε ένα τετράχορδο. Δομείται από τρεις τόνους και ένα λείμμα. Οι Πυθαγόρειοι το ονόμαζαν και διοξειὰ[20]. Οι ακραίοι φθόγγοι ενός πεντάχορδου είχαν μουσικά ύψη τέτοια, ώστε ο λόγος τους να δίνει ΠΑΝΤΑ την ημιόλια[21] σχέση 3/2.

ἡμιτονίων πέντε, διέσεων δέκα, καὶ ἔστιν ἐν ἐπιτρίτῳ
λόγῳ ὡς τὰ τέσσαρα πρὸς τὰ τρία.
Ανωνύμου του Bellermann, Τέχνη Μουσικής, *71, 1 έως 72, 1.*

[20] < Οἱ Πυθαγόρειοι ἐκάλουν> τὴν δὲ διὰ πέντε < συμφωνίαν> δι᾽ ὀξειᾶν
Πορφύριος, Εις τα Αρμονικά Πτολεμαίου Υπόμνημα, 96, 22.

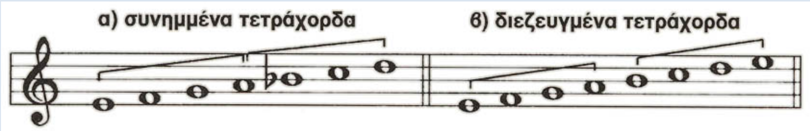
τὸ δὲ διὰ πέντε τῆς συμφωνίας τῆς διὰ τεσσάρων ὡς ἐπὶ τὸ ὀξύτερον
συγκεχωρηκὸς ἐκάλεσαν δι᾽ ὀξειᾶν.
Πορφύριος, Εις τα Αρμονικά Πτολεμαίου Υπόμνημα, 97, 1-2.

[21] τὸ διὰ πέντε φθόγγων
μελῳδούμενον φθόγγων ἐστὶ πέντε, διαστημάτων τεσσάρων, τόνων τριῶν ἥμισυ, ἡμιτονίων ἑπτά, διέσεων
δεκατεσσάρων, καὶ ἔστιν ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ ὡς τὰ τρία
πρὸς τὰ δύο.
Ανωνύμου του Bellermann, Τέχνη Μουσικής, *72, 1 έως 73, 1.*

Ἐπὶ δὲ τοῦ διὰ πέντε, ὃ ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ κεῖται
καὶ συνέστηκεν ἐκ τριῶν τόνων καί τινος
Νικόμαχος, Εκλογαί (Excerpta)*, 2, 20-21.*

ΕΠΤΑΧΟΡΔΟ ΚΑΙ ΟΚΤΑΧΟΡΔΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Δύο συνημμένα[22] τετράχορδα δομούν το επτάχορδο σύστημα, ενώ δύο διεζευγμένα[23] τετράχορδα δομούν το οκτάχορδο σύστημα (Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Δύο συνημμένα και δύο διεζευγμένα τετράχορδα.

Οι δύο ακραίες χορδές του οκτάχορδου σχηματίζουν τη διαπασών συμφωνία, που α-ποτελείται από μία διατεσσάρων και από μία διαπέντε συμφωνία. Ο όρος διὰ πασῶν από την εποχή του Αριστόξενου και εφεξής αντικατέστησε τον πυθαγόρειο όρο ἁρμονία.

[22] ἔστι δὲ συναφὴ μὲν δύο τετραχόρδων ἑξῆς μελῳ-
δουμένων, ὁμοίων κατὰ σχῆμα, φθόγγος κοινός.
Κλεονίδου, Αρμονική Εισαγωγή, *10, 11-12.*

[23] διάζευ-
ξις δέ ἐστι δύο τετραχόρδων ἑξῆς μελῳδουμένων, ὁμοίων
κατὰ σχῆμα, τόνος ἀνὰ μέσον.
Κλεονίδου, Αρμονική Εισαγωγή, *10, 12-14.*

Η ΜΕΙΖΩΝ Η ΤΕΛΕΙΟΤΑΤΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΚΑΙ Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΜΟΥΣΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ

Εικ. 2: Ο Πυθαγόρας εμφανίζεται να γράφει σε τμήμα του περίφημου πίνακα «*Η Σχολή των Αθηνών*» του μεγάλου Ιταλού ζωγράφου της Αναγέννησης Ραφαήλ Σάντσιο (1483-1520).

Ο Πυθαγόρας κατασκεύασε μια μουσική κλίμακα στηριζόμενος, κατά μια εκδοχή, στη «Μείζονα ή τελειοτάτη αναλογία». Σχετικά με τα «...περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας, τῆς ἐν τέσσαρσιν ὅροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης...» κατά τον Ιάμβλιχο στο «Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς» έχουμε να πούμε ότι πρόκειται περί μιας σειράς[24] τεσσάρων αριθμών μεταξύ των οποίων μπορεί να διακρίνει κανείς και την αριθμητική και τη γεωμετρική και την αρμονική αναλογία, δηλαδή τρεις συγχρόνως αναλογίες[25]. Την εν λόγω αναλογία βρίσκουμε να τη χρησιμοποιούν πολλοί Πυθαγόρειοι όπως π.χ. ο Αρισταίος ο Κρονιάτης, ο Τίμαιος ο Λοκρός, οι Ταραντίνοι Φιλόλαος και Αρχύτας και ο Πλάτωνας στο περί γενέσεως ψυχής κόσμου στο διάλογό του *Τίμαιος*.

[24] Ο Thomas Taylor γράφει χαρακτηριστικά: «...όπως σε ένα μουσικό αυλό οι ακραίες οπές χρησιμοποιούνται εναλλάξ με τη μεσαία οπή και, ανοιγοκλείνοντάς τες με τα δάκτυλα, προκαλούμε την εκφορά διαφορετικών ήχων, ή, όπως σε δύο τεντωμένες χορδές ο μουσικός προκαλεί έναν ενδιάμεσο ήχο, οξύ ή βαρύ, ανάλογα με το πόσο τις τεντώνει ή τις χαλαρώνει, κατά τον ίδιο τρόπο σε δύο δεδομένους αριθμούς μπορούμε να παρεμβάλλουμε άλλοτε έναν αριθμητικό, άλλοτε ένα γεωμετρικό και άλλοτε έναν αρμονικό μέσο...».
Γενικά, δοθέντων δύο αριθμών χ, y (έστω χ<y) ισχύει η πολλαπλή ανισότητα, που απεδείχθη από τους Πυθαγόρειους:

χ < αρμονικός μέσος < γεωμετρικός μέσος < αριθμητικός μέσος < y

ή

$$x < \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$$

[25] Τη «μείζονα ή τελειοτάτη ή μουσικήν» αναλογία στην αρχαία ελληνική αρμονική δομούν οι αριθμοί 6, 8, 9, 12. Η γεωμετρική αναλογικότητα εκφράζεται από τους λόγους 12:8=9:6, που ο καθένας τους είναι ημιόλιος. Η αριθμητική αναλογικότητα εντοπίζεται μεταξύ των ζευγών των αριθμών 12, 9 και 9, 6, διότι 12-9=9-6. Η αρμονική αναλογικότητα εντοπίζεται μεταξύ των ζευγών των αριθμών 12, 8 και 8, 6, διότι $\frac{12}{6}=\frac{12-8}{8-6}$. Στη σειρά αυτή των αριθμών 6, 8, 9, 12 εντοπίζονται όλες οι μουσικές συμφωνίες γι’ αυτό, άλλωστε, και ονομάσθηκε μουσική αναλογία. Πράγματι, οι σχέσεις 8:6 και 12:9 εκφράζουν τον επίτριτο λόγο και ταυτόχρονα την δια τεσσάρων συμφωνία. Οι σχέσεις 9:6 και 12:8 εκφράζουν τον ημιόλιο λόγο και τη δια πέντε συμφωνία. Η σχέση 12:6 εκφράζει τη δια πασών συμφωνία. Η σχέση 9:8 εκφράζει τον επόγδοο τόνο, που είναι το ό,τι διαφέρει η διαπέντε συμφωνία από τη διατεσσάρων συμφωνία ή ο ημιόλιος λόγος από τον επίτριτο λόγο (3/2:4/3=9/8).

Η μουσική αναλογία εν γένει δομείται από δύο δοθέντες αριθμούς x, y και τον αρμονικό και τον αριθμητικό τους μέσο ως εξής:

$$\frac{x}{\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma} = \frac{\alpha\rho\mu o\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma}{y}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ αναλύεται κατά το σχήμα:

$$\frac{x}{\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma} = \frac{\alpha\rho\mu o\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y = (\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma) \cdot (\alpha\rho\mu o\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot y}{x^2} = \frac{(\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma) \cdot (\alpha\rho\mu o\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma)}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma}{x} \cdot \frac{\alpha\rho\mu o\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma}{x}$$

Είναι γνωστό ότι δεν μας έχουν διασωθεί γραπτά του Πυθαγόρα. ΄Αλλοι λένε ότι ο ίδιος δεν έγραψε κάποιο έργο και άλλοι πως έγραψε[26] μεν, αλλά δεν μας διεσώθη[27]. Έτσι, λοιπόν, δεν έχομε πληροφρίες από πηγές για το πώς ακριβώς και με ποιά μαθηματική διαδικασία ο Πυθαγόρας οδηγήθηκε στην κατασκευή της μουσικής κλίμακας, η οποία σήμερα φέρει το όνομά του. Διάφοροι ερευνητές, υποθέτοντας, προτείνουν διάφορα σκεπτικά για τον τρόπο που ο Πυθαγόρας εδόμησε την ομώνυμη μουσική κλίμακα. Κατά βάση όλα αυτά τα σκεπτικά φαίνεται να στηρίζονται στην ημιόλιο σχέση (3/2), δηλαδή στο «δια πέντε» διάστημα, αλλά στην ουσία στηρίζονται στους γεννήτορες αριθμούς 2 και 3 της πυθαγόρειας αριθμοσοφίας[28] κατά την Ψυχογονία στον *Τίμαιο* του Πλάτωνα.

---

[26] Ο Ηράκλειτος λ.χ. ο μέγας φιλόσοφος του 500 π.Χ., δηλαδή σύγχρονος του Πυθαγόρα, αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας έγραψε τρία συγγράμματα και συγκεκριμένα: παιδευτικόν, πολιτικόν φυσικόν και επί πλέον τον Ιερόν λόγον.

[27] Η Δαμώ, μια Πυθαγόρεια γυναίκα -θυγατέρα του Πυθαγόρα-, κρατούσε φυλαγμένα μετά το θάνατο του Πυθαγόρα τα έργα, που ο ίδιος ο Πυθαγόρας είχε γράψει, και δεν τα πούλησε παρόλο που περιήλθε σε μεγάλη πενία. Τα έργα αυτά τα αγόρασε ο Πλάτων αντί 100 μνων από τον Πυθαγόρειο Φιλόλαο με τη μεσολάβηση του Διονυσίου, του τυράννου των Συρακουσών.

[28] Όλα τα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα εκφράζονται ως γινόμενο δυνάμεων των αριθμών 2 και 3, είτε με θετικούς, είτε με αρνητικούς εκθέτες. Κατά τα γνωστά, οι αριθμοί 1, 2, 3, 4 δομούσαν την ιερά τετρακτύ των Πυθαγορείων, ενώ οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 δομούσαν τη μείζονα τετρακτύ του Πλάτωνα. Όλα συμμετέχουν σε μια θεολογία. Μια θεολογία που γοητεύεται να ανακαλύπτει τη θεία πρόνοια στους λόγους των ακεραίων αριθμών που διέπουν, κατά την αντίληψή της, τα φαινόμενα. Οι Πυθαγόρειοι ήσαν κυρίως θεολόγοι. Οι επιστημονικοί τομείς των Πυθαγορείων είναι όψεις ενός θεολογικού συστήματος. Δεν εφαρμόζουν τα μαθηματικά στη μουσική. Χρησι-

Ο Πυθαγόρας, λαμβάνοντας στη μείζονα ή μουσική αναλογία ως x το 6 και ως y το 12, ανέλυσε την επιμόρια σχέση $\frac{12}{6}$ (διπλάσιος λόγος (διαπασών)) σε γινόμενο δύο επιμόριων σχέσεων: αυτής του ημιολίου $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ και αυτής του επιτρίτου $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ ή, με μουσικούς όρους, εξέφρασε τη διαπασών ως άθροισμα δύο μουσικών διαστημάτων: αυτό της διαπέντε (πέμπτης καθαρής) $\left(\frac{3}{2}\right)$ και αυτό της διατεσσάρων (τετάρτης καθαρής) $\left(\frac{4}{3}\right)$. Δηλαδή:

$$\frac{y}{x}=\frac{αριθμητικός \quad μέσος}{x}\cdot\frac{αρμονικός \quad μέσος}{x} \Rightarrow \frac{12}{6}=\frac{2}{1}=\frac{9}{6}\cdot\frac{8}{6}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$$

αφού για τους αριθμούς x=6 και y=12

ο αριθμητικός μέσος είναι $\frac{x+y}{2}=\frac{6+12}{2}=9$ και

ο αρμονικός μέσος είναι $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{2xy}{x+y}=\frac{2\cdot6\cdot12}{6+12}=8$

Ανέλυσε, δηλαδή, το διάστημα της διαπασών σε ένα πεντάχορδο συν ένα τετράχορδο. Επειδή το πεντάχορδο ισούται με ένα τετράχορδο συν έναν επόγδοο τόνο, μπορούμ ε να πούμε ότι ο Πυθαγόρας ανέλυσε το διάστημα της διαπασών σε ένα τετράχορδο σύν έναν επόγδοο τόνο συν ένα τετράχορδο, γεγονός που με άλλα λόγια σημαίνει ότι ο Πυθαγόρας ανέλυσε το διάστημα της διαπασών σε δύο διαζευγμένα τετράχορδα.

Γνωρίζοντας αφενός μεν ότι το τετράχορδο δομείται από δύο επόγδοους τόνους $\left(\frac{9}{8}\right)$ συν ένα λείμμα $\left(\frac{256}{243}\right)$, αφετέρου δε ότι ο Πυθαγόρας ασχολήθηκε με το Δώριο διατονικό τετράχορδο, εις το οποίο η αλληλουχία των διαστημάτων είναι επόγδοος τόνος, επόγδοος τόνος, λείμμα, ανέλυσε ο Πυθαγόρας το διάστημα της διαπασών σε:
επόγδοο τόνο,
επόγδοο τόνο,
λείμμα,
επόγδοο τόνο,
επόγδοο τόνο,
επόγδοο τόνο,
λείμμα.

Αυτή, θα μπορούσαμε να πούμε, ότι είναι η κλίμακα του Πυθαγόρα.

μοποιούν τη μουσική κλίμακα για να τεκμηριώσουν τη μυστική τους αριθμοσοφία. Αναζητούν την επαλήθευση της θείας πρόνοιας στην παγκόσμιο αρμονία, την οποία επιδιώκουν να εκφράσουν με τους ίδιους λόγους ακεραίων αριθμών, που χρησιμοποιούν για τον καθορισμό των μουσικών διαστημάτων στο μονόχορδο. Και το σπουδαιότερο, αυτή η κάπως απλοϊκή, αλλά γοητευτική για τον θρησκευόμενο θεώρηση του κόσμου, στηρίζεται σε μια θεολογία μονοθεϊστική.

Αλλά, μέχρι στιγμής, μας έχει διαφύγει μια πολύ ουσιαστική λεπτομέρεια, η οποία είχε διαφύγει και από τους διαφόρους μεταρρυθμιστές της Ευρωπαϊκής μουσικής και παραμόρφωσαν πλήρως την Πυθαγόρεια κλίμακα και αυτό είναι το εντελώς νέο στοιχείο που ήλθα να σας ανακοινώσω.

Είδαμε προηγουμένως ότι η αλληλουχία των μουσικών διαστημάτων μέσα σε μια διαπασών κατά τον Πυθαγόρα είναι:
επόγδοο τόνο,
επόγδοο τόνο,
λείμμα,
επόγδοο τόνο,
επόγδοο τόνο,
επόγδοο τόνο,
λείμμα.

Κατά ποίαν, όμως, φορά; Κατά την ανιούσα ή κατά την κατιούσα;
Την απάντηση θα σας τη δώσω στηριζόμενος
1. στο ότι η αλληλουχία των διαστημάτων στο Δώρειο διατονικό τετράχορδο κατά την κατιούσα διαδοχή (Κλ. Πτολεμαίος κ.α.) είναι:
επόγδοος τόνος,
επόγδοος τόνος,
λείμμα
2. στο ότι δύο συνημμένα τετράχορδα δομούν το επτάχορδο σύστημα, είς το οποίο ο μεσαίος φθόγγος ονομάζεται, λόγω θέσεως, Μέση
3. στο ότι ο Αριστοτέλης στο έργο του «*Προβλήματα, Όσα περί Αρμονίαν*», μιλώντας για τη Μέση (=ο φθόγγος της συναφής δύο τετραχόρδων), λέει:

διὸ καὶ μέσην αὐτὴν προσηγόρευσαν. ἢ ὅτι
ἦν τοῦ μὲν ἄνω τετραχόρδου τελευτή, τοῦ δὲ κάτω ἀρχή,
καθορίζοντας σαφέστατα κατιούσα κίνηση κατά την αντιμετώπιση του επτάχορδου.

Εξ αυτών προκύπτει ότι οι αρχαίοι Έλληνες πάντοτε αντιμετώπιζαν τις κλίμακές τους κατά την κατιούσα διαδοχή και, συνεπώς, η αλληλουχία των διαστημάτων στην Πυθαγόρεια κλίμακα είναι κατά την κατιούσα διαδοχή.

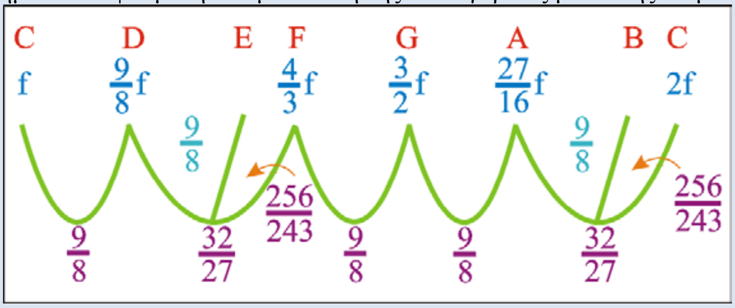
Εάν θελήσωμε να προσεγγίσουμε τη δομή των φθόγγων της Πυθαγόρειας κλίμακας με τη σύγχρονη ευρωπαϊκή σημειογραφία, θα είχαμε

E		*D*		*C*		*B*		*A*		*G*		*F*		*e*
	$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$	

Όσοι δεν έχουν μελετήσει αρχαίους Έλληνες αρμονικούς και, ως εκ τούτου, δεν γνωρίζουν την παραπάνω Αριστοτέλεια λεπτομέρεια, αντιμετωπίζουν τη συγκεκριμένη σειρά

των δονουμένων τμημάτων χορδής ωσάν να εκφράζει μια σειρά μουσικών υψών, μια κλίμακα, κατά την ανιούσα διαδοχή και, εσφαλμένα, καταλήγουν ότι η Πυθαγόρειος κλίμακα έχει τη δομή της C Major (Σχήμα 4).

Σχήμα 4: Εσφαλμένη αντιμετώπιση της Πυθαγόρειας μουσικής κλίμακας



Με αναφορά στον πρώτο φθόγγο της Πυθαγόρειας κλίμακας η αλληλουχία των διαστημάτων κατά την κατιούσα διαδοχή είναι:

1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

$$\frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243}$$

Η σχέση $\left(\frac{9}{8}\right)$ εκφράζει τον επόγδοο τόνο, ενώ η σχέση $\left(\frac{256}{243}\right)$ εκφράζει το λείμμα.

Για να εκφράσομε τις σχέσεις των οκτώ φθόγγων[29] της Πυθαγόρειας κλίμακας με ακέραιους αριθμούς, πολλαπλασιάζομε επί το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους, δηλαδή τον αριθμό 384, τις κλασματικές τους εκφράσεις, οπότε προκύπτουν τα μήκη των δονουμένων τμημάτων χορδής σε ένα συμπαντικό υποθετικό μονόχορδο, τα οποία υλοποιούν ηχητικά τους οκτώ φθόγγους της κλίμακας.

384 432 486 512 576 648 729 768

Με βάση τη θεωρία των χορδών, μικρό μήκος δονούμενου τμήματος χορδής παράγει ήχο μεγάλης συχνότητας και μεγάλο μήκος δονούμενου τμήματος χορδής παράγει ήχο

[29] Το οκτάχορδο σύστημα δημιουργήθηκε τον 6ο π.Χ. αιώνα από τον Πυθαγόρα με την παρεμβολή μιας διάζευξης ανάμεσα σε δύο συνημμένα (συνεχή) τετράχορδα.
(Νικόμαχος, Εγχειρίδιον, 5): «ὅτι τῇ ἑπταχόρδῳ λύρᾳ τήν ὀγδόην ὁ Πυθαγόρας προσθεὶς τὴν διὰ πασῶν συνεστήσατο ἁρμονίας».

μικρής συχνότητας. Άρα η εν λόγω σειρά των δονουμένων τμημάτων χορδής εκφράζει μια σειρά μουσικών υψών, μια κλίμακα, κατά την κατιούσα διαδοχή.

Κυρίες και κύριοι, εάν οι Ευρωπαίοι είχαν εξ αρχής κατανοήσει τη σωστή δομή της Πυθαγόρειας κλίμακας, σήμερα δεν θα υπήρχε στην κλασσική μουσική ως θεμελειώδης ο μείζων τρόπος, αλλ΄ αντ΄ αυτού θα υπήρχε, ας τον ονομάσω, ο Πυθαγόρειος τρόπος, με εντελώς διαφορετικό ήθος, εκ του οποίου θα προέκυπταν οι κλίμακες με διέσεις, που φαίνονται στον Πίνακα 5

Πίνακας 5: Κλίμακες με διέσεις, που έχουν Πυθαγόρεια δομή.

	1		2		2		2		1		2		2	
E		**F**		**G**		**A**		**B**		**C**		**D**		**E′**
B		**C**		**D**		**E**		**F♯**		**G**		**A**		**B′**
F♯		**G**		**A**		**B**		**C♯**		**D**		**E**		**F′♯**
C♯		**D**		**E**		**F♯**		**G♯**		**A**		**B**		**C′♯**
G♯		**A**		**B**		**C♯**		**D♯**		**E**		**F♯**		**G′♯**
D♯		**E**		**F♯**		**G♯**		**A♯**		**B**		**C♯**		**D′♯**
A♯		**B**		**C♯**		**D♯**		**E♯**		**F♯**		**G♯**		**A′♯**
E♯		**F♯**		**G♯**		**A♯**		**B♯**		**C♯**		**D♯**		**E′♯**

και οι κλίμακες με υφέσεις, που φαίνονται στον Πίνακα 6.

Πίνακας 6: Κλίμακες με υφέσεις, που έχουν Πυθαγόρεια δομή.

	1		2		2		2		1		2		2	
E		F		G		A		B		C		D		E′
A		B♭		C		D		E		F		G		A′
D		E♭		F		G		A		B♭		C		D′
G		A♭		B♭		C		D		E♭		F		G′
C		D♭		E♭		F		G		A♭		B♭		C′
F		G♭		A♭		B♭		C		D♭		E♭		F′
B♭		C♭		D♭		E♭		F		G♭		A♭		B′♭
E♭		F♭		G♭		A♭		B♭		C♭		D♭		E′♭

Να σημειώσετε ότι ο οπλισμός των διέσεων και των υφέσεων είναι απαράλλαχτος με αυτόν των κλιμάκων εκ του μείζονος τρόπου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **THOMAS TAYLOR**, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Μτφρ. Μαρία Οικονομοπούλου, Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, 1995.

2. **ΙΑΜΒΛΙΧΟΥ**, *Περί Πυθαγορικού Βίου*, Μτφρ. Δ. Γ. Κουτρούμπας, Εκδόσεις Νέα Θέσις, Αθήνα, 1997.

3. **Β. ΚΑΛΦΑΣ**, *Πλάτων Τίμαιος*, Μτφρ. Β. Κάλφας, Εκδόσεις Πόλις, Αθήνα, 1995.

4. **Δ. Ε. ΛΕΚΚΑΣ**, *Η Μαθηματική Θεωρία της Μουσικής Πυθαγόρειο και Φυσικό Σύστημα*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, 1995.

5. **Α. Ε. ΜΑΖΗ**, *ΦΥΣΙΚΗ (Μηχανική-Ακουστική)*, τόμος πρώτος, Έκδοσις Πέμπτη, Βιβλιοπωλείον της «Εστίας», Αθήναι, 1965.

6. **Γ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ**, *Πυθαγόρας ο διδάσκαλος των αιώνων*, Εκδόσεις Ιδεοθέατρον, Αθήνα, 1962.

7. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ**, *Μια εισαγωγή στη Φυσική της Μουσικής*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, 1988.

8. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ**, *Μουσική Ακουστική*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, 1990.

9. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ**, ΔΟΜΗΣΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΟΝ ΝΑ ΥΠΑΡΞΟΥΝ ΕΠΤΑΝΟΤΩΝ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ ΑΠΟ ΑΛΛΗΛΟΥΧΙΕΣ ΗΜΙΤΟΝΙΩΝ, ΤΟΝΩΝ ή/και ΤΡΙΗΜΙΤΟΝΙΩΝ & Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΠΛΙΣΜΟΥ ΤΟΥΣ, Υπηρεσία Πανεπιστημιακών Συγγραμμάτων Π.Α., Αθήνα 1995.

10. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ** και **Χρ. Θ. Μωυσιάδης,** *Μουσική και Μαθηματικά*, Αθήνα 2000.

11. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ,** *ΦΑΚΕΛΛΟΣ για το μάθημα ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΜΟΥΣΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ*, Υπηρεσία Πανεπιστημιακών Συγγραμμάτων Π.Α., Αθήνα 1999.

12. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ,** *Η Τετρακτύς των Ηχοληπτών*, Εκδόσεις Γιαχούδη-Γιαπούλη, Αθήνα 2002.

13. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ**, *ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ*, Τεχνικά Επαγγελματικά Εκπαιδευτήρια, Α΄ Τάξη 1ου Κύκλου, Ειδικότητα: Παραδοσιακά Όργανα, Τομέας Μουσικών Οργάνων, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 2004.

14. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ**, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνη, Αθήνα, 2004.

15. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ**, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ κανόνος κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνη, Αθήνα, 2005.

16. **Χ. Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ**, ΦΥΣΙΚΗ και ΜΟΥΣΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, 2005.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: Κατατομή Κανόνος

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής, Τμήμα Μουσικών Σπουδών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, hspyridis@music.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών διδάσκω επί μία δεκαετία μάθημα με τίτλο «ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: Κατατομή Κανόνος» από το οποίο οι φοιτητές αντλούν γνώσεις σχετικά με την Ακουστική, τη Μαθηματική και τη Φιλοσοφική θεώρηση της Μουσικής των αρχαίων Ελλήνων του 4^{ου}-3^{ου} π.Χ. αιώνα.

Η «Κατατομή Κανόνος» είναι μια πυθαγόρεια πραγματεία πάνω στη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την Ακουστική Επιστήμη του Δυτικού κόσμου. Είναι γραμμένη με το ίδιο ύφος που είναι γραμμένα τα «Στοιχεία» του Ευκλείδου και γι' αυτό το λόγο αποδίδεται σ' αυτόν.

Η κατατομή κανόνος με το Ευκλείδειο ύφος, τη σπονδυλωτή και ουσιαστικά Πυθαγόρεια φύση αποτελεί έργο αναφοράς από την αρχαιότητα και έχει τραβήξει την προσοχή και το ενδιαφέρον πολλών μουσικολόγων, φιλολόγων, μαθηματικών και ιστορικών της Επιστήμης. Ο συγγραφέας της κυρίως ενδιαφέρεται να αποδείξει συστηματικά και τυπικά προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματά του δεν είναι καθαρά «ορθολογιστικά» και μαθηματικά, αλλά βασίζονται κυρίως σε αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής παρατηρήσεως και σε φυσικές και σε γενικής φύσεως θεωρήσεις.

Euclid: sectio canonis

Haralampos C. Spyridis, Professor in Musical Acoustics, Informatics
Dpt. of Music Studies, University of Athens, hspyridis@music.uoa.gr

ABSTRACT

Over the last 10 years in the Department of Music Studies, Athens University, I have presented lectures under the title "Euclid: sectio canonis". From these lectures the students gain knowledge about the Acoustic, Mathematical and Philosophical theory of music of the ancient Hellenes in the 4rth-3rd century BC.

Sectio canonis is a Pythagorean treatise based on the relationship, which connects Mathematical and Acoustic truths, constituting the base for the Acoustic Science of the western world. It is written in the sane style as Euclid's "Elements" and for this reason it is attributed to him.

Sectio canonis with the Euclidean style, the fractured and essentially Pythagorean nature forms a reference piece from the ancient times and it has drawn the attention and interest of many musicologists, literary-men, mathematicians and historians. The author of sectio canonis is mainly interested to prove systematical

and typical phrases, which constitute the base of the Pythagorean and Platonic traditions. It should be noted that his conclusions are not purely rational and mathematical, but are based mainly on proven instances of empirical observation and physical and general interest theorems.

1. Πληροφοριακά στοιχεία για την πραγματεία

Η *κατατομή κανόνος* είναι μια πυθαγόρεια πραγματεία πάνω στη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου. Είναι γραμμένη με το ίδιο ύφος που είναι γραμμένα τα «*Στοιχεία*» του Ευκλείδου και γι' αυτό αποδίδεται σ' αυτόν. Εάν ο Ευκλείδης είναι όντως ο συγγραφέας της πραγματείας, διότι κάποιοι το αμφισβητούν, αυτή θα πρέπει να έχει γραφεί γύρω στο 300 π.Χ.

Το έργο διασώζεται από τρεις ξεχωριστές πηγές:

(1) μια μεγάλης έκτασης έκδοση, που αποδίδεται στον Ευκλείδη ή στον Κλεωνείδη ή στον Ζώσιμο τον Πανοπολίτη[1],

(2) μια συντομότερη Ελληνική έκδοση που εμπεριέχεται στο υπόμνημα του Πορφυρίου[2] «*εις τα αρμονικά Πτολεμαίου*»[3] και

---

[1] Ζώσιμος ο Πανοπολίτης. Ο αρχαιότερος των αλχημιστών συγγραφέων. Γεννήθηκε στις αρχές του 4[ου] μ.Χ. αιώνα στην Πανόπολη της Άνω Αιγύπτου. Τον αναφέρουν ο Γεώργιος Σύγκελλος και Φώτιος. Όλοι οι αλχημιστές ομιλούν γι' αυτόν με βαθύτατο σεβασμό. Είναι ο πρώτος που διαχωρίζει τις επιστήμες Φυσική και Χημεία και ο πρώτος που αναφέρει τον όρο «*Χημεία*». Κατά τον Σουίδα ο Ζώσιμος συνέγραψε 28 βιβλία για την αλχημεία με τον γενικό τίτλο «*Χειρόκμητα*» και βιογραφία του Πλάτωνος. Των περισσοτέρων έργων του σώζονται μόνον περιλήψεις και τίτλοι. Μας σώζεται η περιγραφή κατασκευής διυλιστηρίου. Σ' αυτόν αποδίδεται από μερικούς το έργο «*Εισαγωγή αρμονική*» που περισώθηκε, ενώ άλλοι το αποδίδουν είτε στον Κλεωνείδη, είτε στον Ευκλείδη, είτε στον Πάππο.

[2] Πορφύριος ο Τύριος ή Φοίνιξ ή Βατανιώτης. Νεοπλατωνικός φιλόσοφος, ο πιο σημαντικός από τους μαθητές του Πλωτίνου. Γεννήθηκε περίπου το 232 και πέθανε στη Ρώμη γύρω στο 304 μ.Χ. Διετέλεσε στην αρχή μαθητής του Λογγίνου στην Αθήνα και από την ηλικία των 30 ετών μαθητής του Πλωτίνου στη Ρώμη. Έγραψε πολλά έργα στα οποία πραγματεύεται φιλοσοφικά, μαθηματικά, αστρονομικά, ιστορικά και γραμματικά θέματα. Από τα έργα του σώθηκαν ελάχιστα. Από το έργο του «*Φιλοσόφου ιστορίας*», στο οποίο εξέθετε τον βίο και τη διδασκαλία των σπουδαιοτέρων φιλοσόφων της αρχαιότητος, διεσώθη μόνον ο «*Πυθαγόρειος βίος*». Άλλα έργα του είναι «*Σχόλια εις το έργον του Πλωτίνου*», «*Σχόλια εις το έργον περί Μουσικής του Πτολεμαίου*», «*Εισαγωγή*» στο έργο «*Κατηγορίαι*» του Αριστοτέλους, «*Βίος Πλωτίνου*» κ.λπ. Ο Πορφύριος υπήρξε από τους σφοδροτέρους πολεμίους του Χριστιανισμού. Έγραψε 15 βιβλία κατά των Χριστιανών, τα οποία ερίφθησαν στην πυρά και εκάησαν με διάταγμα που εκδόθηκε το έτος 448 των αυτοκρατόρων Θεοδοσίου Β' (408-450 μ.Χ.) της Ανατολής και του Ουαλεντινιανού (425-455 μ.Χ.) της Δύσεως.

(3) μια Λατινική έκδοση, που εμπεριέχεται στο έργο «*De institutione musica*”[4] του Βοηθίου[5].

Μερικοί σχολιαστές αμφιβάλλουν, όσον αφορά στον έναν και μοναδικό συγγραφέα της πραγματείας, ακόμη και εάν γράφτηκε σε μία και μόνον περίοδο, εικασίες που ενθαρρύνονται από την πιθανότητα ο Πορφύριος και ο Βοήθιος να μη γνώριζαν την *Κατατομή κανόνος* ως ολότητα, με τη μορφή που έφθασε σε μας.

---

[3] Το χειρόγραφο αποδίδεται στον Ευκλείδη από τον Πορφύριο, ο οποίος το παραθέτει κατά κόρον (Comm. 98.14-103.25 εμπεριέχει τις πρώτες δεκαέξι προτάσεις και υπάρχουν περιληπτικά αποσπάσματα και αλλού). Το κείμενο που παραθέτει ο Πορφύριος δεν είναι εντελώς ταυτόσημο με το κείμενο του βιβλίου μας, και περιλαμβάνει –πιθανώς λανθασμένα- μια πρόταση που δεν υπάρχει στο χειρόγραφο MSS (*Κανένα πολλαπλάσιο διάστημα πλην μόνον της διαπασών δεν δομείται από επιμόρια διαστήματα*).

[4] Τμήματα της πραγματείας παρατίθενται επίσης και από τον Βοήθιο. Και αυτά δεν είναι ταυτόσημα με το χειρόγραφο MSS.

[5] Βοήθιος του οποίου το πλήρες όνομα είναι Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius. Ρωμαίος φιλόσοφος και πολιτικός που έζησε από το 480 έως το 524 μ.Χ. Γεννήθηκε στη Ρώμη και είχε τη σπουδαία τύχη να σπουδάσει στην Αθήνα. Θεώρησε ως αποκλειστικό του πνευματικό καθήκον να μεταλαμπαδεύσει την ελληνική φιλοσοφία στη Δύση. Υπήρξε σύμβουλος του βασιλέα των Οστρογότθων Θεοδωρίχου κοντά στον οποίον γνώρισε δόξες, τιμές, αλλά και την ατίμωση, τη φυλάκιση και το θάνατο με φρικτά βασανιστήρια. Το έργο του έγκειται σε μεταφράσεις και υπομνήματα Ελλήνων συγγραφέων. Μετέφρασε στη λατινική την «*Αριθμητικήν Εισαγωγήν*» του Νικομάχου του Γερασηνού («*Institutio arithmetica*») και το χαμένο μουσικό έργο του ιδίου «*Μουσικήν Εισαγωγήν*» («*Institutio musica*»). Το μουσικό έργο αυτό είναι πολύτιμη πηγή πληροφορίας για την αρχαία μουσική και αποτέλεσε τη βάση των μουσικών μελετών κατά τον μεσαίωνα. Το πιο γνωστό από όλα τα έργα του («*Παραμυθία της Φιλοσοφίας*») «*Consolatio Philosophiae*», το έγραψε για παρηγοριά του στη φυλακή και είναι πεζό και έμμετρο κείμενο. Βοηθήματά του για τη συγγραφή αυτού του έργου είχε τον «Προτρεπτικό» του Αριστοτέλους, τον Πλάτωνα, τον Κικέρωνα και τον Πλωτίνο. Κύριο τμήμα του έργου του Βοηθίου σχετίζεται με τη *Λογική* του Αριστοτέλους και τους σχολιαστές της.
Το πολυδιαδεδομένο έργο του Βοηθίου μεταφράσθηκε σε πάρα πολλές γλώσσες και σχολιάσθηκε από πολλούς σχολιαστές. Πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι σήμερα υπάρχουν περισσότερα από 400 χειρόγραφά του στη λατινική γλώσσα και δεν είναι λίγα τα χειρόγραφα στην ελληνική γλώσσα, που τα μετέφρασε τον 14^{ο} αιώνα ο μοναχός Μάξιμος Πλανούδης.
Πρέπει να τονισθεί με έμφαση ότι επί αιώνες ο Αριστοτέλης, η βάση της μεσαιωνικής φιλοσοφίας, ήταν γνωστός από τις μεταφράσεις και τις πρωτότυπες εργασίες του Βοηθίου.
Τον Βοήθιο, που άλλοι τον αποκαλούν τελευταίο Ρωμαίο και άλλοι πρώτο σχολαστικό, μερικές εκκλησίες της Ιταλίας τον θεώρησαν μάρτυρα και άγιο του Χριστιανισμού.

Η *κατατομή κανόνος* με το Ευκλείδειο ύφος, τη σπονδυλωτή (κομματιαστή) και ουσιαστικά Πυθαγόρεια φύση αποτελεί έργο αναφοράς από την αρχαιότητα και έχει τραβήξει την προσοχή και το ενδιαφέρον πολλών μουσικολόγων, φιλολόγων, μαθηματικών και ιστορικών της επιστήμης. Έτσι, η *κατατομή κανόνος* έχει πολυμελετηθεί, αφού πρώτα πολυαντιγραφήθηκε. Πράγματι, σήμερα η μεγάλης έκτασης Ελληνική έκδοση σώζεται σε 32 χειρόγραφα αντίγραφα, η συντομότερη Ελληνική έκδοση, που εμπεριέχεται στο υπόμνημα του Πορφυρίου «*εις τα αρμονικά Πτολεμαίου*», σώζεται σε 52 χειρόγραφα αντίγραφα και, τέλος, η Λατινική έκδοση, που εμπεριέχεται στο έργο «*De institutione musica*" του Βοηθίου, σώζεται σε περισσότερα από 130 χειρόγραφα αντίγραφα.

Οι Karl von Jan (1895) και Heinrich Menge (1916) μεταφράζουν και εκδίδουν τη μεγάλης έκτασης Ελληνική έκδοση της *κατατομής κανόνος*. Ο Ingemar During (1930) εκδίδει τα αρμονικά του Πτολεμαίου και (1932) εκδίδει το σχολιασμό του Πορφυρίου. Ο Godofred Friedlein (1867) εκδίδει μια συλλογή έργων του Βοηθίου, εις την οποία συμπεριλαμβάνεται και το έργο *De institutione musica*.

Πρέπει να σημειωθεί ότι σε καμιά έκδοση δεν ελήφθησαν υπ' όψιν όλα τα υπάρχοντα χειρόγραφα του έργου. Ο Karl von Jan, επί παραδείγματι, από τα 32 χειρόγραφα γνώριζε τα 25 και για την έκδοσή του έλαβε υπ' όψιν του μόνον τα 8. Αγνοούσε παντελώς την ύπαρξη του πλέον παλαιού και του πλέον έγκυρου χειρογράφου της *κατατομής κανόνος*, του *Vaticanus gr. 2338*.

Τέλος, εξ όσων γνωρίζω, μόνον ο Andre Barbera προέβη σε λεπτομερή σύγκριση των τριών σωζομένων μορφών της *κατατομής κανόνος*.

2. Ποιος έγραψε την πραγματεία «Κατατομή κανόνος»;

Ας ξεκινήσουμε από τη Λατινική έκδοση της «*Κατατομής κανόνος*», η οποία υπάρχει σε 130 και πλέον χειρόγραφα αντίγραφα, είναι δηλαδή η πλέον διαδεδομένη και μας διασώζεται στα πιο παλαιά, από φυσική άποψη, χειρόγραφα του του 9^{ου} και του 10^{ου} αιώνα. Η εν λόγω πραγματεία εμφανίζεται στην αρχή του 4^{ου} βιβλίου του Βοηθίου *De institutione musica* χωρίς καμιά αναφορά στο όνομα κάποιου συγγραφέα. Ο Βοήθιος (480-524 μ.Χ.) τη χρησιμοποιεί ως εισαγωγή προτρέποντας τον αναγνώστη να αναθεωρήσει κάποια θέματα προτού συνεχίσει.

Θα μπορούσαμε εν πρώτοις, εντελώς απλά, να θεωρήσουμε ότι ο συγγραφέας της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»* είναι ο ίδιος ο Βοήθιος. Να μη διαφεύγει της προσοχής μας το γεγονός ότι ο Βοήθιος δεν θεωρείται ο συγγραφέας ενός μεγάλου μέρους της πραγματείας του. Επιπροσθέτως η εμφάνιση του έργου *«Κατατομή κανόνος»* στο υπόμνημα του Πορφυρίου «*εις τα αρμονικά Πτολεμαίου»*[6] μας κάνει να πάψουμε να θεωρούμε τον Βοήθιο ως πιθανό συγγραφέα της πραγματείας «Κατατομή κανόνος», αφού ο Πορφύριος έζησε δύο αιώνες πριν από τον Βοήθιο.

Στη μεγάλης εκτάσεως Ελληνική έκδοση, η οποία σώζεται σε 32 χειρόγραφα αντίγραφα, η πραγματεία *«Κατατομή κανόνος»* αποδίδεται άμεσα ή έμμεσα

---

[6] Μερικοί αμφισβητούν το γεγονός ότι ο Πορφύριος είναι ο συγγραφέας της πραγματείας υπόμνημα «*εις τα αρμονικά Πτολεμαίου*» και θεωρούν ως συγγραφέα το διάσημο Μαθηματικό τον Πάππο τον Αλεξανδρέα[6] (3^{ος} – 4^{ος} μ.Χ. αιώνας).

21 φορές στον Ευκλείδη και 11 φορές στον Κλεωνείδη, για τον οποίον, ας σημειωθεί, δεν γνωρίζουμε τίποτα. Ο Πορφύριος, που έζησε 600 χρόνια μετά τον Ευκλείδη, στον σχολιασμό του αποδίδει σαφώς την πραγματεία *«Κατατομή κανόνος»* στον Ευκλείδη.

Ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος Πρόκλος ο Λύκιος (ο Διάδοχος) (Κωνσταντινούπολη 410 μ.Χ. – Αθήνα 485 μ.Χ.) και ο μαθητής του Μαρίνος ο Φλάβιος[7] (5ος αιώνας μ.Χ.) αποδίδουν τη συγγραφή της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»* στον Ευκλείδη.

Τέλος, στον Ευκλείδη αποδίδεται η συγγραφή της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»* από τον Θεόδωρο τον Μετοχίτη[8] (1270-1332 μ.Χ.), πρώτον υπουργό του

---

[7] Μαρίνος ο Φλάβιος. Νεοπλατωνικός φιλόσοφος που γεννήθηκε στη Φλάβια Νεάπολη της Παλαιστίνης και έζησε τα τέλη του Ε' και τις αρχές του Στ' μ.Χ. αιώνα. Υπήρξε μαθητής και διάδοχος του Πρόκλου στη Σχολή των Αθηνών. Συνέγραψε «*Έρευνα των φιλοσόφων*» ένα συμπίλημα που χάθηκε, υπομνήματα στον «*Φίληβον*» και στον «*Παρμενίδην*» του Πλάτωνος, τα οποία ο ίδιος του τα έκαψε μετά το θάνατο του Πρόκλου, μία συλλογή εκλεκτών κομματιών στα υπομνήματα του Συριανού πάνω στα ορφικά άσματα, που χάθηκε, και τέλος «*Βίον του Πρόκλου ή περί ευδαιμονίας*» που διασώθηκε. Στο περίεργο αυτό έργο αναλύει, καθορίζει και ταξινομεί όλες τις αρετές που, κατά τους Αλεξανδρινούς, αποτελούν την τελειότητα του αληθινού φιλοσόφου από τις σωματικές δεξιότητες μέχρι τη θεουργία και παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο ο δάσκαλός του διέτρεξε όλους αυτούς τους βαθμούς. Ο Μαρίνος αγνοεί τον Χριστιανισμό, γι' αυτό δεν ομιλεί ποτέ και πουθενά γι' αυτόν. Ο «*Βίος του Πρόκλου*» δημοσιεύθηκε τον ΙΣτ' αιώνα από ατελές χειρόγραφο και επανεκδόθηκε αφενός μεν το 1700 συμπληρωμένος από τον Φαβρίκιο στο Αμβούργο σε ειδική έκδοση, αφετέρου δε σε βελτιωμένη έκδοση το 1814 από τον Boissanade.

[8] Θεόδωρος ο Μετοχίτης. Μέγας λογοθέτης, δηλαδή πρωθυπουργός, του Βυζαντίου επί της βασιλείας του Ανδρόνικου ΙΙ του Παλαιολόγου (1282-1328 μ.Χ.). Ο μαθητής του Νικηφόρος Γρηγοράς τον αποκαλεί «έμψυχον βιβλιοθήκην», διότι ήταν λόγιος. Από τον έρωτά του προς τη φιλολογία παραμελούσε τελείως τις υποθέσεις του κράτους κατά τις πολύ επικίνδυνες στιγμές, που οι Τούρκοι κατελάμβαναν την Προύσσα και απειλούσαν τις Μικρασιατικές κτήσεις, οι Σέρβοι και οι Βούλγαροι προσπαθούσαν να καταλάβουν τις Ευρωπαϊκές επαρχίες του Βυζαντίου και ο Ανδρόνικος ο Παλαιολόγος συνωμοτούσε και στασίαζε για την κατάληψη της εξουσίας. Στις 24 Μαίου 1328 ο στασιαστής Ανδρόνικος Παλαιολόγος εισήλθε στην Κωνσταντινούπολη, εξεθρόνισε τον Ανδρόνικο ΙΙ και εξώρισε τον Θεόδωρο στο Διδυμότειχο. Πέθανε το 1332 ως μοναχός με το όνομα Θεόληπτος σε μοναστήρι της Χώρας. Έγραψε 18 ρητορικά έργα εκ των οποίων σώζονται μόνον δύο, είκοσι εξαμετρικά ποιήματα, ενώ δεν γνωρίζουμε τα φιλοσοφικά και τα αστρονομικά του έργα. Από τις επιστολές του αντλούμε πολλές και πολύτιμες πληροφορίες για την εποχή του.

αυτοκράτορα του Βυζαντίου Ανδρόνικου ΙΙ του Παλαιολόγου, μαθητού του Μανουήλ Βρυένιου[9].

3. Μέρη της πραγματείας «*Κατατομή κανόνος*»

Το κείμενο της πραγματείας «*Κατατομή κανόνος*» σήμερα το γνωρίζουμε ως αρθρωτό, δηλαδή ως αποτελούμενο από διάφορα μέρη. Εξετάζοντας τα διασωθέντα χειρόγραφα αντίγραφα της διατριβής «*Κατατομή κανόνος*» διαπιστώνουμε ότι δεν είναι καθόλου προφανές πού αρχίζει και πού τελειώνει το κάθε μέρος της πραγματείας. Λαμβάνοντας υπ’ όψιν τις τρεις διασωθείσες εκδοχές, που προαναφέραμε, χωρίς αμφιβολία η *Εισαγωγή* απότελεί *το πρώτο μεγάλο μέρος*, το οποίο δεν υπάρχει στην εκδοχή του Πορφυρίου. *Το δεύτερο μεγάλο μέρος* αποτελούν όλες οι μαθηματικές προτάσεις, οι οποίες υπάρχουν και στις τρεις εκδοχές της πραγματείας. Με αυτές τις μαθηματικές προτάσεις τελειώνει η Λατινική εκδοχή της πραγματείας. Ακολουθεί *το τρίτο μεγάλο μέρος*, που περιέχει ακουστικές προτάσεις με ένα μέρος των οποίων ολοκληρούται η εκδοχή του Πορφυρίου. Το υπόλοιπο μέρος των ακουστικών προτάσεων και ό,τι άλλο απομένει μέχρι το τέλος της Ελληνικής εκδοχής με το μεγάλο μήκος απαρτίζουν *το τέταρτο* και τελευταίο *μεγάλο μέρος* της πραγματείας «*Κατατομή κανόνος*».

Το πρώτο μεγάλο μέρος της πραγματείας αντιμετωπίζεται ως μια ενιαία ολότητα, ως εισαγωγή. Στην εισαγωγή διατυπώνεται μια θεωρία για τη φυσική αιτία των ήχων και των μουσικών τους υψών έτσι σχεδιασμένη, ώστε να αιτιολογεί τη χρήση των μουσικών υψών ως σχετικών ποσοτήτων και των μεταξύ τους διαστημάτων ως αριθμητικών λόγων. Συνεχίζει δίνοντας μια τριπλή κατάταξη των λόγων και με ένα επιχείρημα εντάσσει τα εύφωνα (σύμφωνα) διαστήματα σε δύο μόνον από αυτές[10].

---

[9] Μανουήλ Βρυέννιος. Βυζαντινός θεωρητικός διδάσκαλος της εκκλησιαστικής μουσικής. Έζησε τα τέλη του 13^{ου} αρχές 14^{ου} μ.Χ. αιώνα. Μας άφησε σύγγραμμα εξαιρετικά σπουδαίο σχετικά με τη θεωρία της μουσικής, στο οποίο πραγματεύεται τους οκτώ ήχους και τα τετράχορδα των αρχαίων και αποδεικνύει την άμεση σχέση της αρχαίας μουσικής των Ελλήνων με τη Βυζαντινή εκκλησιαστική μουσική. Για τη συγγραφή αυτού του συγγράμματος συμβουλεύθηκε τους Αλεξανδρινούς μουσικούς Ευκλείδη, Αριστείδη και Πτολεμαίο. Διακρίνει τα τρία γένη της μουσικής, τη δίεση, καθώς επίσης το τριτημόριο και το τεταρτημόριο του τόνου. Όμως, πουθενά στο σύγγραμμά του δεν αναφέρει περί χειρονομίας και χαρακτήρων, παρόλο που πολύ καλά γνωρίζουμε ότι στην εποχή του ήταν γνωστή η χρήση τους. Αυτό μας οδηγεί στην υπόθεση ή ότι ο Βρυέννιος ήταν αμύητος στην εκκλησιαστική μουσική και ασχολήθηκε μόνον με τις κλίμακές της ή ότι συνέγραψε και άλλα συγγράμματα, που χάθηκαν.

[10] Περισσότερο από όλα τα μέρη της πραγματείας αμφισβητείται η εισαγωγή. Βέβαια είναι ένα ευφυές τμήμα της πραγματείας, και ως πρόλογος είναι απαραίτητο, αφού περιλαμβάνει κάποιες λεπτομέρειες αναγκαίες για την κατανόηση των προτάσεων. Αλλά θα μπορούσε η εισαγωγή να φανεί ως πολύ συντομογραφημένη και μερικά από τα επιχειρήματα, έτσι, όπως διατυπώνονται σε αυτήν, πολύ αδύνατα για να θεωρηθεί έργο ενός συγγραφέα, ο οποίος με περισσή προσοχή διατύπωσε και

Τα υπόλοιπα τρία μεγάλα μέρη, όμως, υποδιαιρούνται σε μικρότερες ενότητες. Το δεύτερο μεγάλο μέρος τόσο στον Βοήθιο, όσο και στην ελληνική εκδοχή με το μεγάλο μήκος, υποδιαιρείται σε εννέα μαθηματικές προτάσεις (1-9 ή α-θ), εννέα καθαρά μαθηματικά θεωρήματα, που αποδεικνύουν διάφορες προτάσεις για αυτές καθαυτές τις αναλογίες και τα «διαστήματα» -με την ευρεία έννοια του όρου και όχι απαραίτητα με τη μουσική- ανάμεσα στους όρους τέτοιων αναλογιών.

Οι ακουστικές προτάσεις είναι επτά στον αριθμό εκ των οποίων οι δύο πρώτες υπάρχουν στο τρίτο μεγάλο μέρος και οι υπόλοιπες πέντε ανήκουν στο τέταρτο μεγάλο μέρος της πραγματείας (10-16 ή ι-ις). Στην πρόταση 10 αρχίζουν να εισάγονται μουσικές έννοιες. Με βάση τα Μαθηματικά των πρώτων εννέα θεωρημάτων, τα επιχειρήματα της εισαγωγής και ένα πλήθος γεγονότων από τη μουσική εμπειρία, οι προτάσεις 10-13 παρουσιάζουν τους αριθμητικούς λόγους των βασικών μουσικών συμφωνιών και του τόνου. Οι προτάσεις 14-16 είναι αποδείξεις δευτερευουσών θέσεων, που προκύπτουν από μια «Πυθαγόρεια» πραγματεία περί μουσικών διαστημάτων ως λόγων, αλλά οι οποίες είναι εντελώς ενάντιες προς τις «Αριστοξένειες» μεθόδους αναλύσεως.

Στη συνέχεια του τετάρτου μεγάλου μέρους υπάρχουν δύο προτάσεις σχετικές με το εναρμόνιο γένος (17-18 ή ιζ-ιη). Η πρόταση 17 δείχνει πως να τοποθετηθούν κάποιες νότες στο εναρμόνιο γένος με τη βοήθεια των συμφωνιών και η πρόταση 18, που αφορά στο σχηματισμό ανίσων διαστημάτων, αποτελεί ένα επί πλέον αντιαριστοξένειο επιχείρημα.

Τέλος, ακολουθούν άλλες δύο προτάσεις, που αφορούν στην κατατομή του κανόνος κατά το αμετάβολο[11] λεγόμενο σύστημα (19-20 ή ιθ-κ). Οι προτάσεις 19-

---

απέδειξε τα θεωρήματα. Ο Πορφύριος και οι πηγές του παραφράζουν μέρη της εισαγωγής. Πιθανώς να πρόκειται για μια μεταγενέστερη περίληψη ή παράφραση της αρχικής εισαγωγής.

[11] Το επονομαζόμενο Τέλειον Μείζον Σύστημα της μουσικής θεωρίας των αρχαίων Ελλήνων επί μακρόν ήλκυσε την προσοχή των σχολιαστών στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τη μυστηριώδη και δυσνόητη θεωρητική βάση της αρχαίας Ελληνικής μουσικής. Πράγματι, ακόμη και τα πλέον σύγχρονα ανεγνωρισμένα μουσικά εγχειρίδια και οι γενικές ιστορίες μουσικής συχνά περιλαμβάνουν ως θέμα σειράς μαθημάτων μια εξήγηση του Μείζονος Τελείου Συστήματος ή του Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος ως μια επίδειξη της σχέσεως μεταξύ ποικίλων τετραχόρδων και φθόγγων των κλιμάκων των αρχαιοελληνικών συστημάτων. Το Τέλειο Μείζον Σύστημα θεωρείται ως ο θεμελιώδης λίθος της αρχαιοελληνικής θεωρίας, η σύνθεση και η σπουδαιότης του συστήματος από τους αρχαίους συγγραφείς ακόμη και τώρα δεν έχει γίνει κατανοητή.
Η πλέον αρχέγονη συστηματική εξήγηση του Μείζονος Τελείου Συστήματος είναι εκείνη, η οποία βρέθηκε στη σύντομη πραγματεία με τον τίτλο *Κατατομή κανόνος* ή *Sectio canonis*, γραμμένη πιθανώς γύρω στα 300 π.Χ. από τον Ευκλείδη.
Η πραγματεία αρχίζει με ένα σύντομο τμήμα, στο οποίο εκτίθενται κάποια αξιώματα της Ακουστικής, συνεχίζει με μια σειρά καθαρώς Μαθηματικών προτάσεων, ακολουθεί μια σειρά πορισμάτων που συνδέουν τις νότες του Μείζονος Τελείου Συστήματος και καταλήγει με δύο προτάσεις –ή μάλλον, αποδείξεις- που μας

20[12] δείχνουν πώς να υποδιαιρεθεί με τη βοήθεια αναλογιών η χορδή του μονοχόρδου, ώστε να προκύψει ένα σύστημα του διατονικού γένους. Αυτό, άλλωστε, αποτελεί την «*Κατατομή του κανόνος*», από την οποία η πραγματεία φέρει το όνομά της.

Ο συγγραφέας κυρίως ενδιαφέρεται να αποδείξει συστηματικά και τυπικά τις προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως[13]. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματά του δεν είναι καθαρά «ορθολογιστικά» και μαθηματικά. Βασίζονται κυρίως σε αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής παρατηρήσεως[14] και σε φυσικές και σε γενικής φύσεως θεωρήσεις, που εκτίθενται στην εισαγωγή. Έτσι, τα επιχειρήματα δεν αναπληρώνουν τη μουσική εμπειρία, αλλά απλά αποτελούν μια προσπάθεια να μεταφράσουν τις αλήθειες αυτών των εμπειριών στη γλώσσα των Μαθηματικών, ώστε οι επαγωγές και οι αμοιβαίες σχέσεις μπορούν να μελετηθούν σχολαστικά.

παρέχουν τα μέσα να ευρίσκομε όλες (πλην μιας, της Τρίτης συνημμένων) τις νότες του Μείζονος Τελείου Συστήματος επάνω στο μονόχορδο.

[12] Υποτονικά υποστηρίζεται ότι ή οι προτάσεις 17-18 ή οι προτάσεις 19-20 προέρχονται από άλλη πέννα.

[13] Όποιος και εάν είναι ο συγγραφέας αυτής της πραγματείας, το βέβαιον είναι ότι εγνώριζε καλά το έργο του Αρχύτου και του Ευκλείδου. Η πρόταση 3 είναι μια εκδοχή ενός σημαντικού θεωρήματος, το οποίον ο Αρχύτας είχε αποδείξει και αρκετές προτάσεις χρησιμοποιούν θεωρήματα γνωστά από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδου. Αλλά ο Ευκλείδης παρεκκλίνει από τον Αρχύτα στην ανάλυσή του για το εναρμόνιο και το διατονικό γένος (πρόταση 17, πρόταση 20). Οι διαιρέσεις του αντιστοιχούν σε αυτές του Φιλολάου (1.12 απόσπ. 6) και του Πλάτωνα (2.3 Τίμ. 35b-36b) και των μεταγενεστέρων Πλατωνικών Πυθαγορείων, όπως σχολιάζει ο Θέων ο Σμυρναίος (Άδραστος 9.2-9.3, Θράσυλλος 9.4-9.5) και ο Νικόμαχος στο *Εγχειρίδιο*. Πάλι, παρόλο που οι εισαγωγικές προτάσεις είναι προφανώς αναπολήσεις του 1.19 Αρχύτας απόσπ. 1, ο Ευκλείδης διαφοροποιείται από τον Αρχύτα και από την ισχύουσα παράδοση γενικώς, όσον αφορά στη θεωρία του μουσικού ύψους, την οποία η εισαγωγή προχωρεί να σκιαγραφήσει. Υπάρχουν υπομνήσεις της ίδιας ιδέας και αλλού, αλλά καμία άλλη πηγή δεν την εκφράζει καθαρά και κατηγορηματικά και η ανάπτυξή της σε μία πλήρως αρθρωτή υπόθεση ίσως είναι κατόρθωμα αυτού καθαυτού του Ευκλείδου.

[14] Πρέπει να εστιάσομε την προσοχή μας κυρίως σε μία αδυναμία αυτής της πραγματείας, η οποία αφορά στη μη ικανοποιητική φύση των απόψεων, που συνδέουν τις συμφωνίες με τους πολλαπλάσιους και τους επιμόριους λόγους στο τέλος της εισαγωγής. Η εν λόγω αδυναμία οδήγησε σε ένα σόβαρό πρόβλημα σχετικά με το εάν είναι ή δεν είναι εύφωνο διάστημα το διάστημα της οκτάβας+τετάρτη (8:3). Το συγκεκριμένο διάστημα αποτελεί την «αχίλλειο πτέρνα» της πραγματείας και ο συγγραφέας της αποφεύγει εντελώς να το μνημονεύσει (πρόταση 12).

Υποστηρίζεται η άποψη ότι η υποδιαίρεση της πραγματείας σε μια Εισαγωγή και σε είκοσι προτάσεις[15] είναι έργο της Ιταλικής Αναγεννήσεως με αφορμή τον τρόπο που είναι γραμμένα κάποια χειρόγραφα αντίγραφα της πραγματείας. Σε κάποια χειρόγραφα αντίγραφα της πραγματείας τμήματα του κειμένου αριθμούνται με αραβικούς αριθμούς 1-11, σε κάποια άλλα αριθμούνται με τους ελληνικούς αλφαριθμούς α-ια στα περιθώρια. Τέλος, σε κάποια χειρόγραφα της διατριβής τμήματά της είτε χωρίζονται μεταξύ τους με διάκενο, είτε χωρίζονται με κάποιο σύμβολο στα περιθώρια σαν τη διπλή δίεση.

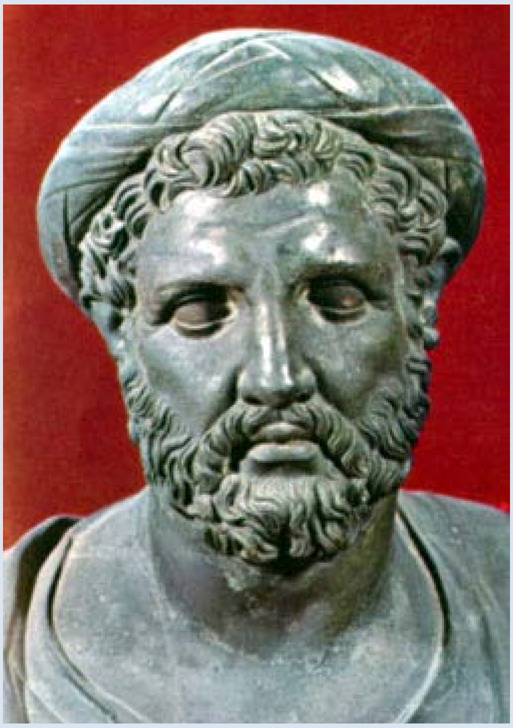
[15] Παρά τις όποιες αδυναμίες της και το περιορισμένο του πεδίου εφαρμογής της, η πραγματεία αποτελεί μια καθαρή προσπάθεια για τη μαθηματική θεμελίωση της αρμονικής με είκοσι θεωρήματα, που αποδεικνύονται θαυμαστά και συνυφαίνονται με ένα μοναδικό τρόπο.

Η μουσική των σφαιρών των Πυθαγορείων

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης,
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής,
Διευθυντής Τομέως Τεχνολογίας Ήχου, Μουσικοπαιδαγωγικής
& Βυζαντινής Μουσικολογίας,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Τμήματος Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφικής Σχολής
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

hspyridis@music.uoa.gr

Η θεωρία για την αρμονία των σφαιρών αποτελεί ένα πυθαγόρειο δόγμα, το οποίο διετυπώθη υπό του ιδίου του Πυθαγόρου.

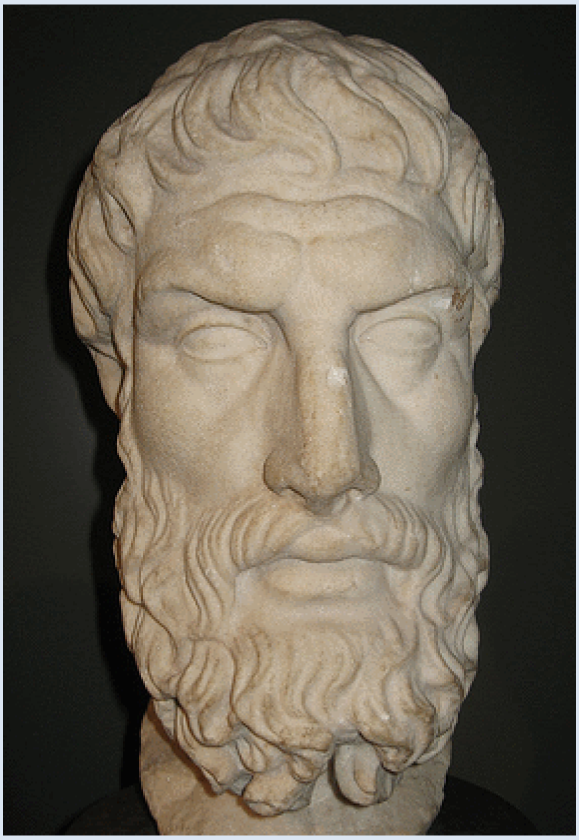


Εικ. 1: Ο φιλόσοφος, πειραματικός φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος, μουσικός, ιατρός, σοφός θεωρητικός των αριθμών Πυθαγόρας ο Σάμιος (586-490 π.Χ.)

Δεδομένου του μυστικιστικού χαρακτήρος της κοινότητος των Πυθαγορείων και του γεγονότος ότι ο Πυθαγόρας και αρκετοί εκ των οπαδών του δεν έχουν αφήσει γραπτά συγγράμματα ή δεν μας διεσώθησαν συγγράμματά των άμεσα, οι πληροφορίες για την θεωρία της αρμονίας των σφαιρών προέρχονται από έμμεσες πηγές. Ως τέτοιες θεωρούνται οι αρχαίοι συγγραφείς ως ο Ιάμβλιχος,

Εικόνα 2: Ιάμβλιχος ο Χαλκιδώνιος (3^{ος} αι. μ.Χ.) νεοπλατωνικός φιλόσοφος εκ της Συρίας.

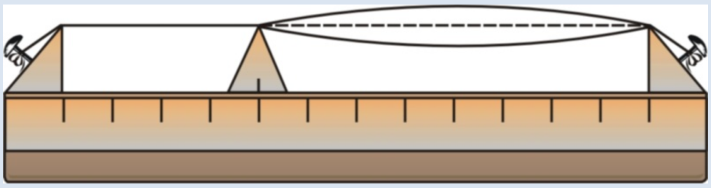
ο Πορφύριος και ο Διογένης ο Λαέρτιος.



Εικόνα 3: Διογένης Λαέρτιος, 3ος αι. μ.Χ., ιστοριογράφος της φιλοσοφίας της αρχαιότητος εκ της πόλεως Λαέρτης της Κιλικίας.

Όλοι οι βιογράφοι του φιλοσόφου Πυθαγόρου και οι κατοπινοί φιλόσοφοι και μελετητές, οι οποίοι εις τα έργα των είτε υπονοούν, είτε κάνουν άμεσο λόγο για την αρμονία των σφαιρών, την αντιμετωπίζουν ταυτοχρόνως με πνεύμα παραδοχής ή απορρίψεως.

Διαβάζουμε, λοιπόν, ότι ο Πυθαγόρας ανεκάλυψε τις αριθμητικές σχέσεις, οι οποίες εκφράζουν τα μουσικά διαστήματα του τετραχόρδου επάνω εις το μονόχορδο



Εικόνα 4: Το μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

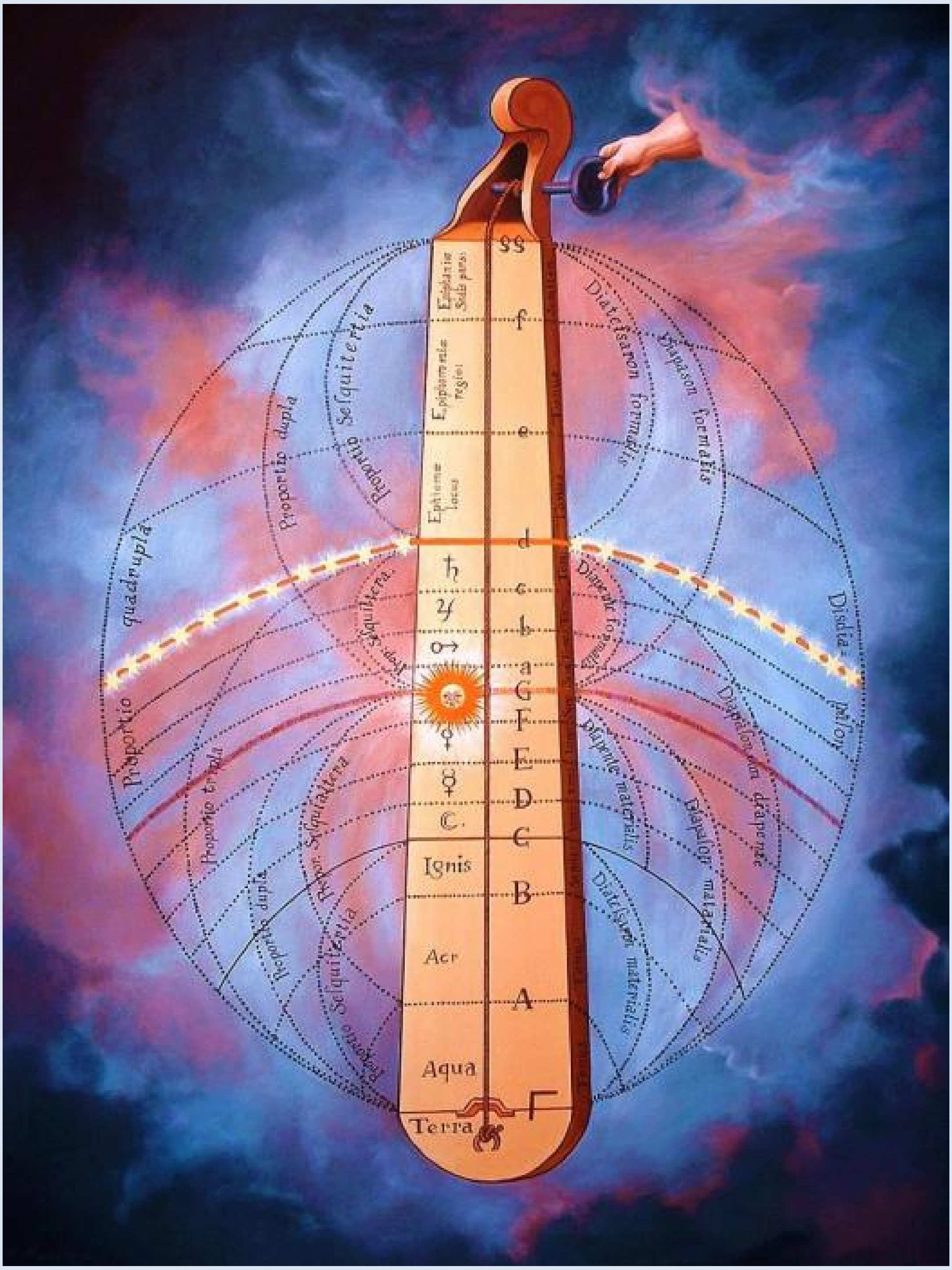
και επειραματίσθη με την επτάχορδον λύρα.

Εικόνα 5: Η επτάχορδος λύρα.

Επιπλέον, τα ουράνια σώματα είχον προκαλέσει και αυτά την προσοχήν του και εγνώριζε εκ των σπουδών του εις την Αίγυπτον και την Βαβυλώνα ότι εις τους πλανήτες και τα άστρα είχαν αποδοθεί αριθμοί, δηλαδή μια αριθμητική αξία, η οποία παρίστανε κατ’ αυτούς τις ενδοπλανητικές αποστάσεις.

Για τον Πυθαγόρα οι κανονικές κυκλικές κινήσεις των ουρανίων σωμάτων ηδύναντο να μετρηθούν με ακρίβειαν και εφαίνοντο να κατέχουν μια θεϊκήν ευφυΐα, η οποία τα καθιστούσε ικανά να βρίσκονται σε τροχιά με μία τελεία κανονικότητα. Έχων, λοιπόν, ανακαλύψει ότι η μουσική ήτο επίσης αριθμός (δηλαδή ηδύνατο να εκφρασθεί με αριθμητικές σχέσεις), μπορούσε να υποθέσει ότι τα πάντα εις τον κόσμον ήσαν αριθμός.

Έμενε, λοιπόν, να ανακαλύψει την σχέσην ανάμεσα εις την μουσικήν και τον κόσμον: αφού η ουσία των άστρων–θεών ήτο ο αριθμός και ο αριθμός ήτο, επίσης, το θεμέλιον της μουσικής, τότε τα άστρα και οι πλανήτες έπρεπε κατά κάποιον τρόπον να είναι μουσικά.



Εικ. 6: Το χόρδισμα του ουρανίου μονοχόρδου με βάση τις τροχιές των ουρανίων σωμάτων.

Οι Ομηρικοί ποιητές είχον προβλέψει την θεωρίαν αυτήν μέχρις ενός σημείου, διότι εις τον ομηρικόν ύμνον εις τον Άρην οι πλανήτες προσφωνούνται ως έν είδος χορωδίας από θεϊκές φωνές και εις τον ύμνον στον Ερμήν παρουσιάζεται η επτάχορδος λύρα.

Είναι γνωστόν, επίσης, ότι τον 7^{ον} αιώνα π.Χ. υπήρχε η φήμη ότι ο ποιητής Τέρπανδρος προσέθεσε την εβδόμη χορδήν εις την λύραν θέλων να μιμηθεί την πλα-

νητικήν μουσικήν. Έτσι, αιώνες πριν τον Πυθαγόρα οι Έλληνες εγνώριζον για την μουσικήν των άστρων–θεών.

Τελικώς, ίσως η ιδέα της κοσμικής μουσικής ανάγεται εις τον Ορφέα, τον μυθικόν πιστόν εις την δύναμην του αριθμού και της μουσικής.

Εικ. 7: Ορφεύς, η κύρια εκπροσώπηση της τραγουδιστικής τέχνης και της λύρας με ιδιαιτέρα σημασία εις την θρησκευτικήν ιστορίαν της Ελλάδος.

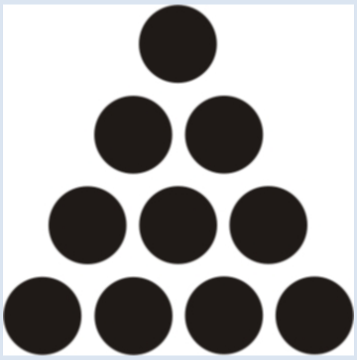
Ο Πυθαγόρας, όμως, ήτο εκείνος ο οποίος οργάνωσε το εν λόγω σύστημα και του έδωσε μία επιστημονικήν και μυστηριακήν σημασίαν.
Όπως γράφει ο Ιάμβλιχος: «Συγκεντρώνων την ακοήν και την σκέψην του, εβύθιζε τον εαυτό του εις τις κινούμενες αρμονίες του κόσμου. Συμφώνως προς αυτόν (τον Πυθαγόρα), μόνον ο ίδιος ηδύνατο να τις ακούσει και να κατανοήσει τις αρμονίες και συμφωνίες των σφαιρών και των ουρανίων σωμάτων.

καὶ τοῖς μὲν ἑταίροις ἡρμόζετο ταῦτα, αὐτὸς δὲ τῆς τοῦ παντὸς ἁρμονίας ἠκροᾶτο συνιεὶς τῆς καθολικῆς τῶν σφαιρῶν καὶ τῶν κατ᾽ αὐτὰς κινουμένων ἀστέρων ἁρμονίας, ἧς ἡμᾶς μὴ ἀκούειν διὰ σμικρότητα τῆς φύσεως.

Πορφύριου *Βίος Πυθαγόρα* 30.3-7

Η παγκόσμιος μουσική ήτο αμέσως πιο υπερβολική και ανωτέρα εκ των θνητών μελωδιών, αποτελουμένη εξ ανομοίων στοιχείων και ποικιλοχρώμων ήχων, οι οποίοι προέρχονται εκ σωμάτων των οποίων η ταχύτης, το μέγεθος και η θέση διαφέρουν κατά πολύ. Τα σώματα αυτά είναι διατεταγμένα το ένα εν σχέσει προς το άλλο βάσει των πλέον μουσικών αναλογιών και παράγουν μία μελωδία, η οποία δονείται δια μέσου της θαυμαστά όμορφης κινήσεως και των μελωδικών συστροφών του ουρανού».

Ο Πυθαγόρας προσεπάθει να μεταφέρει ορισμένες εντυπώσεις της αρμονίας των σφαιρών εις τους οπαδούς του με το να την μιμείται παίζοντάς την εις την λύρα και τραγουδώντας την.
Η **ιερά τετρακτύς** συμβολικώς παρίσταται με δέκα κουκίδες, οι οποίες έχουν την τριγωνική διάταξη, την οποίαν δείχνει το Σχήμα 1 και ο Πυθαγόρας, ως ο θεός της τετρακτύος, ήτο το μόνον άτομο με σάρκα, το οποίο ηδύνατο να την ακούσει, να την αφουγκρασθεί. Η ικανότης του αυτή απεδείκνυε την θεότητά του εις τα όμματα των οπαδών του.



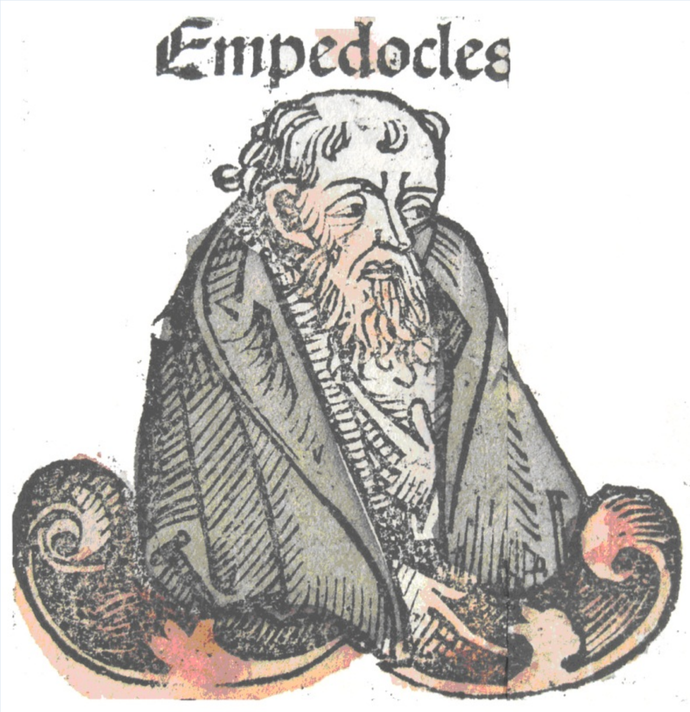
Σχήμα 1: Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος.

Η τετρακτύς ήτο πρωτίστως τιμωμένη εκ των Πυθαγορείων, διότι περιείχε όλες τις μουσικές συμφωνίες. Πράγματι,

Πίνακας Ι: Οι μουσικές συμφωνίες από την τετρακτύν.

Σχέση	Μουσική συμφωνία
2:1	**διά πασών συμφωνία (διάστημα οκτάβας)**
3:2	**διά πέντε συμφωνία (διάστημα πέμπτης καθαράς)**
4:3	**διά τεσσάρων συμφωνία (διάστημα τετάρτης καθαράς)**
3:1	**διά πασών και δια πέντε συμφωνία (διάστημα οκτάβας συν πέμπτης καθαράς)**
4:1	**δις διαπασών (δύο οκτάβες)**

Κατά την τελετήν της μυήσεως των Πυθαγορείων οι νεόφυτοι ήσαν υποχρεωμένοι να δίνουν τον περίφημο Πυθαγόρειο όρκο εις την ιεράν τετρακτύν «**Οὐ, μὰ τὸν ἁμετέρα ψυχὰ παραδόντα τετρακτύν, παγὰν ἀενάου φύσιος ριζῶματ' ἔχουσαν**»
Οι αρχαίοι βιογράφοι του την εξηγούσαν λέγοντες ότι ο Πυθαγόρας είχε πολύ οξείες αισθήσεις και αυτό ήτο που υπαινίσσοντο τα ποιήματα του Εμπεδοκλέους με την εξύμνησην της διανοίας και της αντιλήψεώς του.

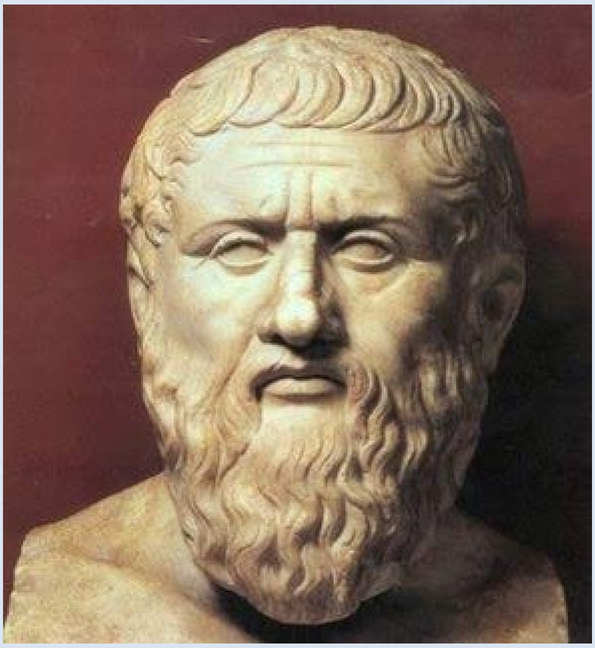


Εικ. 8: Εμπεδοκλής (495 - 435 π.Χ.), εις εκ των σπουδαιοτέρων αντιπροσώπων της προσωκρατικής ελληνικής φιλοσοφίας.

Η μουσική αυτή δεν είναι ακουστή εκ της ανθρωπίνης ακοής, διότι η ψυχική αρμονία των πιστών, σε κανονικές συνθήκες, συντονισμένη με την κοσμική μουσική, έχει διαταραχθεί από την παραμονή της εις ένα σώμα.

Με βάσην την Ακουστική για να διαδοθεί ήχος εξ ενός σημείου εις άλλον απαιτείται η παρεμβολή μεταξύ των σημείων ενός υλικού ελαστικού φορέως π.χ. αήρ. Εις το μεσοπλανητικόν διάστημα, όμως, υπάρχει κενόν και εις το κενόν ο ήχος δεν δύναται να διαδοθεί. Άρα, και εις την περίπτωσην κατά την οποίαν οι πλανήτες παρήγαγον μουσικούς ήχους, οι ήχοι αυτοί δεν θα ηδύναντο να διαδοθούν δια μέσου του κενού μέχρι την Γην.

Και ο Πλάτων εις τον *Τίμαιον* αναφέρεται εις την μουσικήν των σφαιρών με έναν ακόμη περισσότερο μυστηριακόν τρόπον.



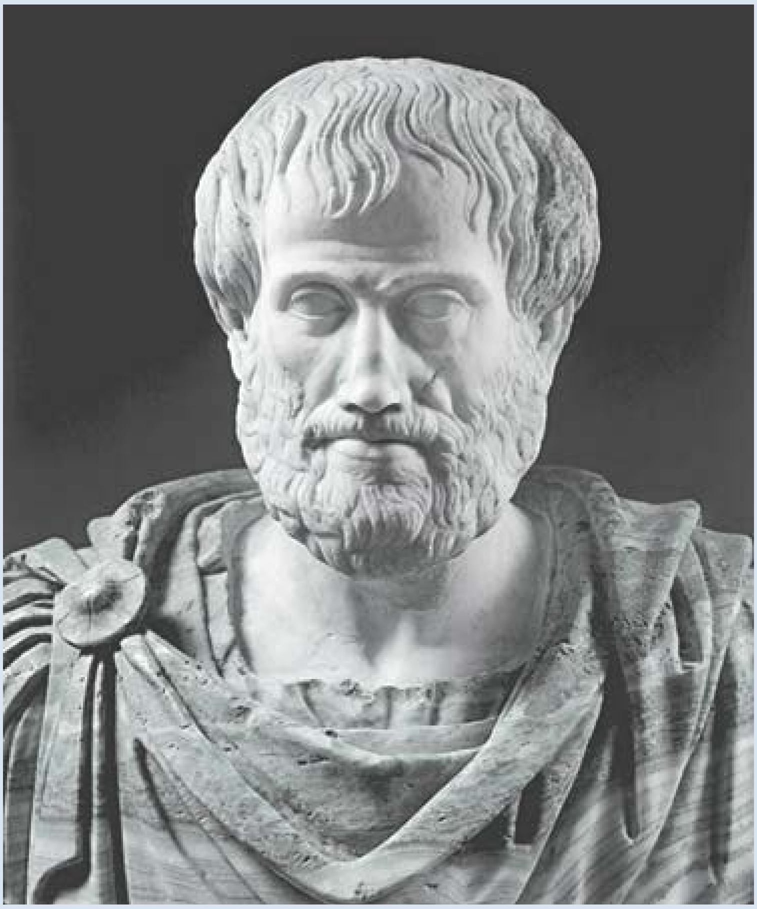
Εικ. 9: Πλάτων, σπουδαίος φιλόσοφος και συγγραφεύς των διαλόγων (427-347 π.Χ.), ο γνωστότερος μαθητής του Σωκράτους.

Πρέπει να σημειωθεί ότι συμφώνως προς τον Πορφύριον ο Πυθαγόρας εθεώρει τους επτά πλανήτες μαζί με τους απλανείς αστέρες και την αντίχθονα ως τις εννέα Μούσες, την αρμονία όλων των οποίων ωνόμαζε θεά της μνήμης, Μνημοσύνη.

Εικ. 10: Οι εννέα μούσες χορεύουν με τον μουσηγέτη Απόλλωνα.

Οι οκτώ φθόγγοι της κοσμικής λύρας του Πλάτωνος ακούγονται από τους επτά πλανήτες (συμπεριλαμβανομένου του Ήλιου και της Σελήνης) και από την σφαίραν των απλανών αστέρων. Ο βαρύτερος φθόγγος είναι αυτός του Κρόνου (Υπάτη) και ο οξύτερος αυτός της Σελήνης (νήτη).

Μαθητής του Πλάτωνος, ο Αριστοτέλης, εις το βιβλίον του *Περί Ουρανού* ομιλεί δια την αρμονίαν των σφαιρών και είναι ο πρώτος που την διατυπώνει και την αποδίδει εις τους Πυθαγορείους, απορρίπτοντάς την.



Εικ. 11: Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.), μαθητής του Πλάτωνα, σημαντική μορφή της φιλοσοφικής σκέψης του αρχαίου κόσμου.

Συγκεκριμένως, λέγει ότι οι Πυθαγόρειοι υπέθετον ότι τα ουράνια σώματα τραγουδούν την κοσμικήν μουσικήν, διότι θα πρέπει να παράγουν κάποιον ήχον με τις κινήσεις τους εις τον χώρον. Έχοντες τόσο πελώριον μέγεθος οι πλανήτες, έπρεπε να κάνουν κάποιον θόρυβο καθώς κινούνται μέσα εις τον αιθέρα, ο οποίος γεμίζει τον χώρον, όπως ακριβώς τα γήινα σώματα παράγουν δονήσεις καθώς μετακινούνται εις τον αέρα. Οι άνθρωποι δεν ακούν την μουσικήν αυτήν, διότι την έχουν συνηθίσει, όπως οι σιδεράδες έχουν συνηθίσει τον θόρυβον των σφυριών των, τα οποία κτυπούν εις το αμόνι.

Ο Αριστοτέλης προσεπάθησε να αντικρούσει την ύπαρξη της αρμονίας των σφαιρών υποστηρίζων ότι, εάν όντως υπήρχε, θα είχε καταστροφικές συνέπειες για την Γην.

Οι αρχαίοι αστρονόμοι, μουσικοί και φιλόσοφοι είχον συσχετίσει τις νότες ή τους δακτυλισμούς της μουσικής τους κλίμακος μετά των επτά πλανητών. Μία τοιαύτη συσχέτιση παρουσιάζεται εις τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας ΙΙ: Αντιστοίχιση πλανητών με μουσικά στοιχεία.

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΠΛΑΝΗΤΗΣ	ΔΑΚΤΥΛΙΣΜΟΣ	ΝΟΤΑ ΚΛΙΜΑΚΑΣ
α	**ΣΕΛΗΝΗ**	**ΝΗΤΗ**	**ΡΕ**
ε	**ΕΡΜΗΣ**	**ΠΑΡΑΝΗΤΗ**	**ΝΤΟ**
η	**ΑΦΡΟΔΙΤΗ**	**ΤΡΙΤΗ ΣΥΝΗΜΜΕ-ΝΩΝ**	**ΣΙ♭**
ι	**ΗΛΙΟΣ**	**ΜΕΣΗ**	**ΛΑ**
ο	**ΑΡΗΣ**	**ΛΙΧΑΝΟΣ**	**ΣΟΛ**
υ	**ΖΕΥΣ**	**ΠΑΡΥΠΑΤΗ**	**ΦΑ**
ω	**ΚΡΟΝΟΣ**	**ΥΠΑΤΗ**	**ΜΙ**

Όταν ο Πυθαγόρας παρετήρει τον έναστρον ουρανόν του Κρότωνος, ενετόπιζε μίαν κάποια αλληλουχία πλανητών, η οποία αντεστοίχει εις μίαν συγκεκριμένη αλληλουχίαν νοτών της μουσικής κλίμακος, δηλαδή εις μίαν συγκεκριμένη μελωδίαν. **Κατ' αυτόν τον τρόπον προέκυπτε εκάστη έναστρον νύκτα, κατά την γνώμη μου, η αρμονία των σφαιρών, εκ της οποίας ο Πυθαγόρας εξήγαγε διάφορα αστρονομικά κ.α. συμπεράσματα.**

<u>Παράδειγμα:</u> Η αλληλουχία των πλανητών ΣΕΛΗΝΗ-ΚΡΟΝΟΣ-ΕΡΜΗΣ-ΖΕΥΣ-ΑΦΡΟΔΙΤΗ-ΑΡΗΣ κ.λπ. μία έναστρον νύκτα μεταφράζεται μουσικώς, βάσει του Πίνακος ΙΙ, εις την ακόλουθον μουσικήν μελωδίαν:

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΑΞΙΩΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΟΥΣΙΚΗ ΣΥΜΦΩΝΙΑ

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής τεχνολογίας,
Τμήματος Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών.

1. Εισαγωγικά

Μοχθώντας επί μία τριακονταετία στον επιστημονικό στίβο, επεξέτεινα την ερευνητική, διδακτική και συγγραφική μου δραστηριότητα και στην αρχαία ελληνική γραμματεία, αφού ούτως ή άλλως, υπό το πρίσμα αυτής εξετάζονται οι μουσικές θεωρίες των επιφανών Ελλήνων φιλοσόφων, μαθηματικών και φυσικών.
Χρησιμοποιώντας τη Φυσική και τα Μαθηματικά σε αγαστή συνάρτηση με τη Μουσική, οδηγήθηκα στη σπουδή του μοναδικού «μουσικού» έργου του Ευκλείδου, την *Κατατομή Κανόνος* (του μονοχόρδου) (*section canonis*).

2. Ευκλείδειος κατατομή κανόνος

Ο Ευκλείδης (330 με 270 π.Χ.), υπήρξε μέγιστος Έλληνας διδάσκαλος των Μαθηματικών κατά τους Αλεξανδρινούς χρόνους. Η φήμη του, ως γεωμέτρου, διεδόθη παντού. Από τα μέσα ήδη της Ελληνιστικής εποχής, καθ΄ όλον τον μεσαίωνα αλλά και μέχρι των ημερών μας απανταχού της γης το όνομά του στη Δύση είναι ταυτόσημο με τη Γεωμετρία.

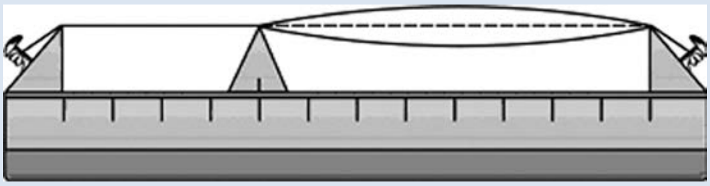
Η «κατατομή κανόνος», θα πρέπει να έχει γραφεί γύρω στο 300 π.Χ. Πρόκειται για μια πυθαγόρειο πραγματεία πάνω στη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου. Είναι γραμμένη με το ίδιο ύφος που είναι γραμμένα τα «Στοιχεία» του Ευκλείδου και γι’ αυτό αποδίδεται σ’ αυτόν.
Το πρώτο μεγάλο μέρος της Ευκλειδείου πραγματείας αντιμετωπίζεται ως μια ενιαία ολότητα, ως εισαγωγή. Στην εισαγωγή διατυπώνεται μια θεωρία για τη φυσική αιτία των ήχων και των μουσικών τους υψών έτσι σχεδιασμένη, ώστε να αιτιολογεί τη χρήση των μουσικών υψών ως σχετικών ποσοτήτων και των μεταξύ τους διαστημάτων ως αριθμητικών λόγων. Εν συνεχεία, με ένα επιχείρημα –το οποίο θα αποτελέσει το επίκεντρο της παρούσης εισηγήσεως- συσχετίζονται τα εύφωνα (σύμφωνα) διαστήματα με ορισμένους αριθμητικούς λόγους.

Ο συγγραφεύς της Ευκλειδείου πραγματείας, προκειμένου να αποδείξει συστηματικά και τυπικά τις προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως, βασίζεται κυρίως σε αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής

παρατηρήσεως καθώς επίσης σε φυσικές και σε γενικής φύσεως θεωρήσεις. Έτσι, τα συμπεράσματά του δεν είναι καθαρά «ορθολογιστικά» και τα επιχειρήματά του δεν αναπληρώνουν τη μουσική εμπειρία, αλλά απλά αποτελούν μια προσπάθεια να μεταφράσουν τις αλήθειες αυτών των εμπειριών στη γλώσσα των Μαθηματικών, ώστε οι επαγωγές και οι αμοιβαίες σχέσεις να μπορούν να μελετηθούν σχολαστικά.

3. Πυθαγόρειος κανών ή μονόχορδο

Ο Πυθαγόρειος κανών ή μονόχορδο ήταν ένα όργανο-εργαλείο, που χρησίμευε στη μέτρηση, τις δοκιμές και την απόδειξη των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών διαστημάτων. Η μακρόχρονη και επίπονη ενασχόληση του Πυθαγόρα με τη μουσική και τους πειραματισμούς του στο μονόχορδο έφερε ως αποτέλεσμα την υποταγή του κατ' εξοχήν φευγαλέου και ασύλληπτου μουσικού ήχου στον άτεγκτο νόμο των αριθμών.



Εικόνα 1. Το μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Με τη χρήση του μονοχόρδου οι Πυθαγόρειοι κατάφεραν να μεταφέρουν την ακουστική εμπειρία, με τη βοήθεια της Γεωμετρίας, σε οπτική παρατήρηση, γεγονός εξαιρετικά σημαντικό, αφού η όραση είναι ο πιο αξιόπιστος μάρτυρας ανάμεσα στις αισθήσεις μας. Σχετικώς ο Αριστοτέλης στα Μετά τα φυσικά 985 b 31 (Bekker) αναφέρει: «τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους» [βλέποντας στους αριθμούς τις μεταβολές και τους λόγους των αρμονιών].

4. Σχετική ποσότητα (=λόγος) - Είδη μεγαλύτερης ανισότητος

Ό,τι μετρείται συγκρινόμενο με μια άλλη ποσότητα είναι είτε ίσο, είτε άνισο.
Ίσο είναι κάθε τι που, όταν συγκρίνεται με κάτι άλλο, δεν είναι ούτε μικρότερο, ούτε μεγαλύτερο. Στην περίπτωση αυτή ομιλούμε για ισότητα των δύο οντοτήτων.
Εάν η σύγκριση δεν οδηγεί σε ισότητα, θα οδηγεί σε ανισότητα. Στην κάθε ανισότητα διακρίνεται το μεγαλύτερο και το μικρότερο, τα οποία ονομάζονται αντίθετα το ένα προς το άλλο.
Συσχετίζοντας σε μία ανισότητα το μεγάλο ως προς το μικρό, οδηγούμεθα σε πέντε είδη της αποκαλούμενης μεγαλύτερης ανισότητος.
Αυτά τα πέντε είδη είναι:

1. το πολλαπλάσιο,
2. το επιμόριο,

3. το επιμερές,
4. το πολλαπλασιεπιμόριο και
5. το πολλαπλασιεπιμερές.

4.1 Πολλαπλάσιοι αριθμοί

Ο πολλαπλάσιος αριθμός είναι τέτοιος που, συγκρινόμενος με έναν άλλον, τον περιέχει περισσότερο από μια φορά.
Ονομασία: Διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος κ.ο.κ.

4.2 Επιμόριοι αριθμοί

Όταν ένας αριθμός α εμπεριέχει ολόκληρο έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β και επί πλέον ένα μόνον μέρος αυτού, τότε ο α ονομάζεται επιμόριος του β.

Δηλαδή $\alpha = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \beta = \left(\frac{\nu + 1}{\nu}\right) \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \nu \in \mathrm{N} \ \ \& \ \alpha > \beta$

Η ονομασία των επιμορίων αριθμών επιτυγχάνεται με τη χρήση της προθέσεως **επί** και το τακτικό αριθμητικό του παρονομαστού του συμμετέχοντος μέρους του αριθμού.

Εάν $\nu = 3$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το τρία (3), τακτικό αριθμητικό είναι τρίτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επίτριτος $\left(1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3}\right)$.

Εάν $\nu = 4$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το τέσσερα (4), τακτικό αριθμητικό είναι τέταρτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επιτέταρτος $\left(1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4}\right)$.

Εάν $\nu = 15$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το πεντεκαίδεκα (15), τακτικό αριθμητικό είναι πεντεκαιδέκατος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επιπεντεκαιδέκατος $\left(1 + \frac{1}{15} = \frac{15+1}{15}\right)$

Ειδική περίπτωση ονοματολογίας επιμορίου αποτελεί η περίπτωση κατά την οποία $\nu = 2$. Ο επιμόριος $\left(1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2}\right)$ ονομάζεται Ημιόλιος (όλος και ήμισυς).

4.3 Επιμερείς αριθμοί

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται όταν ένας αριθμός α, συγκρινόμενος με άλλον μικρότερό του αριθμό β, τον περιέχει ολόκληρο και επί πλέον κάποια μέρη αυτού, όπως δύο ή τρία ή τέσσερα ή οποιοδήποτε άλλο μέρος μπορεί να προκύψει από τη σύγκριση.

Δηλαδή $\alpha = \left(1 + \frac{\mu}{\mu + \nu}\right) \cdot \beta = \left(\frac{2\mu + \nu}{\mu + \nu}\right) \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathrm{N} \ \ \& \ \alpha > \beta$

Αυτή η κατάσταση ξεκινά από τα δύο τρίτα, δηλαδή $(\mu = 2, \ \nu = 1)$.

Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλον αριθμό και επιπλέον δύο μέρη αυτού $\alpha = \left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\beta$, ονομάζεται επιδιμερής ή επιδίτριτος ή δισεπίτριτος.

Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλον αριθμό και επιπλέον τρία μέρη αυτού $\alpha = \left(1+\frac{3}{4}\right)\cdot\beta$, ονομάζεται επιτριμερής ή επιτριτέταρτος ή τρισεπιτέταρτος.

Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλον αριθμό και επιπλέον τέσσερα μέρη αυτού $\alpha = \left(1+\frac{4}{5}\right)\cdot\beta$, ονομάζεται επιτετραμερής ή επιτετράπεμπτος.

Στην περίπτωση κατά την οποία $(\nu > 1)$, τότε είναι δυνατόν να εμφανισθούν περιπτώσεις ως: τρισεπίπεμπτος $\alpha = \left(1+\frac{3}{5}\right)\cdot\beta$.

4.4 Πολλαπλασιεπιμόριοι αριθμοί

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται όταν ένας αριθμός α, συγκρινόμενος με έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β, περιέχει αυτόν περισσότερο από μία φορά και επί πλέον ένα μέρος αυτού, δηλαδή περιέχει το διπλάσιο ή το τριπλάσιο ή το τετραπλάσιο ή κάποιο άλλο πολλαπλάσιο αυτού κι επί πλέον ένα μέρος του, όπως το ήμισυ ή το ενα τρίτο ή το ένα τέταρτο ή κάποιο άλλο μέρος.

Δηλαδή $\alpha = \left(\mu+\frac{1}{\nu}\right)\cdot\beta = \left(\frac{\mu\nu+1}{\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\mu,\nu \in \mathrm{N} \ \ \& \ \alpha > \beta$

Ο αριθμός, επομένως, που περιέχει το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού και το ένα δεύτερο αυτού ονομάζεται διπλασιεφήμισυς $\alpha = \left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\beta$.

Εκείνος που περιέχει το διπλάσιο και το ένα τρίτο, ονομάζεται διπλασιεπίτριτος $\alpha = \left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\beta$. Εκείνος που περιέχει το διπλάσιο και το ένα τέταρτο, ονομάζεται διπλασιεπιτέταρτος $\alpha = \left(2+\frac{1}{4}\right)\cdot\beta$ κ.ο.κ.

Επίσης, εάν ένας αριθμός περιέχει το όλον ενός άλλου αριθμού τρεις φορές και το μισό ή το ένα τρίτο ή το ένα τέταρτο αυτού, ονομάζεται τριπλασιεφήμισυς, τριπλασιεπίτριτος, τριπλασιεπιτέταρτος.

Κατά τον ίδιο τρόπο ονομάζονται και οι υπόλοιποι.

4.5 Πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται, όταν ένας αριθμός α συγκρινόμενος με έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β, περιέχει ολόκληρο τον αριθμό β περισσότερο από μία φορά, και δύο ή τρία ή οσαδήποτε άλλα μέρη αυτού, σύμφωνα με το είδος του επιμερούς αριθμού. Δηλαδή $\alpha = \left(\rho+\frac{\mu}{\mu+\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\mu,\nu,\rho \in \mathrm{N} \ \ \& \ \alpha > \beta$

Οι εν λόγω αριθμοί ονομάζονται ανάλογα με τα μέρη τους:

διπλασι(ο)επιδιμερής $\alpha = \left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\beta$, διπλασι(ο)επιτριμερής, διπλασι(ο)επιτετραμερής κ.ο.κ. Και πάλι, ονομάζονται τριπλασι(ο)επιδιμερής, τριπλασι(ο)επιτριμερής, τριπλασι(ο)επιτετραμερής $\alpha = \left(3+\frac{4}{5}\right)\cdot\beta$ κ.λπ.

Παράδειγμα: Η σχέση $8:3 = 2+\frac{2}{3}$ αποτελεί ένα διπλασιεπιδιμερή λόγο.

5. Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία

Στο δεύτερο μισό της εισαγωγής της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»* αναφέρεται *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας. Οι Πυθαγόρειοι εξέφραζαν τα μουσικά διαστήματα ως λόγους ακεραίων αριθμών, δηλαδή συσχέτιζαν έναν ακέραιο αριθμό με έναν άλλον.

πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα ἀριθμοῦ
λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους
ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους·
τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ λέγονται,
οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ, οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ, ὥστε καὶ τοὺς
φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι
πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπι-
μόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους.
Γινώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώ-
νους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους
μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας, τοὺς δὲ διαφώ-
νους οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους
φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦνται κρᾶσιν
τῆς φωνῆς, εἶναι τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους
λεγομένων ἀριθμῶν, ἤτοι πολλαπλασίους ὄντας ἢ ἐπι-
μορίους.

[<u>Νεοελληνική Απόδοση:</u> *Όλα όσα δε συνίστανται από τμήματα εκφράζονται μεταξύ τους με έναν αριθμητικό λόγο (=μια αριθμητική σχέση), ώστε είναι απαραίτητο και οι φθόγγοι με έναν αριθμητικό λόγο να εκφράζονται μεταξύ τους. Από τους αριθμούς άλλοι μεν σχετίζονται με λόγο πολλαπλάσιο, άλλοι δε με λόγο επιμόριο και άλλοι με λόγο επιμερή, ώστε είναι απαραίτητο και οι σχέσεις των φθόγγων να εκφράζονται με τέτοιου είδους λόγους. Από αυτούς τους λόγους οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι προφέρονται μονολεκτικά.*
Επιπροσθέτως γνωρίζομε ότι από τους φθόγγους άλλοι μεν είναι σύμφωνοι, άλλοι δε διάφωνοι και οι μεν σύμφωνοι φθόγγοι μια συγχώνευση των δύο δημιουργούν, οι δε διάφωνοι όχι. Έτσι εχόντων των πραγμάτων (των σχετικών με τους φθόγγους), είναι φυσικό οι σύμφωνοι φθόγγοι, επειδή οι δύο τους δημιουργούν μία συγχώνευση της φω-

νής, να εκφράζονται με τους αριθμητικούς λόγους, που προφέρονται μονολεκτικά, δηλαδή αυτούς που είναι πολλαπλάσιοι ή επιμόριοι].

Ο συγγραφεύς συμπεραίνει ότι οι ήχοι –με την έννοια του δονουμένου τμήματος της χορδής- συνίστανται από «μόρια (=υποπολλαπλάσια τμήματα)», του όλου μήκους της χορδής. Ήχοι διαφορετικού μουσικού ύψους πρέπει τότε να είναι ικανοί να αλληλοσυσχετισθούν με αριθμητικούς λόγους, όπως ακριβώς συμβαίνει σε όλα τα πράγματα που συνίστανται από τμήματα.
Αμέσως μετά ο συγγραφεύς εισέρχεται στο θέμα των ευφώνων και των διαφώνων φθόγγων. Λέει ότι εύφωνοι είναι οι φθόγγοι τα στοιχεία των οποίων σχηματίζουν έναν ομοιογενή σύνθετο ήχο, κάτι που δεν συμβαίνει με τους διαφώνους φθόγγους.
Με ένα σ υ γ κ ε χ υ μ έ ν ο επιχείρημα ο συγγραφεύς εντάσσει τα εύφωνα διαστήματα στις δύο πρώτες κλάσεις λόγων, διότι έχουν μεταξύ τους κάτι το κοινό, που δεν το μοιράζονται με την τρίτη. Είναι η ασάφεια, η λακωνικότητα και η αδύναμη αποδεικτικότητα αυτής της παραγράφου που δημιουργεί υποψίες ότι αυτή η παράγραφος δεν στέκει σαν καρπός σκέψεως του λεπτολόγου συγγραφέως των Στοιχείων. Παρόλα αυτά η παράγραφος περιέχει το κυρίαρχο στοιχείο, την ουσία στην ανάλυση που ακολουθεί. Επί πλέον η απουσία της θα συνεπάγετο την κατάρρευση του μεθοδολογικού πλαισίου ολοκλήρου της πραγματείας.

Από τα πέντε αυτά είδη της μεγαλύτερης ανισότητος τα δύο τελευταία δεν μνημονεύονται καθόλου στην Ευκλείδειο πραγματεία *«Κατατομή κανόνος»*. Τα δύο πρώτα, όμως, με τη σειρά που τα αναφέρουμε, τα συνδέει ο Ευκλείδης, βάσει εμπειρικών πυθαγορείων παρατηρήσεων, με την *εύφωνία* ή *συμφωνία*.
Κατά την Πυθαγόρειο μουσική θεωρία τα μουσικά διαστήματα κατετάσσοντο σε δύο βασικές κατηγορίες τις *ευφωνίες* ή *συμφωνίες* και τις *διαφωνίες* ή *ασυμφωνίες*.
Πρέπει να σημειώσουμε ότι σύμφωνα με *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας ΜΟΝΟ μία *πολλαπλάσια* ή *επιμόρια* σχέση μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4) εκφράζει ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα.
Αυτό συμβαίνει στα διαστήματα *δις διαπασών* $\left(\frac{4}{1}\right)$, *διαπασών* $\left(\frac{2}{1}\right)$, *ημιόλιον* $\left(\frac{3}{2}\right)$, *επίτριτον* $\left(\frac{4}{3}\right)$.
Έτσι, λοιπόν, σύμφωνα με το *θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας το διάστημα του επογδόου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, παρόλο που αποτελεί μια επιμόρια σχέση, το κατέτασσαν στις διαφωνίες ή ασυμφωνίες, επειδή οι ακέραιοι αριθμοί 8 και 9, που το δομούν, δεν συγκαταλέγονται μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4).
Στα σύμφωνα μουσικά διαστήματα συγκαταλέγοντο και τα σύνθετα των παραπάνω συμφώνων διαστημάτων με την οκτάβα. Έτσι, λοιπόν,

η δις διαπασών (=διαπασών+διαπασών) εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{1}\right)$ και εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα,
η διαπασών και δια πέντε (=διαπασών+δια πέντε) εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{1}\right)$ και εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα,
η διαπασών και δια τεσσάρων (=διαπασών+δια τεσσάρων) εκφράζεται με πολλαπλασιεπιμερή σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}\right)$, παραβιάζει το *Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία*, και γι' αυτό εντάσσεται στα διάφωνα ή ασύμφωνα διαστήματα.
Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος επικυρώνει ότι *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας, όπως ακριβώς το διατυπώσαμε παραπάνω, ήταν το κεντρικό δόγμα της Πυθαγορείου μουσικής ομολογίας πίστεως, επικρίνει τους Πυθαγορείους που περιορίζουν αυθαιρέτως την ευφωνία ή συμφωνία μόνο στους όρους της ιεράς τετρακτύος και διερωτάται γιατί οι Πυθαγόρειοι δεν εντάσσουν στα εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα τα μουσικά διαστήματα 5:4 ή 5:1. Επίσης τους κατηγορεί που εξαιρούν από τα εύφωνα ή σύμφωνα μουσικά διαστήματα το διάστημα της διαπασών και δια τεσσάρων, υποστηρίζοντας ότι η διαπασών δεν αλλοιώνει τον εύφωνο ή διάφωνο χαρακτήρα του μουσικού διαστήματος, στο οποίο προστίθεται. Από αυτήν την οπτική γωνία, λοιπόν, η διαπασών και δια τεσσάρων είναι ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα.

Η έκφραση «Τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν», η οποία υπάρχει στο τέλος του παρατεθέντος αποσπάσματος της εισαγωγής της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»*, ακόμη και σήμερα αποτελεί ένα άλυτο μυστήριο, το οποίο απασχόλησε και εξακολουθεί να απασχολεί αναρίθμητους μελετητές. Τι να εννοούσε άραγε ο Ευκλείδης με αυτήν τη φράση;
Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα οι Louis Laloy, Edward Lippman και Andrew Barker διετύπωσαν την άποψη ότι στην αρχαία εποχή μόνον οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι αριθμοί θα εξεφωνούντο μονολεκτικά, ενώ οι επιμερείς, οι πολλαπλασιεπιμόριοι και οι πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί θα εξεφωνούντο με περισσότερες της μιας λέξεις.
Αλλά αυτή η βολική άποψη ανατρέπεται από την ονοματολογία των πολλαπλασίων, των επιμορίων, των επιμερών, των πολλαπλασιεπιμορίων και των πολλαπλασιεπιμερών αριθμών, την οποία μας παραθέτει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός στο έργο του «*Αριθμητική εισαγωγή*» και η οποία για όλους αυτούς τους αριθμούς είναι μονολεκτική, όπως δια παραδειγμάτων προανεφέρθη.
Ως αντίλογος υποστηρίζεται η άποψη ότι πράγματι στην αρχαία εποχή μόνον οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι αριθμοί εξεφωνούντο μονολεκτικά, ενώ οι επιμερείς, οι πολλαπλασιεπιμόριοι και οι πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί εξεφωνούντο με περισσότερες της μιας λέξεις και ότι ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (50-120 μ.Χ.) επενόησε

κατά τη συγγραφή του έργου του «*Αριθμητική εισαγωγή*» τον μονολεκτικό τρόπο εκφωνήσεως όλων των πέντε ειδών αριθμών της καλουμένης *μεγαλύτερης ανισότητος*.

Π ρ ο σ ω π ι κ ώ ς τ ο ν π α ρ α π ά ν ω α ν τ ί λ ο γ ο δ ε ν τ ο ν α π ο δ έ χ ο μ α ι . Πιστεύω ακραδάντως ότι, εάν ο Νικόμαχος επινοούσε κάτι το διαφορετικό από τό ό,τι ήτο αποδεκτό από τους «παλαιούς» σε σχέση με την ονομασία και εκφώνηση των πέντε ειδών των αριθμών της καλουμένης μεγαλύτερης ανισότητος, αφενός μεν θα το εδήλωνε, κι αφετέρου θα παρέθετε και τον «παλαιό» τρόπο εκφωνήσεως του αριθμού δίπλα στο νεοεισαγόμενο δικό του τρόπο.
Υποστηρίζω την άποψη ότι και τα πέντε είδη των αριθμών της καλουμένης μεγαλύτερης ανισότητος εξεφωνούντο μονολεκτικώς, αλλά ο Ευκλείδης αποδέχεται μόνον τα δύο πρώτα είδη των αριθμών, διότι αυτά και μόνον αυτά οδηγούν σε αριθμητικές σχέσεις εκφρασμένες με τους ενσαρκωτές της ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4), οι οποίες υποδηλώνουν το σύμφωνον ή το διάφωνον ενός μουσικού διαστήματος.
Πράγματι, οι πολλαπλάσιοι αριθμοί $\frac{\alpha}{\beta}=n \;\; \gamma\iota\alpha \;\; n=1,2,3,4$ θεωρούνται από τους Πυθαγορείους ότι εκφράζουν εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα και συγκεκριμένα την ταυτοφωνία ή ομοφωνία, τη διαπασών, τη διαπασών και δια πέντε (διαπασών+δια πέντε) και τη δις διαπασών, αντίστοιχα.
Οι επιμόριοι αριθμοί $\frac{\alpha}{\beta}=1+\frac{1}{n} \;\; \gamma\iota\alpha \;\; n=1,2,3$ θεωρούνται από τους Πυθαγορείους ότι εκφράζουν τα εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)$, δια πέντε ή ημιόλιον $\left(\frac{3}{2}\right)$, δια τεσσάρων ή επίτριτον $\left(\frac{4}{3}\right)$, αντίστοιχα.
Ο μικρότερος επιμερής αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, που κατά τους Πυθαγορείους, αφού περιέχει τον αριθμό 5, ο οποίος ούτε είναι ένας από τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος, ούτε και είναι ένας «πυθαγόρειος» αριθμός, δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα.
Ο μικρότερος πολλαπλασιεπιμόριος αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, που κατά τους Πυθαγορείους, αφού περιέχει τον αριθμό 5, για τους ίδιους λόγους δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα.
Ο μικρότερος πολλαπλασιεπιμερής αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, που κατά τους Πυθαγορείους, ναι μεν είναι «πυθαγόρειος» αριθμός, αφού $8=2^3\cdot 3^0$, αλλά δεν συμπίπτει με έναν από τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος, δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα.
Αφού, λοιπόν, οι μικρότεροι των επιμερών, των πολλαπλασιεπιμορίων και των πολλαπλασιεπιμερών αριθμών δεν είναι δυνατόν να εκφράζουν σύμφωνα μουσικά διαστήματα, κατά μείζονα λόγον κι όλοι οι αντίστοιχοι μεγαλύτεροί τους αριθμοί δεν

μπορούν, κατά την άποψη των Πυθαγορείων, να εκφράζουν σύμφωνα μουσικά διαστήματα.
Για την κατανόηση των παραπάνω μη διαφεύγει της προσοχής μας ότι οι «κανονικοί», δηλαδή οι μουσικοί που χρησιμοποιούσαν τον κανόνα (=μονόχορδο) για ακουστικά πειράματα, στην αρχή χρησιμοποιούσαν τον αρχέγονο κανόνα, τον Πυθαγόρειο, που ηταν διηρημένος σε τέσσερα ίσα μέρη. Τούτο σημαίνει ότι ο κανών έφερε δεσμούς (=τάστα) με τις αριθμήσεις 1, 2, 3, 4 και υποστήριζε στη μουσική πράξη εύφωνα μουσικά διαστήματα εκφραζόμενα ΜΟΝΟ με σχέσεις μεταξύ των αριθμών της ιεράς τετρακτύος.
Σ' αυτό συνηγορούν το Πυθαγόρειο πείραμα κατά Γαυδέντιον με τα δονούμενα τμήματα της χορδής του μονοχόρδου και η ρήση του Φιλολάου «ἁρμονίας δὲ μέγεθος συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν» (Νικόμαχος, Εγχειρίδιον Αρμονικής, 9.1.14-15).

Στοιχεία Θεωρίας Γλωσσών
εις την μελέτην των γλωσσών των μουσικών ρυθμών

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης,
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής,
Διευθυντής Τομέως Τεχνολογίας Ήχου, Μουσικοπαιδαγωγικής & Βυζαντινής Μουσικολογίας,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Τμήματος Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφικής Σχολής
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

hspyridis@music.uoa.gr

Προλεγόμενα

Εκ της πρωτογόνου εισέτι εποχής, καθώς ο άνθρωπος «οργανώνει» και σημασιοδοτεί τους ήχους, τους οποίους παράγει δια της φωνής του, δια του σώματός του και δια των υλικών, άτινα τον περιβάλλουν, επιχειρεί να εκφραστεί και να επικοινωνήσει. Επ' αυτῷ τῷ σκοπῷ εδόμησεν δύο βασικά ηχητικά συστήματα-κώδικες επικοινωνίας, έχοντα κοινήν φύσιν και καταγωγήν με ασαφή –τότε- όρια διαχωρισμού: την γλώσσαν και την μουσικήν.
Λέγοντες ότι η μουσική αποτελεί μίαν γλώσσαν επικοινωνίας πιθανώς να μην ομιλούμεν περί ενός απλού «σχήματος λόγου» ή περί μιας «αισθήσεως», αλλά περί μιας λειτουργίας εδραζομένης εις τον εγκέφαλόν μας!
Αυτή η ενότης της μουσικής και της γλώσσης υποστηρίζεται σήμερον με πλήθος επιστημονικών στοιχείων εκ της ιστορικής, εθνολογικής, φιλολογικής και μουσικολογικής ερεύνης.
Εις τις ημέρες μας οι μέθοδοι της Γλωσσολογίας και ειδικότερον της Εθνογλωσσολογίας αποτελούν εκ των πολυτιμοτέρων όπλων των μουσικολόγων εις την προσπάθειάν των να προσεγγίσουν και να ερμηνεύσουν τα μουσικά φαινόμενα και τα όρια μεταξύ της «γλώσσης της μουσικής» και της «μουσικής της γλώσσης».
Οι πλέον πρόσφατες έρευνες των νευροεπιστημόνων φαίνεται να επιβεβαιώνουν την παναρχαίαν πυθαγόρειον εικασίαν περί καθολικότητος της μουσικής γλώσσης, ήτις αντιμετωπίζεται ως μία δυναμική διαλεκτική μεταξύ της Ηχοδημιουργίας και της Ψυχοακουστικής επί τη βάσει ενός αυστηρού μαθηματικού φορμαλισμού. Έκτοτε και ιδιαιτέρως εις την εποχήν μας η Υπολογιστική Επιστήμη ολοέν και περισσότερον διεισδύει εις την Μουσικήν Ανάλυσιν, ερμηνεύουσα βαθμηδόν πολυπλοκότερες μουσικές διεργασίες και ανακαλύπτουσα συνεχώς και συνθετότερες Υπολογιστικές και Μαθηματικές δομές, αίτινες επεκτείνουν τις ήδη υπάρχουσες κλασικές δομές.

Στοιχεία Θεωρίας Γλωσσών

Αλφάβητον

Έστω Χ ένα πεπερασμένον σύνολον, το οποίον ονομάζομεν *αλφάβητον*.
Τα στοιχεία του συνόλου Χ, ήτοι του αλφαβήτου, τα ονομάζομεν *γράμματα*.

Παρατιθεμένων των γραμμάτων το εν κατόπιν του άλλου, $x_1x_2 \dots x_\nu$ δομούν την *λέξιν*.

Δοθεισών δύο λέξεων $x_1x_2 \dots x_\nu$, $y_1y_2 \dots y_\mu$ με γράμματα εκ του συνόλου X, εάν

i. ν=μ
ii. $x_i = y_i$ i=1, 2, …, μ

οι δύο λέξεις είναι ίσες, υπό την έννοιαν ότι ταυτίζονται.

Λέξις άνευ ουδενός γράμματος ονομάζεται *κενή* και την συμβολίζομεν δια του ε.

Δια της παραθέσεως λέξεων δομούνται οι σύνθετες λέξεις $x_1x_2 \dots x_\nu y_1y_2 \dots y_\mu$.

Γλώσσα

Το σύνολον X^* όλων των δυνατόν να δομηθούν λέξεων εξ ενός αλφαβήτου X ονομάζεται *πλήρης γλώσσα*.

Γλώσσα ονομάζεται παν υποσύνολον $(L \subset X^*)$ του συνόλου X^*, ήτοι της πλήρους γλώσσης.

Δια της παραθέσεως γλωσσών, δομούνται οι *σύνθετες γλώσσες*.
Εάν $(L_1 \subset X^*)$, $(L_2 \subset X^*)$, τότε L_1L_2 και L_2L_1 είναι σύνθετες γλώσσες.

Για μαθηματικούς και μόνον λόγους δεχόμεθα την ύπαρξιν μιας γλώσσης, περιεχούσης μόνον την κενήν λέξιν ε.

Αντιμετώπισις της Μουσικής ως Γλώσσης

Μουσικόν Αλφάβητον

Προκειμένου να ορίσωμεν το αλφάβητον της γλώσσης της μουσικής, ανατρέχομεν εις την φυσιολογίαν του ανθρωπίνου ωτός, το οποίον αντιλαμβάνεται ήχους συχνοτικού εύρους εκ των 16 Hz έως τα 16 kHz.
Εξ αυτού του συχνοτικού εύρους, λαμβανομένης υπ’ όψιν και της μόλις διακρισίμου διαφοράς των ήχων υπό του ανθρωπίνου ωτός εις εκάστην περιοχήν του ακουστού φάσματος, επιλέγεται ένα σύνολον συχνοτήτων ως «*φθόγγων*» ή ως «*νοτών*» ή ως «*γραμμάτων*», προκειμένου δι’ αυτών να «ομιλήσωμεν» την *μουσικήν γλώσσαν*.
Τα γράμματα της ευρωπαϊκής μουσικής γλώσσης ωρίσθησαν επί τη βάσει του ευρωπαϊκού ίσου συγκερασμού, ήτοι των 12 ίσων συγκερασμένων ημιτονίων ανά διαπασών (οκτάβα).
Η συχνοτική σχέσις εκάστου συγκερασμένου ευρωπαϊκού ημιτονίο είναι $\sqrt[12]{2}$ και ολόκληρον το ακουστόν συχνοτικόν εύρος πληρούται υπό $9{,}96 \cong 10$ διαπασών, ήτοι $M = 12\frac{log\left(\frac{16000}{16}\right)}{\log(2)} = 119{,}6 \cong 120$ συγκερασμένων ευρωπαϊκών ημιτονίων.

Ταύτα τα 120 συγκερασμένα ευρωπαϊκά ημιτόνια εμπεριέχονται μεταξύ 121 νοτών, οι οποίες και αποτελούν το εν δυνάμει *αλφάβητον της μουσικής*.

Σημειωτέον ότι εις την μουσικήν πράξιν η συχνοτική αύτη περιοχή $X=\{C_0, C_0\sharp, \dots , C_{10}\}$ περιορίζεται μεταξύ των ακραίων νοτών του πληκτρολογίου του πιάνου, ήτοι της A_0 (27,50 Hz) και της C_8 (4186,01 Hz).

Οιαδήποτε πεπερασμένου μήκους αλληλουχία εξ αυτών των γραμμάτων, ήτοι των μουσικών φθόγγων, αποτελεί μίαν *μουσικήν λέξιν*.

Η κενή λέξις εις το μουσικόν αλφάβητον είναι η *παύσις*.

Το σύνολον X* όλων των δυνατόν να δομηθούν μουσικών λέξεων εκ φθόγγων αποτελεί την *μουσικήν γλώσσαν*.

Ο πληθικός αριθμός αυτού του συνόλου, ήτοι της μουσικής γλώσσης X*, αποτελεί τον *μουσικόν λεξιλογικόν πλούτον* της μουσικής γλώσσης.

Ρυθμικόν αλφάβητον

Δια τον ακριβή προσδιορισμόν της χρονικής εκτάσεως εκάστου επισυμβαίνοντος συχνοτικού γεγονότος, ορίζομεν το *αλφάβητον χρονικών διαρκειών* Y:

Y={ε}∪{𝅘𝅥𝅯, 𝅘𝅥𝅮, 𝅘𝅥𝅮., 𝅘𝅥, 𝅘𝅥., 𝅘𝅥.., 𝅗𝅥, 𝅗𝅥., 𝅗𝅥.., 𝅝}

με μικροτέραν την διάρκειαν του δεκάτου έκτου.

Για μαθηματικούς και μόνον λόγους ορίζομεν εις το ρυθμικόν αλφάβητον το γράμμα ⌖ με διάρκειαν μηδενικού χρόνου.
Το *αλφάβητον χρονικών διαρκειών* Y δυνάμεθα να γράψωμεν και ως
Y={⌖}∪{1d, 2d, 3d, 4d, 6d, 7d, 8d, 12d, 14d, 16d}, ένθα d ένα βάρος χρονικής διαρκείας.

Οιαδήποτε πεπερασμένου μήκους αλληλουχία εξ αυτών των ρυθμικών γραμμάτων αποτελεί μίαν *ρυθμικήν λέξιν*.

Εκ του αλφαβήτου Y δομείται η *ρυθμική γλώσσα* Y*, ήτοι το σύνολον όλων των δυνατόν να δομηθούν ρυθμικών λέξεων.
Ο πληθικός αριθμός αυτού του συνόλου, ήτοι της ρυθμικής γλώσσης Y*, αποτελεί τον *λεξιλογικόν πλούτον* της ρυθμικής γλώσσης.

Μουσικόν Ρυθμικόν αλφάβητον

Το *μουσικόν ρυθμικόν αλφάβητον* ορίζεται δια του καρτεσιανού γινομένου Z=XxY των δύο προαναφερθέντων αλφαβήτων, ήτοι του μουσικού X και του ρυθμικού Y και έχει πληθικόν αριθμόν, ήτοι πλήθος μουσικών ρυθμικών γραμμάτων, ίσον προς το γινόμενον των πληθικών αριθμών των δύο δομικών του αλφαβήτων˙ τουτέστιν (1+121)x(1+10)=1342 *μουσικά ρυθμικά γράμματα*.

Οιαδήποτε πεπερασμένου μήκους αλληλουχία εκ των μουσικών ρυθμικών γραμμάτων αποτελεί μίαν *μουσικήν ρυθμικήν λέξιν*.

Εκ του αλφαβήτου Z δομείται η *μουσική ρυθμική γλώσσα* Z*, ήτοι το σύνολον όλων των δυνατόν να δομηθούν μουσικών ρυθμικών λέξεων.
Ο πληθικός αριθμός αυτού του συνόλου, ήτοι της μουσικής ρυθμικής γλώσσης Z*, αποτελεί τον *λεξιλογικόν πλούτον* της μουσικής ρυθμικής γλώσσης.
Κατόπιν τούτων έστω το παράδειγμα:
Μουσική λέξις εκ του συνόλου X: $G_4C_5D_5A_4$
Ρυθμική λέξις εκ του συνόλου Y: 6d 2d 8d 4d
Μουσική ρυθμική λέξις εκ του συνόλου Z=XxY: (G_4,6d)(C_5,2d)(D_5,8d)(A_4,4d), η οποία εις την ευρωπαϊκήν μουσικήν σημειογραφίαν καταγράφεται ως κάτωθι:

Μουσικά Μέτρα

Τα *μουσικά μέτρα* αποτελούν *ειδικήν κατηγορίαν ρυθμικών λέξεων*, οι οποίες συγκροτούν ειδικές γλώσσες, ονομαζόμενες *μουσικοί ρυθμοί*.
Συγκεκριμένως, το σύνολον των ρυθμικών λέξεων, των αθροιζουσών εις συγκεκριμένον σταθερόν άθροισμα c_i, δομεί τον *μουσικόν ρυθμόν* c_i.

$$d_1+d_2+\ldots+d_m=c_i \ \rightarrow \ \sum_1^m d_i = c_i.$$

Η κενή λέξις ε εις τις γλώσσες των μουσικών ρυθμών συμβολίζεται ως | και ονομάζεται *διαστολή*.

Εις τον χώρον της Μουσικής ενδιαφέρει λίαν εξαιρετικώς η μελέτη των μουσικών ρυθμών, διότι δίδει πληροφορίες για τον ρυθμικόν πλούτον των κατά καιρούς και των κατά περιοχές μουσικών ειδών, άτινα εδημιουργήθησαν υπό μιας ή περισσοτέρων ομάδων ανθρώπων, οι οποίες ομάδες δυνατόν να αποτελούν υποσύνολα και ενός συγκεκριμένου λαού.

Ο πληθικός αριθμός N_{ci} του συνόλου εκάστης γλώσσης του μουσικού ρυθμού c_i εκφράζει αριθμητικώς ολόκληρον τον *ρυθμικόν πλούτον* του συγκεκριμένου μουσικού ρυθμού c_i.

Δυνατόν ο πλούτος αυτός να περιορίζεται δραστικότατα υπό διαφόρων τιθεμένων περιορισμών δομής. Οι εν λόγω περιορισμοί δυνατόν να αντανακλούν είτε εις την εγειρομένην δυσκολίαν κατά την εκτέλεσιν των μουσικών μέτρων, είτε εις την μουσικήν αισθητικήν του «συνθέτου» ανθρώπου ή λαού μιας συγκεκριμένης εποχής ή/και μιας συγκεκριμένης γεωγραφικής περιοχής.

Όλες οι γλώσσες των μουσικών ρυθμών είναι *σύνθετες γλώσσες* προερχόμενες εκ παραθέσεως ή της γλώσσης του *απλού διμερούς ρυθμού* D ή/και της γλώσσης του *απλού τριμερούς ρυθμού* T.

Η γλώσσα του διμερούς ρυθμού D

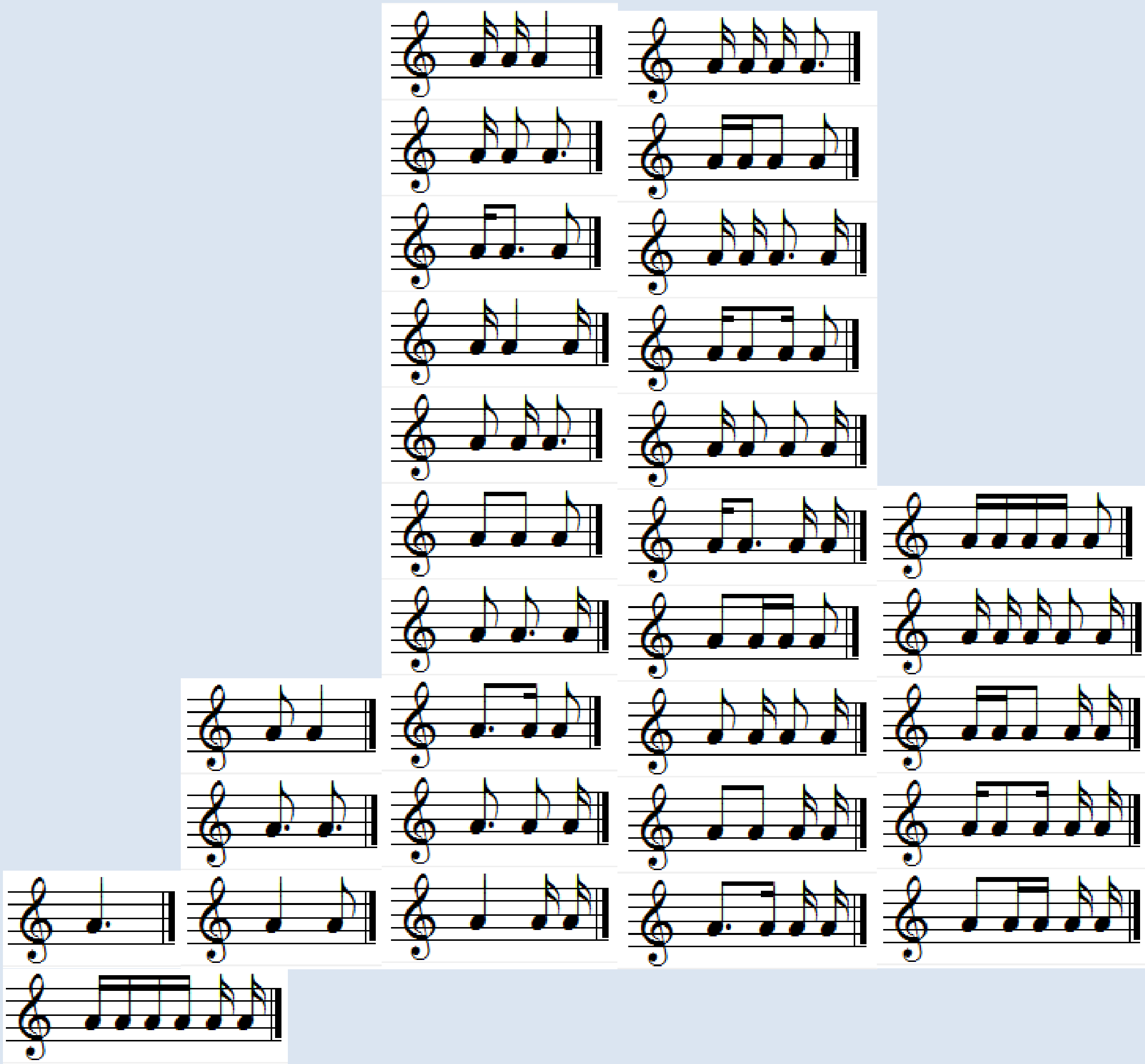
Κατ' αυτήν ισχύει $d_1 + d_2 + \ldots + d_m = c_i = 2d_{def}$

Εάν η τιμή της d_{def} ισούται προς το όγδοον και εάν θεωρούμεν ως ελαχίστην τιμήν χρονικής διαρκείας το δέκατον έκτον, τότε ο πληθικός αριθμός της γλώσσης του απλού διμερούς ρυθμού είναι ίσος προς 8.

Η γλώσσα του τριμερούς ρυθμού T

Κατ' αυτήν ισχύει $d_1 + d_2 + \ldots + d_m = c_i = 3d_{def}$

Εάν η τιμή της d_{def} ισούται προς το όγδοον και εάν θεωρούμεν ως ελαχίστην τιμήν χρονικής διαρκείας το δέκατον έκτον, τότε ο πληθικός αριθμός της γλώσσης του απλού τριμερούς ρυθμού είναι ίσος προς 30.



Υπολογισμός του πληθικού αριθμού της γλώσσης ενός συνθέτου μουσικού ρυθμού

Να ευρεθεί ο λεξιλογικός πλούτος της γλώσσης του μουσικού ρυθμού των 7/8.

Κατά τον Αλεξανδρινόν γραμματικόν, τον Ηφαιστίωνα (2[ος] μ.Χ. αι.) (*Εγχειρίδιον περί μέτρων*, 12, 11-21), ο ρυθμός αυτός προέρχεται εκ του επταχρόνου επιτρίτου ποδός και απαντάται εις τις ακολούθους τέσσερις δομικές μορφές:

1. ἐκ βραχείας καὶ τριῶν μακρῶν (∪ — — —), πρῶτος ἐπίτριτος
2. ἐκ μακρᾶς καὶ βραχείας καὶ δύο μακρῶν (— ∪ — —), δεύτερος ἐπίτριτος ἢ καὶ τροχαϊκὴ ἑπτάσημος, ὁ καὶ Καρικός
3. ἐκ δύο μακρῶν καὶ βραχείας καὶ μακρᾶς (— — ∪ —), τρίτος ἐπίτριτος ἢ ἰαμβικὴ ἑπτάσημος, ὁ καὶ Ῥόδιος
4. ἐκ τριῶν μακρῶν καὶ βραχείας (— — — ∪), τέταρτος ἐπίτριτος ἢ ἀντισπαστικὴ ἑπτάσημος, ὁ καὶ μονογενής.

Οι μονάδες d_{def} εντός εκάστης λέξεως, ήτοι εντός εκάστου μουσικού μέτρου, δύνανται να κατανέμωνται κατά τους εξής και μόνον τρεις τρόπους, εάν επιθυμούμεν αυτά να είναι εφικτώς εκτελεστέα και ρυθμικώς αποδεκτά:

$\frac{7}{8} = \frac{3+2+2}{8} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8}$ (Μείξις πρώτου και δευτέρου επιτρίτου)
ή
$\frac{7}{8} = \frac{2+3+2}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8}$ (Μείξις δευτέρου και τρίτου επιτρίτου)
ή
$\frac{7}{8} = \frac{2+2+3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8}$ (Μείξις τρίτου και τετάρτου επιτρίτου)

Υπ’ αυτές τις προϋποθέσεις έκαστον μέτρον συντίθεται εκ τριών μέτρων δύο εκ των οποίων είναι του απλού διμερούς ρυθμού και ένα του απλού τριμερούς ρυθμού με διαφορετικήν την διάταξίν των.
Κατά την *θεμελιώδην αρχήν της απαριθμήσεως* το αποτέλεσμα της συνολικής απαριθμήσεως (σύνθετον γεγονός) ισούται προς το γινόμενον των αποτελεσμάτων των επί μέρους (απλά γεγονότα) ανεξαρτήτων απαριθμήσεων.
Εν προκειμένω:

$$N_{\frac{7}{8}} = N_{\frac{3+2+2}{8}} = N_{\frac{3}{8}} \cdot N_{\frac{2}{8}} \cdot N_{\frac{2}{8}} = N_T \cdot N_D \cdot N_D = 30 \cdot 8 \cdot 8 = 1920$$

Μουσικά μέτρα τοιαύτης κατανομής ρυθμικών μονάδων δομούν τον γνωστόν *καλαματιανόν ρυθμόν*, όστις περιλαμβάνει 1920 εκτελεστέες -κατά τα παραδοσιακά- μορφές μέτρων.

$$N_{\frac{7}{8}} = N_{\frac{2+3+2}{8}} = N_{\frac{2}{8}} \cdot N_{\frac{3}{8}} \cdot N_{\frac{2}{8}} = N_D \cdot N_T \cdot N_D = 8 \cdot 30 \cdot 8 = 1920$$

Μουσικά μέτρα τοιαύτης κατανομής ρυθμικών μονάδων ΔΕΝ απαντώνται εις την πράξιν δια τον απλούστατον λόγον ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος τα αποδέχεται ως ρυθμικές λέξεις ανήκουσες εις τους δύο άλλους μουσικούς ρυθμούς, τους έχοντες τον απλούν τριμερή ρυθμόν είτε εις την αρχήν, είτε εις το τέλος του μέτρου.

$$N_{\frac{7}{8}} = N_{\frac{2+2+3}{8}} = N_{\frac{2}{8}} \cdot N_{\frac{2}{8}} \cdot N_{\frac{3}{8}} = N_D \cdot N_D \cdot N_T = 8 \cdot 8 \cdot 30 = 1920$$

Μουσικά μέτρα τοιαύτης κατανομής ρυθμικών μονάδων δομούν τον γνωστόν *μανδυλάτον της Θράκης ρυθμόν*, όστις περιλαμβάνει 1920 εκτελεστέες -κατά τα παραδοσιακά- μορφές μέτρων.
Υπό τις τεθείσες προϋποθέσεις ο πληθικός αριθμός του μουσικού ρυθμού των 7/8 είναι ίσος προς:

$$N_{\frac{7}{8}} = N_{\frac{3+2+2}{8}} + N_{\frac{2+3+2}{8}} + N_{\frac{2+2+3}{8}} = 1920 + 1920 + 1920 = 5760$$

κατ’ ουσίαν, όμως, ίσος προς:

$$N_{\frac{7}{8}} = N_{\frac{3+2+2}{8}} + N_{\frac{2+2+3}{8}} = 1920 + 1920 = 3840$$

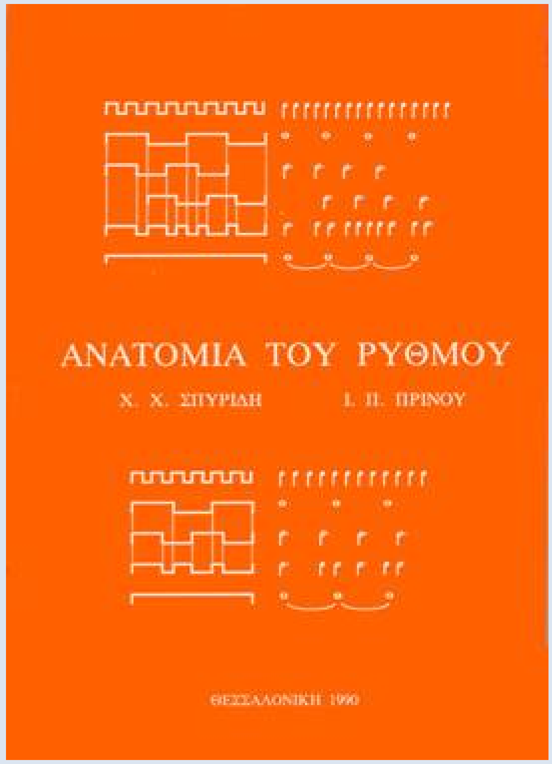
Εάν δεν τεθεί κανείς περιορισμός δομής του μουσικού μέτρου, αποδεικνύεται δια της Συνδυαστικής Αναλύσεως ότι ο μουσικός ρυθμός 7/8 έχει πληθικόν αριθμόν ίσον προς 6618.

Εν κατακληΐδι, οι 5760 μορφές μέτρου του μουσικού ρυθμού των 7/8 εκ των 6618 είναι σχετικώς ευκολοεκτελεστέες και οι 3840 μορφές εξ αυτών εν δυνάμει είναι εν χρήσει υπό του λαϊκού ή λογίου μουσικού συνθέτου, ενώ οι 6618-3840=2778 μορφές μέτρου του μουσικού ρυθμού των 7/8 είναι είτε για «Ξενάκειον» χρήσιν ή «δια τον βασανισμόν των μουσικών οργάνων και των οργανοεκτελεστών» κατά την ρήσιν των ειρωνευομένων τους *Κανονικούς* μουσικούς τον καιρόν του Πυθαγόρου.

Ομιλών εις ακροατήριον έχον παντοίαν σχέσιν με την μουσικήν επιστήμην και τέχνην, παραθέτω δι’ αριθμών τον λεξιλογικόν πλούτον των γλωσσών των διαφόρων μουσικών ρυθμών, προτρέπων τους μουσικούς δημιουργούς να εκμεταλλευθούν ένιες ιδιομορφίες αυτών και να προχωρήσουν εις την ιδικήν των ρυθμικήν επανάστασιν. Την έχομεν ανάγκην, σας διαβεβαιώ.

Γλώσσα Συνθέτου Μουσικού Ρυθμού	**Λεξιλογικός Πλούτος (Μορφές Μέτρου)**
5/8	**446**
6/8	**1.718**
7/8	**6.618**
8/8	**25.496**
9/8	**98.224**
10/8	**378.416**
11/8	**1.457.882**
12/8	**5.616.627**

Πάντα ταύτα εδίδασκον μέχρι πρό τινος εις το Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Εθνικού και Καποστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών εις τα πλαίσια του μαθήματος Ελευθέρας επιλογής «*Μαθηματικά του Μουσικού Ρυθμού*» και τα έχω συμπεριλάβει εις τα δύο συγγράμματά μου «*Η Πληροφορική στην Εθνομουσικολογία*» και «*Ανατομία του Ρυθμού*».



Σας ευχαριστώ.

Ο ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΑΒΑΞ ΤΟΥ ΛΑΥΡΙΟΥ
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ,
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
email: hspyridis@music.uoa.gr
tel/fax: 210-72.77.832

Οἱ Πυθαγορικοὶ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων,
τὴν μουσικήν φασιν ἐναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν
πολλῶν ἕνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν·
Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10-12.

<u>Αριθμοί και Αλληγορία</u>

Ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγον αυτόν τα ιερά κείμενά τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με σημεία, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά που, διαφορετικά, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρεύλωση.

Υπάρχουν κρίσιμες περικοπές ιερών κειμένων και κειμένων της παγκοσμίου λογοτεχνίας -Βέδδες, Αιγυπτιακό βιβλίο των Νεκρών, Βίβλος, Πλάτων- που πραγματεύονται αριθμούς. Επί πλέον η επανάληψη ταυτοσήμων και ομοίων αριθμών στη Βαβυλώνα, την Αίγυπτο, την Ελλάδα και την Παλαιστίνη επιβεβαιώνουν τις κάποτε αναπτυχθείσες θεωρήσεις, οι οποίες είχαν ιστορική συνέχεια και προσανατολισμό μιας βασικής πνευματικής παραδόσεως.

Οι περικοπές αυτές αντιμετωπίζονται με μια νέα οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση. Η οπτική αυτή προέκυψε λαμβάνοντας κατά λέξη τον Πλάτωνα, ο οποίος μας κληροδότησε ένα απόθεμα αριθμολογίας και συσχέτισε μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες. Πιστεύεται ότι ο Πλάτων είναι η πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για την περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών.

Επί παραδείγματι, ο Πλάτων δηλώνει ότι ο τύραννος είναι 729 φορές χειρότερος από τον χειρότερο βασιλέα (Stephanus 587, d, 12 - e, 4). Τί άραγε εννοεί;

Οι φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνση «*απλουστεύοντας το κείμενο*» και οι μαθηματικοί το αντιμετωπίζουν «*ποιητική αδεία*». Ο πεπαιδευμένος μουσικός, όμως, γνωρίζει ότι κάθε φθόγγος χαρακτηρίζεται από μια ποσότητα (αριθμητική σχέση) και από μία ποιότητα. Μόνη της, είτε η ποσότητα, είτε η ποιότητα χαρακτηρίζει τον φθόγγο μονοπλεύρως, δεδομένου ότι αμφότερες αποτελούν τις δύο όψεις του αυτού νομίσματος και αμοιβαίως η μία φωτίζει την άλλη.

Αναφορικά με τον αριθμό 729, που επέλεξε ο Πλάτων. Αυτός ο αριθμός από τη σκοπιά της μουσικής ως προς μια μοναδιαία συχνότητα ή ως προς ένα μοναδιαίο μήκος ταλαντουμένης χορδής αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα:

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(2^3\right)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

το οποίο είναι ένα τρίτονο συν εννέα οκτάβες.

Το τρίτονο είναι το πλέον διάφωνο μουσικό διάστημα του μουσικού συστήματος που ήτο γνωστό στον Πλάτωνα. Εξακολουθεί και σήμερα να φέρει τον ίδιο διάφωνο χαρακτήρα (diabolus in musica) στο δυτικό τονικό σύστημα 2.500 χρόνια μετά απ' αυτόν. Αυτό που ο Πλάτων εξετίμησε με τον αριθμό 729 ήτο η σχέση μεταξύ δύο πολιτειακών συστημάτων και τη θεωρεί ως τη μεγίστη δυνατή ένταση μέσα σε ένα πολιτισμένο σύστημα.

Στην αρχαιότητα ο μουσικός συμβολισμός εγίνετο άμεσα κατανοητός από τους μεμυημένους και γι' αυτό ο Πλάτων τον χρησιμοποιεί συχνά. Όταν κατά τον ρούν της Ιστορίας ο ρόλος της μουσικής από πνευματική ή ψυχική δύναμη εθυσιάσθη στον βωμό της ατομικής εκφράσεως και απολαύσεως, η ερμηνεία των άλλοτε ξεκάθαρων κειμένων κατέστη δύσκολη και καμιά φορά ακατόρθωτη.

Στα κείμενα των Βεδδών, που εγράφησαν το 4000 π.Χ. περίπου, υπάρχει θεμελιωμένη μια πρωτοεπιστήμη αριθμών και φθόγγων. Ο άνθρωπος του καιρού εκείνου φρόντισε με τους αριθμούς να προσδιορίσει εναλλακτικά χορδίσματα ή εναλλακτικές δομές της διαπασών. Οι ύμνοι περιγράφουν ποιητικά τους αριθμούς, καθορίζοντας σύνολα κλάσεων θεών και δαιμόνων, και παριστούν τονικές και αριθμητικές σχέσεις με σεξουαλικές παραστάσεις.

Και οι Ινδοί και οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι και οι Έλληνες (Πυθαγόρειοι) στη μουσική αντιμετωπίζουν μια ιεραρχία αριθμών. Συγκεκριμένα όλοι οι άρτιοι αριθμοί, θεωρούνται θηλυκοί αριθμοί, ενώ οι περιττοί αριθμοί θεωρούνται αρσενικοί αριθμοί. Ο Πλάτων λ.χ. στη *Γένεση Ψυχής Κόσμου* (35a1-5) στο έργο του *Τίμαιος* αναφέρει την συνένωση του *ταυτού*, δηλαδή της μονάδος που εκπροσωπεί το άρρεν στοιχείο, ως περιττός αριθμός, μετά του *θατέρου*, δηλαδή της δυάδος που εκπροσωπεί το θηλυκό στοιχείο, ως άρτιος αριθμός, προκειμένου να προκύψει η *ουσία*, δηλαδή η οντότης τρία, η οποία είναι η αρχή των πυθαγορείων αριθμών.

Ο δυϊσμός της εννοίας «μουσικό διάστημα»

Στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία η σχέση, δηλαδή ο λόγος, μεταξύ δύο αριθμών εκαλείτο «*διάστημα*». Γι' αυτό ο Νικόμαχος ο Γερασηνός αποκαλεί την Πυθαγόρειο μουσική «*θεωρία των λόγων*».

Έχει καταστεί πλέον συνείδηση ότι αυτή η «*θεωρία των λόγων*» εμπεριέχει έναν λογαριθμικό χαρακτήρα, διότι κατ' αυτήν η πρόσθεση των μουσικών διαστημάτων γίνεται με πολλαπλασιασμό και η αφαίρεσή τους γίνεται με διαίρεση. Αυτά δεν τα κατανοεί ο κοινός νους. Παρ' όλα ταύτα η «*θεωρία των λόγων*» χαρακτηρίζεται από μια «πλαστικότητα» κατά τη μαθηματική της επεξεργασία και γι' αυτό προτιμάται από τους Μαθηματικούς.

Ο Αριστόξενος ο Ταραντίνος (4^{ος} αιών π.Χ.), εναντιούμενος στον λογαριθμικό χαρακτήρα των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων, εισάγει την γραμμικότητα στα μουσικά διαστήματα ορίζοντας ως μουσικό διάστημα την απόσταση μεταξύ δύο φθόγγων διαφορετικού μουσικού ύψους «διάστημα δ' ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης» (Νικόμαχος). Κατ' αυτόν τον τρόπο η πρόσθεση των αριστοξενείων μουσικών διαστημάτων γίνεται με πρόσθεση και η αφαίρεσή τους γίνεται με αφαίρεση, γεγονός που χωρεί στον κοινό νουν.

Ο Αριστόξενος κατήργησε τις όποιες Πυθαγόρειες ανισότητες μεταξύ των συνωνύμων μουσικών διαστημάτων, εισηγούμενος -για πρώτη φορά στην ιστορία της Μουσικής- τον ίσο συγκερασμό. Για τον Αριστόξενο η διαπασών διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος διαιρείται σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα ή διέσεις.

Η γραμμικότητα σε όλο της το μεγαλείο! Μια γραμμικότητα που φωλιάζει μόνο στη φαντασία του Αριστοξένου, διότι δεν συναντάται στη μουσική πρακτική.

Μέγεθος μουσικού διαστήματος

Η παράσταση του μουσικού διαστήματος ως λόγου, είτε δύο συχνοτήτων, είτε δύο μηκών ταλαντουμένων τμημάτων χορδής -*που επιβάλλει αντί προσθέσεως να κάνουμε πολλαπλασιασμό και αντί αφαιρέσεως να κάνουμε διαίρεση*- οδήγησε τους μελετητές στον ορισμό ενός λογαριθμικού μεγέθους, του λεγομένου ***μεγέθους του μουσικού διαστήματος*** ως εξής:

$$d_k(\delta) = d_k(f_2 / f_1) = k \cdot \log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = k \cdot \frac{\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}{0{,}301029}$$

όπου η σταθερά k εκφράζει τα ίσα μουσικά διαστήματα, στα οποία θεωρούμε ότι είναι χωρισμένη η διαπασών.

Στον χώρο της Βυζαντινής Μουσικής το k=72, αφού η διαπασών διαιρείται σε 72 ηχομόρια ή γραμμές και, συνεπώς, ο μείζων τόνος $\left(\frac{9}{8}\right)$ θα έχει μέγεθος

$$d_{72}(9/8) = 72 \cdot \log_2\left(\frac{9}{8}\right) = 72 \cdot \frac{\log\left(\frac{9}{8}\right)}{0{,}301029} = 72 \cdot \frac{0{,}051152}{0{,}301029} = 12{,}2346001... \cong 12$$ ηχομόρια ή γραμμές.

Με την εισαγωγή της συναρτήσεως του λογαρίθμου προσεδόθη χαρακτήρας γραμμικός στη λογαριθμικότητα του Πυθαγορείου μουσικού διαστήματος με αποτέλεσμα τα μεγέθη των μουσικών διαστημάτων να προστίθενται με πρόσθεση και ν’ αφαιρούνται με αφαίρεση.

Πυθαγόρειες Θεωρίες

Οι πυθαγόρειοι ανεκάλυψαν τις βασικές αρχές της παγκοσμίου αρμονίας, των οποίων έκφραση και απείκασμα είναι οι μουσικοί λόγοι. Ο Ιάμβλιχος αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που πραγματοποίησε πειράματα Ακουστικής με τα οποία ανεκάλυψε τους αριθμητικούς λόγους για το ημιόλιο, το επίτριτο, το επόγδοο και το διαπασών διάστημα και στη συνέχεια προχώρησε στην κατασκευή της ομωνύμου μουσικής κλίμακος.

Η αλληλοδιαδοχή ποικίλων μουσικών λόγων εντός της διαπασών γεννά αλληλουχία ποικίλων μουσικών διαστημάτων και φθόγγων. Για τον λόγο αυτόν οι παλαιοί μαθηματικοί και μουσικοί αποκαλούσαν τη διαπασών «*αρμονίαν*», δηλαδή συναρμολόγηση, σύνδεση, εκ του ρήματος *αραρίσκω*, που σημαίνει συνάπτω, ενώνω, συναρμόζω, βάλλω μαζί, προσαρμόζω τι προς τι, συναρμολογώ τι με τι.

Κατά τον Φιλόλαο (*Θραύσμα 10, γρ. 2-3*)

ἔστι γὰρ ἁρμονία πολυμιγέων ἕνωσις

Πολυμιγής σημαίνει σύμμικτος, μεμιγμένος από πολλά και διάφορα είδη, πολυσύνθετος, πολυποίκιλος. Μας λέει, λοιπόν, ο Φιλόλαος ότι η διαπασών είναι μια ένωση πολυποικίλων μουσικών φθόγγων, τον ρόλο της οποίας προσδιορίζει με το επόμενο μισό της ρήσεώς του:

καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις.

Η αρμονία, άρα, αφορά στο πλήθος των εναντιοτήτων και αντιθέσεων, δηλαδή αυτών που φρονούν ενάντια, αντίθετα.

Ο Αριστοτέλης στα *Μετά τα Φυσικά* (Bekker, 956a, 23-26) αναφέρει τις κάτωθι αντιθέσεις, οι οποίες δομούν ολόκληρον τον κόσμο:

πέρας [καὶ] ἄπειρον,
περιττὸν [καὶ] ἄρτιον,
έν [καὶ] πλῆθος,
δεξιὸν [καὶ] ἀριστερόν,
ἄρρεν [καὶ] θῆλυ,
ἠρεμοῦν [καὶ] κινούμενον,
εὐθὺ [καὶ] καμπύλον,
φῶς [καὶ] σκότος,
ἀγαθὸν [καὶ] κακόν,
τετράγωνον [καὶ] ἑτερόμηκες·

Ο Πρόκλος (*Σχόλια στον Πλατωνικόν Τίμαιον 1, 176, 28*) τονίζει:
καὶ εἷς ἀποτελεῖται κόσμος ἐξ ἐναντίων ἡρμοσμένος

ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (*Αριθμητική Εισαγωγή, 1, 6, 3, 1-2*) αναφέρει:
πᾶν
δὲ ἡρμοσμένον ἐξ ἐναντίων πάντως ἥρμοσται

Ο Αριστοτέλης (*De mundo, Bekker, Σελ. 396b, Γρ. 7-12 και 15-17*) επισημαίνει
Ἴσως δὲ τῶν ἐναντίων ἡ φύσις γλίχεται
καὶ ἐκ τούτων ἀποτελεῖ τὸ σύμφωνον…
Ἔοικε δὲ καὶ ἡ
τέχνη τὴν φύσιν μιμουμένη τοῦτο ποιεῖν.

μουσικὴ δὲ ὀξεῖς ἅμα καὶ βαρεῖς, μα-
κρούς τε καὶ βραχεῖς, φθόγγους μίξασα ἐν διαφόροις φω-
ναῖς μίαν ἀπετέλεσεν ἁρμονίαν,

και ο Πλούταρχος (*De amicorum multitudine, Stephanus, Σελ. 96, Παρ. Ε Γρ. 7-8*), συμφωνών με όλους τους προηγουμένους, γράφει:
ἁρμονία
δι' ἀντιφώνων ἔχει τὸ σύμφωνον

Όλα τα ανωτέρω σημαίνουν ότι η αρμονία αφορά στο πλήθος των εναντίων, δηλαδή των εναντιοτήτων και των αντιθέσεων, οι οποίες δομούν ολόκληρον τον κόσμο. Μία των αντιθέσεων, η *φιλότης* και το *νείκος*, είναι αυτή που διέπει τα πάντα στον κόσμο, με την έννοια ότι, *επερχομένη η φιλότης στα δίχα φρονέοντα και αντιτιθέμενα, γεννάται ο δεσμός της αρμονίας ή της φιλότητος και κατά κάποιον τρόπο αυτά ομονοούν και ηρεμούν.*

Τα πολυμιγέα και δίχα φρονέοντα εκφράζονται δι' αριθμών, διότι, όπως τονίζει ο Πρόκλος (*Πλάτωνος «Αλκιβιάδη i", τμήμα 259 γραμμή 13-14*).
«και ο Πυθαγόρας των μεν όντων
πάντων σοφώτατον έλεγεν είναι τον αριθμόν»

Οι αριθμοί της δεκάδος, λόγω της αφηρημένης φύσεώς των, αποτελούν τα θεία πρότυπα της κοσμικής και μουσικής αρμονίας, απεικονίζοντας τις θείες ιδέες. Ανα-

τρέχοντες στο μουσικό σύστημά μας, από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρις των ημερών μας, εντοπίζουμε όλες τις προαναφερθείσες θεμελειώδεις αρχές της αρμονικής.

Όλο το πλήθος των «*πολυμιγέων*» ανομοιογενών και ανίσων μουσικών διαστημάτων παρίσταται με αριθμητικούς όρους που ο ένας είναι άρρην (περιττός) και ο άλλος θήλυς (άρτιος) (επιμόριες σχέσεις) και αντιστρόφως:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{28}{27}, \frac{32}{27}, \frac{256}{243}, \frac{2187}{2048}, \ldots$$

Έκαστον των «*πολυμιγέων*» ανομοιογενών και ανίσων μουσικών διαστημάτων δεν μπορεί να είναι αυτοτελές και ανεξάρτητο, χωρίς δηλαδή να έχει σχέση και αρμοσία με άλλο ή άλλα διαστήματα από τα οποία παρήχθη και με τα οποία δομεί άλλα μουσικά διαστήματα.

Τούτο είναι απόρροια, βάσει υπάρχοντος αρχαίου τεκμηρίου, της πολυπλόκου πυθαγορείου εννοίας και διαδικασίας της καλουμένης *ανθυφαιρέσεως* ή *ανταναιρέσεως*. Το αρχαίο τεκμήριο είναι το έκτο απόσπασμα του Φιλολάου του Ταραντίνου, το οποίο αναφέρει:

ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ
δὲ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόωι…
ἁ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ
δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον. οὕτως ἁρ-
μονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσιες, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία
ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ δὲ δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις.

Vgl. BOETHIUS Inst. mus. III 8 p. 278, 11 Friedl. Philolaus igitur
haec atque his minora spatia talibus definitionibus includit: diesis, inquit,
est spatium quo maior est sesquitertia proportio duobus tonis.
comma vero est spatium, quo maior est sesquioctava proportio
duabas diesibus, id est duobus semitoniis minoribus. schisma
est dimidium commatis, diaschisma vero dimidium dieseos,
id est semitonii minoris.

Νεοελληνική απόδοση: *[Της διαπασών το μέγεθος ισούται με το διατεσσάρων και το διαπέντε. Το μέγεθος του διαπέντε είναι μεγαλύτερο του διατεσσάρων κατά έναν επόγδοο τόνο…*

Το διατεσσάρων είναι σχέση επίτριτος, το διαπέντε είναι σχέση ημιόλιος, το διαπασών είναι σχέση διπλασία. Έτσι, το διαπασών ισούται με πέντε επογδόους τόνους και δύο διέσεις (λείμματα, ελάσσονα ημιτόνια), το διαπέντε ισούται με τρεις επογδόους τόνους και δίεση (λείμμα, έλασσον ημιτόνιο), το διατεσσάρων δε ισούται με δύο επογδόους τόνους και δίεση (λείμμα, έλασσον ημιτόνιο).

Vgl. BOETHIUS Inst. mus. III 8 p. 278, 11 Friedl. Ο Φιλόλαος, λοιπόν, αυτά τα ελάσσονα διαστήματα με αυτούς τους ορισμούς τα συμπεριλαμβάνει: δίεση (λείμμα, έλασσον ημιτόνιο), λέει, είναι το διάστημα κατά το οποίο υπερέχει η επίτριτος αναλογία (το διατεσσάρων) του διτόνου. Κόμμα είναι το διάστημα κατά το οποίο υπερέχει ο επόγδοος τόνος των δύο διέσεων, δηλαδή των δύο ελασσόνων ημιτονίων (λειμμάτων). Σχίσμα είναι το ήμισυ του κόμματος. Διάσχισμα είναι το ήμισυ της διέσεως, δηλαδή του ελάσσονος ημιτονίου (λείμματος)].

Οι *δίχα φρονέοντες* και *αλόγως ηχούντες* φθόγγοι αποτελούν δυσαρμονίαν (*νείκος*). Όταν κατά κάποιον λόγο συμφρονήσουν και συνφωνήσουν (*φιλότης*), γεννάται ο δεσμός της φιλότητος και της αρμονίας. Τούτο επιτυγχάνεται αφενός μεν με την Πυθαγόρειο διαδικασία των μεσοτήτων (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική), αφετέρου δε με την Πλατωνική διαδικασία της Στερεομετρίας.

Πυθαγόρειος διαδικασία των μεσοτήτων (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική)

Το δις διατεσσάρων $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ *αφαιρούμενο από το διαπασών* $\left(\frac{12}{6}\right)$ *γεννά τον μείζονα τόνο (επόγδοον)* $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Πρόκειται για τη λεγομένη μουσική αναλογία.

Η αναλογία αυτή, τριχή διαστατή, είναι η μόνη που εμπεριέχει συγχρόνως και την αριθμητική και την αρμονική και τη γεωμετρική αναλογία (εμπλέγδην).

$6 \quad 8 \quad 9 \quad 12$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

$$a_4 - a_3 = a_3 - a_1 \Rightarrow 2a_3 = a_1 + a_4$$

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

$$\frac{a_4 - a_2}{a_2 - a_1} = \frac{a_4}{a_1} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_4 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \alpha_4 - \alpha_1 \cdot \alpha_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_4 = 2(\alpha_1 + \alpha_4)$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ (ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ)

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_3}{a_1}$$

Σχήμα 1: Το δις διατεσσάρων $(4^2 : 3^2)$αφαιρούμενο από το διαπασών $(12:6)$ προκύπτει ο μείζων τόνος (επόγδοος) $(9:8)$.

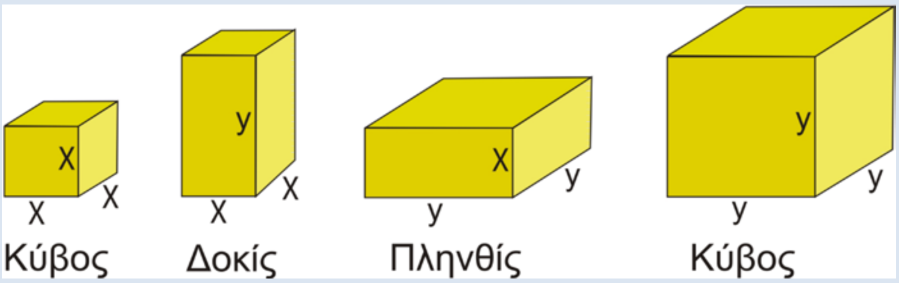
Όροι $12:6$, σε σχέση διπλάσια (διαπασών)

Πρόοδος $9:6,\ 12:8$ σε σχέση ημιόλιο

Υπόλοιπα $8:6,\ 12:9$ σε σχέση επίτριτο

Πλατωνική διαδικασία της Στερεομετρίας

Ιδιαιτέρα σημασία έχει η παρεμβολή των δύο μέσων μεταξύ των δύο δοθέντων κύβων με τη συνδρομή της Στερεομετρίας, όπως αναφέρει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός. Γι' αυτό ο Πλάτων θεωρεί την Στερεομετρία ως ιδιότητα εξαγνίζουσα τον άνθρωπο και την τοποθετεί μετά την Γεωμετρία και πριν από τη Μουσική.



Σχήμα 2: $\frac{\text{ΔΟΚΙΣ}}{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΙΚΡΟΣ}} = \frac{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΕΓΑΛΟΣ}}{\text{ΠΛΗΝΘΙΣ}}$

Η διαδικασία έχει ως εξής: Δοθέντων δύο κύβων, ενός μικρού και ενός μεγάλου παρατίθενται ανάμεσά τους ώστε να σχηματίζουν αναλογία μία δοκίς, η οποία έχει τη βάση του μικρού κύβου και του ύψος του μεγάλου κύβου και μια πληνθίς, η οποία έχει τη βάση του μεγάλου κύβου και το ύψος του μικρού.

Στην περίπτωση κατά την οποίαν ο μικρός κύβος έχει πλευρά ίση με τη μονάδα (1Χ1Χ1=1) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευρά ίση με 2 (2Χ2Χ2=8), δοκίς είναι ο α-ριθμός 2 (1Χ1Χ2=2) και πληνθίς είναι ο αριθμός 4 (2Χ2Χ1=4). Τα προηγούμενα με μουσικούς όρους διατυπούνται ως εξής:

Όταν το δις διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)^3$, γεννάται το διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)$.

Σχήμα 3: Όταν το δις διαπασών $(2^2:1^2)$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $(2^3:1^3)$, γεννάται το δια-πασών $(2:1)$.

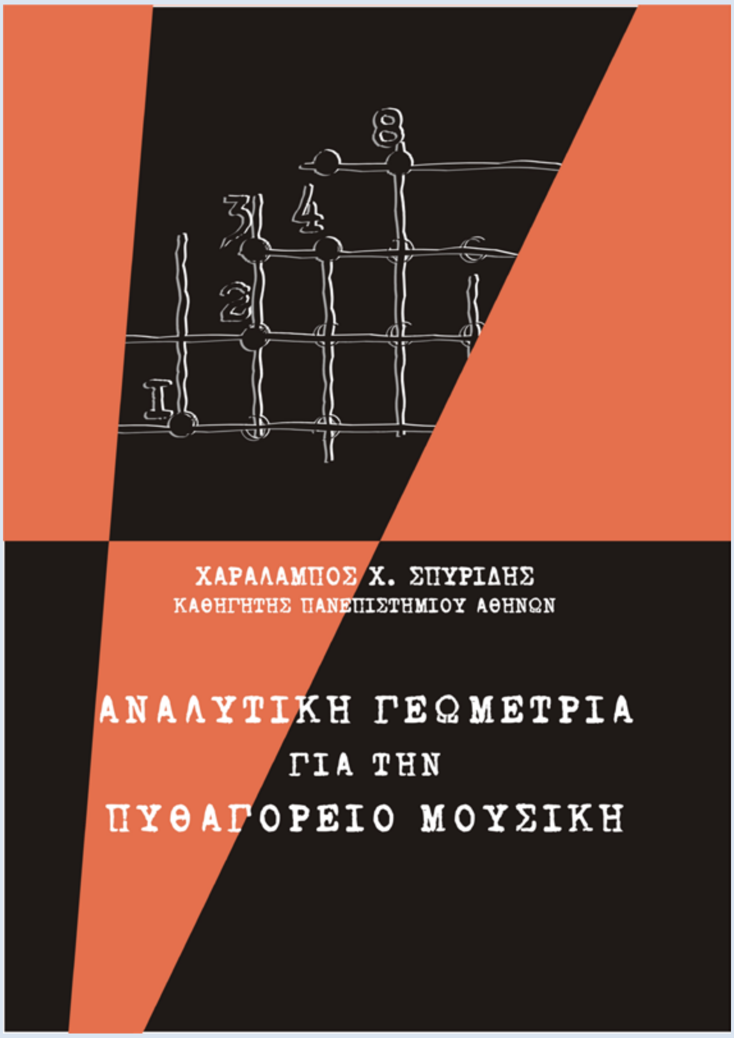
Όροι $8:1$, σε σχέση οκταπλασία
Πρόοδος $4:1,\ 8:2$, σε σχέση τετραπλασία
Υπόλοιπα $2:1,\ 8:4$, σε σχέση διπλασία
Διαφοραί
$1:4:8 \Rightarrow (4-1):(8-4) \Rightarrow 3:4$ σε σχέση επίτριτο

$1:2:8 \Rightarrow (2-1):(8-2) \Rightarrow 1:6$ σε σχέση εξαπλασία

Επί όλων των θεμάτων, τα οποία εθίγησαν εις την εισήγησή μου, ο αναγνώστης μπορεί να ενημερωθεί πλήρως και αναλυτικώς από τα βιβλία:

1. Σίμωνος Ι. Καρά,
«***Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής***»
το οποίο θα κυκλοφορήσει οσονούπω.

2. Χαραλάμπου Χ. Σπυρίδη,
«***Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική***»



ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
Email: hspyridis@music.uoa.gr
☎ 01 - 72.77.832 FAX: 01 - 72.48.979

«Μουσικό διάστημα: Μήκος ή λόγος μηκών;»

<u>Η έννοια «διάστημα» ως σχέσεως δύο αριθμών προς αλλήλους.</u>

Η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στη Πυθαγόρειο θεωρία της Μουσικής και σ' αυτήν ακόμη την *Κατατομή Κανόνος* του Ευκλείδου εκαλείτο «διάστημα». Κάπως αργότερα η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στην Αριθμητική και τη Γεωμετρία πήρε το όνομα «λόγος». Κατά την Πυθαγόρειο άποψη το κάθε μουσικό διάστημα ορίζεται από δύο αριθμούς. Δύο σχόλια του Πορφυρίου στην περί της αρμονίας διδασκαλία του Πτολεμαίου άναφέρουν

«καὶ τῶν κανονικῶν δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων λέγουσιν»

και

«τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων τὸ διάστημα καλοῦσι»

γεγονός που σημαίνει ότι στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία οι έννοιες «διάστημα» και «λόγος (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» είναι ταυτόσημες.

Αιωρείται η απορία για το πώς κατέληξαν οι Πυθαγόρειοι να εκφράζουν τα διαστήματα με αριθμητικές σχέσεις και μάλιστα με αριθμητικές σχέσεις μηκών. Υπάρχει ένας ισχυρισμός του Θέωνα του Σμυρναίου ότι άλλοι Πυθαγόρειοι θέλουν να υπολογίζουν τις αριθμητικές σχέσεις των συμφωνιών με βάρη, άλλοι με μεγέθη, άλλοι με την κίνηση και άλλοι με τα δοχεία. Σχετικά πειράματα παρουσιάζονται στην εικόνα 1. Δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μουσική θεωρία των αρχαίων Ελλήνων δημιουργήθηκε βάσει εμπειριών και πειραμάτων, που πραγματοποιήθηκαν επάνω σε έγχορδα όργανα, μονόχορδα ή πολύχορδα. Λογικόν είναι, λοιπόν, τα μουσικά διαστήματα να τα εκφράζουν με σχέσεις μηκών ηχούντων τμημάτων χορδής.

Εικόνα 1. Από το εξώφυλλο του βιβλίου του F. Gafurio «Theorica Musicae» (1492). Ξυλογραφία που παριστάνει πειράματα του Πυθαγόρα (το πείραμα στο Χαλκοτυπείο με τα σφυριά, πείραμα με καμπάνες, πείραμα με ηχητικούς σωλήνες, πείραμα με χορδές και αυλούς)

Η έννοια «διάστημα» ως αποστάσεως δύο σημείων ή «ευθυγράμμου τμήματος».

Ο Αριστόξενος τον 4^{ο} αιώνα π.Χ. σε αντίθεση προς τον Πυθαγόρα ονομάζει μουσικό διάστημα την **απόσταση** ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού μουσικού ύψους. Με άλλα λόγια το διάστημα παρουσιάζεται ως μια διαφορά μουσικού ύψους. Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά του μουσικού ύψους, τόσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα.

Κατά τον Κλεονίδη[1] μουσικό διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικούς στο ύψος και στο βάθος. Τον ίδιο ορισμό δίνει και ο Βακχείος. Ο Ανώνυμος του Bellermann[2] λέει ότι διάστημα είναι εκείνο που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους (ή περικλείεται από δύο φθόγγους) διαφορετικούς στο ύψος, από τους οποίους ο ένας είναι υψηλότερος και ο άλλος χαμηλότερος. Σ’ ένα απόσπασμα χειρογράφου[3] βρίσκουμε τον εξής ορισμό για το διάστημα: Διάστημα είναι η έκταση της φωνής, που περιέχεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους. Ο Νικόμαχος γράφει

«διάστημα δ′ ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης»,

όπου με τον όρο μεταξύτης εννοεί «ό,τι περιέχεται ή ό,τι βρίσκεται ανάμεσα».

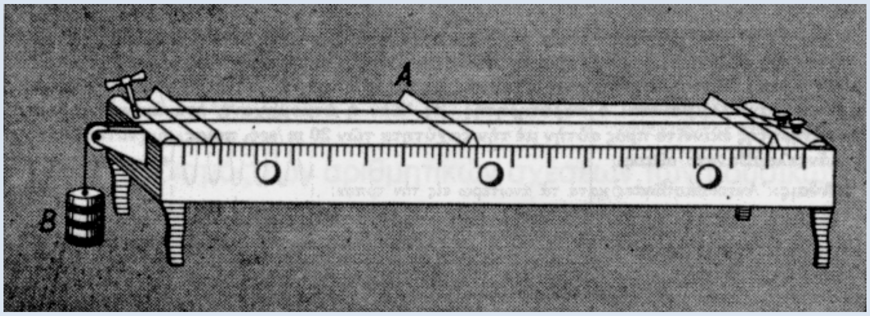
Ο W. Burkert[4] αναφέρει κάτι απλό μεν, αλλά πολύ σημαντικό, όπως θα φανεί στην πορεία «Για μας (τους μουσικούς της Ευρωπαϊκής μουσικής) και λόγω της μουσικής σημειογραφίας και λόγω του πληκτρολογίου του πιάνου καθίσταται ιδιαίτερα καταληπτή η έννοια του μουσικού διαστήματος ως αποστάσεως, ως ευθυγράμμου τμήματος. Αλλά το ίδιο συνέβαινε προηγουμένως και με τους αρχαίους Έλληνες, όπως προκύπτει από τον όρο ‘διάστημα’»

Άρα, λοιπόν, η λέξη «διάστημα» στη μουσική θεωρία είχε διττή δημασία, διότι εσήμαινε «απόσταση μεταξύ δύο σημείων ή μεταξύ δύο φθόγγων», αλλά και «λόγο δύο αριθμών (αριθμητική σχέση ή αναλογία)». Η έννοια του ευθυγράμμου τμήματος είναι συνδεδεμένη με το όνομα του Αριστόξενου, η δε διδασκαλία σχετικά με την αναλογία είναι συνδεδεμένη με το όνομα του Πυθαγόρα και εν γένει των Πυθαγορείων.

---

[1] (Εισαγ. 1, C.v.J. 179, Mb 1)
[2] (Bell. 30, 22)
[3] (Vincent Notices 234)
[4] Στο βιβλίο του *Weisheit und Wissenschaft*, σελ. 348.

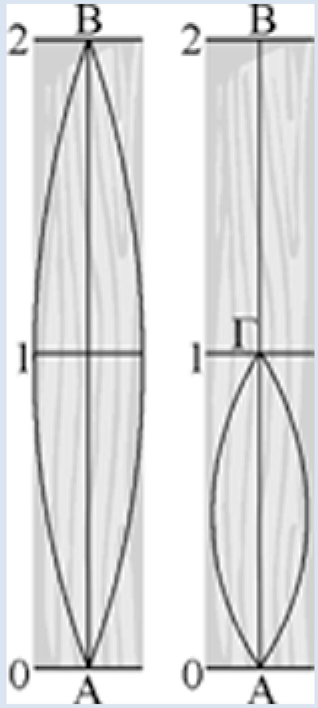
Πυθαγόρειο πείραμα Ακουστικής κατά Γαυδέντιο.



Εικόνα 2: Σύγχρονο εργαστηριακό μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Ο Γαυδέντιος (4ος αιώνας μ.Χ.) αναφέρει ένα πείραμα Ακουστικής, σωστό από άποψη Φυσικής[5], με το οποίο ο Πυθαγόρας εφεύρε τις αριθμητικές σχέσεις των μουσικών συμφωνιών. Κατεσκεύασε ένα μονόχορδο τεντώνοντας μια χορδή επί ενός κανόνος (χάρακα) διηρημένου και αριθμημένου σε 2 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (2 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια το μισό μήκος αυτής (1 μονάδα μήκους) με τη βοήθεια ενός κινητού καβαλάρη, του υπαγωγέα, (Εικόνα 3).

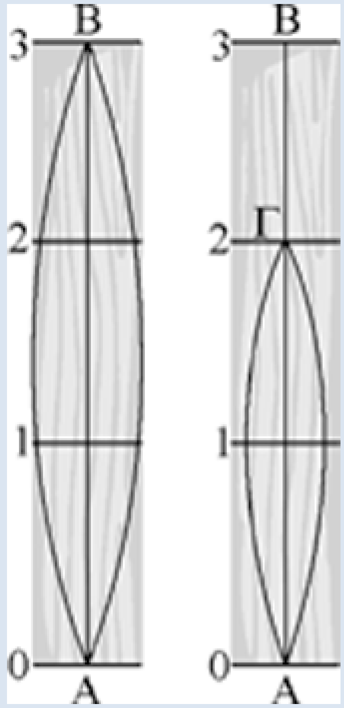
[5] Σε πηγές των τελευταίων χρόνων της αρχαιότητος αποδίδονται στον Πυθαγόρα ακουστικές παρατηρήσεις και ακουστικά πειράματα, τα οποία από την άποψη της Φυσικής είναι λανθασμένα π.χ. το πείραμα με τα σφυριά των σιδεράδων και τις χορδές, που αναφέρει ο Ιάμβλιχος (3ος αιώνας μ.Χ.) στο «βίος Πυθα γορικός».



Εικόνα 3: Απόδοση του διαστήματος της δια πασών επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η διαπασών συμφωνία $\left(\frac{2}{1}\right)$.

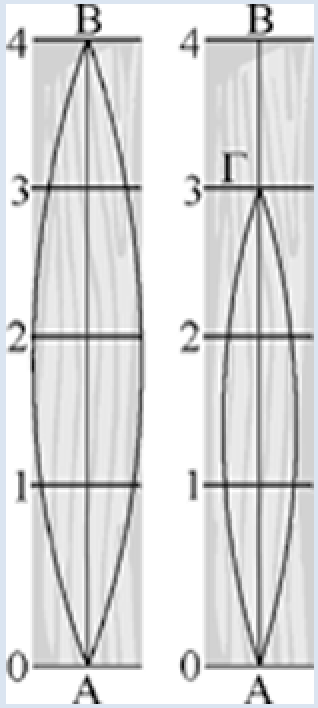
Κατόπιν διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος του κανόνος σε 3 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (3 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια τα $\frac{2}{3}$ του μήκους αυτής (2 μονάδες μήκους) (Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Απόδοση του διαστήματος δια πέντε επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η δια πέντε συμφωνία $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Τέλος, διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος του κανόνος σε 4 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (4 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια τα $\frac{3}{4}$ του μήκους αυτής (3 μονάδες μήκους) (Εικόνα 5).



Εικόνα 5: Απόδοση του διαστήματος δια τεσσάρων επί του κανόνος.

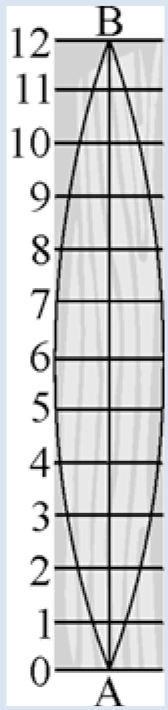
Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η δια τεσσάρων συμφωνία $\left(\frac{4}{3}\right)$.

Σ’ αυτό το τριπλό πείραμα ΠΑΝΤΟΤΕ ετίθετο σε ταλάντωση πρώτα ολόκληρο το μήκος της χορδής (ΒΑ) και στη συνέχεια ένα τμήμα αυτής (ΓΑ). Αυτό σημαίνει ότι ένα τμήμα (ΓΑ) της χορδής επάλλετο και παρήγε ήχο (***«ηχούν» τμήμα της χορδής***), ενώ το υπόλοιπο (ΒΓ) τμήμα της ηρεμούσε και, ως εκ τούτου, παρέμενε «*βωβό*» (***«μη ηχούν» τμήμα της χορδής***).

Το παραπάνω πείραμα αφενός μεν απαιτεί την ύπαρξη τριών διαφορετικού μήκους υποδιαιρέσεων του κανόνος $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, αφετέρου επιτρέπει μόνον την παραγωγή μεμονωμένων μουσικών συμφωνιών και όχι και των τριών πλην της τελευταίας περιπτώσεως στην οποίαν με τον κινητό καβαλάρη στις θέσεις 4 και 3 παράγεται η δια τεσσάρων συμφωνία, στις θέσεις 3 και 2 παράγεται η δια πέντε συμφωνία και στις θέσεις 4 και 2 παράγεται η δια πασών συμφωνία. Πρέπει να επισημανθεί ότι μόνον μ’ αυτή την αλληλουχία θέσεων του κινητού καβαλάρη και με καμιά άλλη παράγονται οι τρεις μουσικές συμφωνίες.

Αξιοσημείωτο είναι ότι το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής καθορίζεται στην περίπτωση της δια πασών με τους αριθμούς 4 και 2 του κανόνος, στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας με τους αριθμούς 4 και 3 και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας με τους αριθμούς 3 και 2. Βλέπουμε ότι Γεωμετρικά στη συγκεκριμένη περίπτωση το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής στην περίπτωση της δια πασών συμφωνίας ισούται με το

άθροισμα των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας, επαληθεύοντας τη ρήση του Φιλολάου ότι "ἁρμονίας (=διὰ πασῶν) δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι᾽ ὀξειᾶν".
Είναι πολύ πιθανόν με τέτοια πειράματα Ακουστικής επάνω σε αρχέγονο κανόνα υποδιηρημένο σε τέσσερα μόνο μέρη να δημιουργήθηκε η μυθική σημασία της ιεράς τετρακτύος των Πυθαγορείων.
Οι πηγές μας αναφέρουν τη διαίρεση του κανόνος σε 12 ίσα μέρη, όπου 12 είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών 2, 3 και 4 (Εικόνα 6).



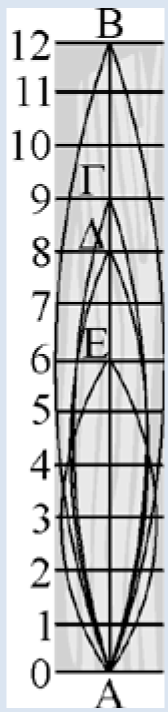
Εικόνα 6: Ο εις 12 ίσα μέρη διηρημένος και αριθμημένος κανών για την απόδοση των συμφωνιών δια πασών, δια πέντε και δια τεσσάρων.

Με τον κανόνα στα 12 είναι δυνατόν να παραχθούν και οι τρεις συμφωνίες δια πασών, δια τεσσάρων και δια πέντε θέτοντας τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στις θέσεις (12, 6), (12, 9) και (12, 8), αντίστοιχα. Από εδώ βλέπουμε ότι το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 9, στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 8, ενώ στην περίπτωση της διαπασών συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 6[6]. Τούτο σημαίνει ότι η διαφορά των εν λόγω δύο μηκών των μη ηχούντων

[6] Στην περίπτωση αυτή αναφέρεται η παρενθετική πρόταση από την Επινομίδα 991 Α του Πλάτωνος: "ἐν μέσῳ δὲ τοῦ ἕξ πρὸς τὰ δώδεκα συνέβη τό τε ἡμιόλιον καὶ τὸ ἐπίτριτον", που σημαίνει ότι ανάμεσα στη διπλάσια σχέση (τοῦ ἕξ πρὸς τὰ δώδεκα) που εκφράζει τη διαπασών, εμπεριέχονται οι σχέσεις ἡμιόλιον και ἐπίτριτον, που εκφράζουν το δια πέντε και το δια τεσσάρων διάστημα, αντίστοιχα.

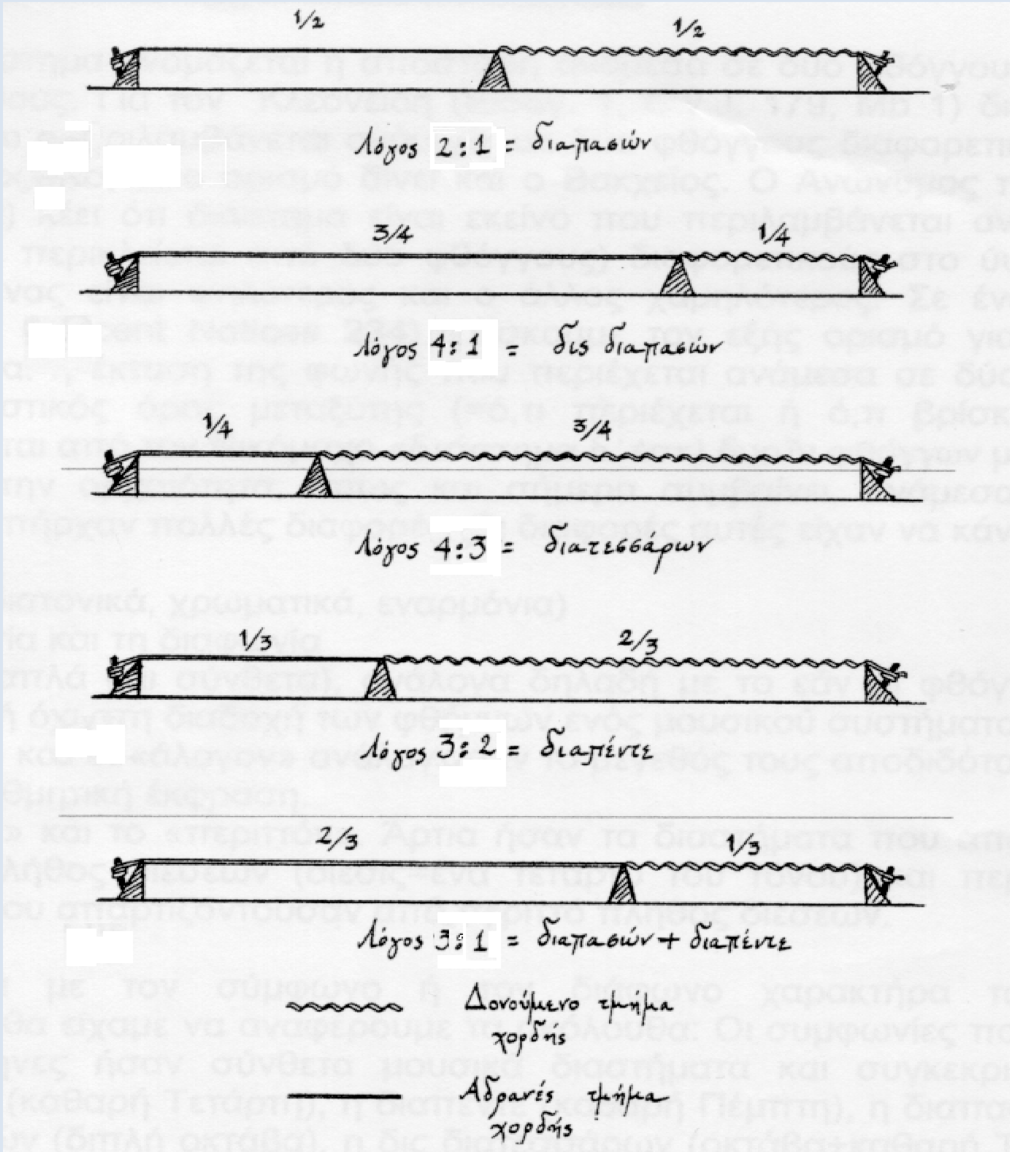
τμημάτων της χορδής περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 9 και 8 (Εικόνα 7). Αυτό άλλωστε αναφέρει και το η θεώρημα της Κατατομής Κανόνος του Ευκλείδου: "Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον".

Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι «διάστημα» ήταν αυτό καθαυτό το μουσικό διάστημα το σχηματιζόμενο από δύο φθόγγους προερχομένους από την ταλάντωση δύο διαφορετικού μήκους τμημάτων χορδής και το οποίο αφενός μεν μπορούσε να γίνει αντιληπτό και να καθορισθεί ακουστικά, αφετέρου δε να καταστεί και ορατό επάνω στον Κανόνα ως η διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής των εν λόγω δύο φθόγγων.



Εικόνα 7: Απόδοση των συμφωνιών δια πασών, δια τεσσάρων και δια πέντε επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι αυτή και μόνον η Πλατωνική πρόταση απορρίπτει την άποψη ότι τον 5ο και 4ο αιώνα π.Χ. δεν υπήρχε το όργανο Κανών.



Σχήμα 1: Προσδιορισμός των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών συμφωνιών στο μονόχορδο.

<u>Υποπολλαπλάσιες σχέσεις αριθμών ⇔ (μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής):(μήκος του ηχούντος τμήματος της χορδής),</u>
<u>Πολλαπλάσιες κι Επιμόριες σχέσεις αριθμών ⇔(μήκος ολοκλήρου της χορδής):(μήκος του ηχούντος τμήματος της χορδής).</u>

Ολόκληρο το μήκος της χορδής ισούται με το μήκος του παλλομένου (ηχούντος) τμήματος συν το μήκος του μη ηχούντος (ακινήτου) τμήματος αυτής. Ή ***(μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=(ολικό μήκος χορδής)-(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής).***

Στις μουσικές συμφωνίες ισχύει η σχέση: ***(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής)-*** $k\cdot$***(μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=0,*** $k \in N$ ως αποτέλεσμα της Ευκλειδίου Ανθυφαιρέσεως, δηλαδή των πολλαπλών αφαιρέσεων πάντοτε του μικρού από το μεγάλο μέχρι να προκύψει υπόλοιπο ίσο με το μηδέν.

Στη διαπασών συμφωνία το ηχούν και το μη ηχούν τμήμα της χορδής είναι ισομήκη, οπότε ***(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής)-*** $1\cdot$***(μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=0.*** Άρα το ολικό μήκος της χορδής είναι διπλάσιο του ηχούντος τμήματος της χορδής, εξού ο όρος «*διπλάσιον διάστημα*».

Στη δια πέντε συμφωνία το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι το μισό του μήκους του ηχούντος τμήματος, οπότε ***(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής)-*** $2\cdot$***(μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=0.*** Άρα το μήκος ολοκλήρου της χορδής είναι ολόκληρο και το ½ του μήκους του ηχούντος τμήματος της χορδής, εξού ο όρος «*ημιόλιος*».

Στη δια τεσσάρων συμφωνία το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι το 1/3 του μήκους του ηχούντος τμήματος αυτής, οπότε ***(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής)-*** $3\cdot$***(μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=0.*** Άρα το μήκος ολοκλήρου της χορδής είναι ολόκληρο και το 1/3 του μήκους του ηχούντος τμήματος της χορδής, εξού ο όρος «*επίτριτος*».

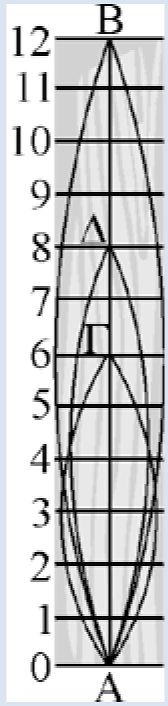
Πράξεις μεταξύ των διαστημάτων

Εάν διασαφηνισθεί το πώς η έννοια «διάστημα» ήταν δυνατό να σημαίνει συγχρόνως «απόσταση μεταξύ δύο σημείων ή μεταξύ δύο φθόγγων», αλλά και «λόγο δύο αριθμών (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» θα έχουν ισχύ όλα όσα διδάσκονται στην Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων και ιδιαιτέρως ο ορισμός του μουσικού διαστήματος ως λόγου συχνοτήτων.

1. Πρόσθεση δύο διαστημάτων.

Έστω ότι μας δίδονται δύο σημεία, τα Α και Β. Τα σημεία αυτά μπορεί να θεωρηθούν ότι είναι τα πέρατα ενός ευθυγράμμου τμήματος, του ΑΒ και ότι με την απόστασή τους ορίζουν το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Όταν δίδονται οι θέσεις του υπαγωγέα επάνω στον κανόνα με αριθμούς, τότε το μη ηχούν τμήμα της χορδής θα το συμβολίζουμε ως διατεταγμένο ζεύγος αριθμών –πρώτα ο μεγαλύτερος αριθμός και μετά ο μικρότερος- η διαφορά των οποίων αριθμών θα δίδει το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής, που αντιπροσωπεύει κατά Αριστόξενο το συγκεκριμένο διάστημα. Ο λόγος των δύο δοθέντων αριθμών –μεγαλύτερος/μικρότερος- θα δίδει τη σχέση των μηκών των ηχούντων τμημάτων της χορδής, η οποία αντιπροσωπεύει κατά τον Πυθαγόρα το συγκεκριμένο διάστημα.



Εικόνα 8: Πρόσθεση διαστημάτων επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Έστω ότι στον κανόνα της εικόνας 8, που είναι διηρημένος και αριθμημένος σε 12 ίσα τμήματα, θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ, που είναι 12 μονάδες μήκους. Στη συνέχεια τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΑΔ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια πέντε διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΔ (κατά Αριστόξενο), ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\mathrm{B}\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{A}} = \frac{12}{8}$ (κατά Πυθαγόρα).

Ακολούθως, εκτελώ ως προς αυτό ένα συνημμένο διάστημα δια τεσσάρων. Προς τούτοις με τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΔΑ της χορδής και μετά, αφού μετατοπίσω τον καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 6 του κανόνα), θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΓΑ της χορδής, που έχει μήκος 6 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΔΓ και έχει μήκος 2 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια τεσσάρων διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΔΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\Delta\mathrm{A}}{\Gamma\mathrm{A}} = \frac{8}{6}$.

Τέλος, εκτελώ το διάστημα δια πασών θέτοντας σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ του κανόνα, μήκους 12 μονάδων και το τμήμα ΓΑ της χορδής, μήκους 6 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΒΓ και έχει μήκος 6 μονάδων μήκους. Αυτό το μουσικό διάστημα (δια πασών) ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\mathrm{BA}}{\Gamma\mathrm{A}} = \frac{12}{6}$.

Παρατηρώ ότι το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο διάστημα της δια πασών, δηλαδή ΒΓ=ΒΔ+ΔΓ. Πράγματι η δια πασών είναι το άθροισμα του δια πέντε και του δια τεσσάρων ή, όπως λέει ο Φιλόλαος "ἁρμονίας (=διὰ πασῶν) δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι᾽ ὀξειᾶν".

Εάν στη θέση των μηκών αυτών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα κατά τον Αριστόξενο, τοποθετήσω τους αντιστοίχους λόγους των μηκών των ηχούντων τμημάτων χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα κατά τον Πυθαγόρα, οδηγούμαι στη διαδικασία της προσθέσεως των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών, δηλαδή $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Delta} \oplus \frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A}\Gamma}$. Η σχέση αυτή για να υφίσταται ως αληθής, θα πρέπει η διαδικασία, η συμβολιζομένη με το σύμβολο $\oplus$, να συμπίπτει με τη διαδικασία του γνωστού πολλαπλασιασμού.

(12, 8)+(8, 6)=(12, 6) κατά τον Αριστόξενο.

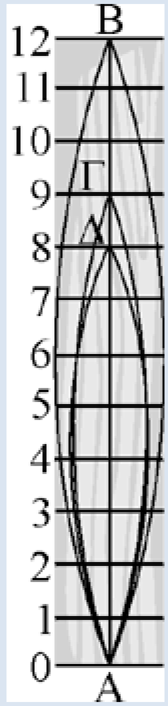
$\frac{12}{6} = \frac{12}{8} \oplus \frac{8}{6} = \frac{12}{8} \cdot \frac{8}{6}$ κατά τον Πυθαγόρα.

Συμπερασματικά λέμε ότι:

α. για να προσθέσουμε συνημμένα διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με διαδοχικά μήκη μη ηχούντων τμημάτων της χορδής (Αριστόξενος), προσθέτουμε αυτά τα διαδοχικά μη ηχούντα τμήματα της χορδής, οπότε το άθροισμά τους δίδει το μηκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής για το ολικό διάστημα.

β. για να προσθέσουμε συνημμένα διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με λόγους ηχούντων τμημάτων της χορδής (Πυθαγόρας), πολλαπλασιάζουμε αυτούς τους λόγους των ηχούντων τμημάτων της χορδής και βρίσκουμε το λόγο των ηχούντων τμημάτων της χορδής για το ολικό διάστημα.

2. <u>Αφαίρεση δύο διαστημάτων</u>



Εικόνα 9: Αφαίρεση διαστημάτων επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Έστω ότι στον κανόνα της εικόνας 9 που είναι διηρημένος και αριθμημένος σε 12 ίσα τμήματα θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ, που είναι 12 μονάδες μήκους. Στη συνέχεια τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΔΑ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια πέντε διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΔ (Αριστόξενος), ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{12}{8}$ (Πυθαγόρας).

Στη συνέχεια θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ, που είναι 12 μονάδες μήκους. Μετά τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 9 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΓΑ, μήκους 9 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, μήκους 3 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια τεσσάρων διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ (Αριστόξενος), ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{12}{9}$ (Πυθαγόρας).

Ακολούθως, θα εκτελέσω το επόγδοο διάστημα. Προς τούτοις με τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΔΑ της χορδής και μετά, αφού μετατοπίσω τον καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 9 του κανόνα), θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΓΑ της χορδής, που έχει μήκος 9 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ και έχει μήκος 1 μονάδα μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το επόγδοον διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΓΔ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{A}} = \frac{9}{8}$.

Παρατηρώ ότι η διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο επόγδοον διάστημα, δηλαδή ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ. Πράγματι, όπως άλλωστε αναφέρει και το η θεώρημα της Κατατομής Κανόνος του Ευκλείδου: "Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον".

Εάν στη θέση των μηκών αυτών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα κατά τον Αριστόξενο, τοποθετήσω τους αντιστοίχους λόγους των μηκών των ηχούντων τμημάτων χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα κατά τον Πυθαγόρα, οδηγούμαι στη διαδικασία της αφαιρέσεως των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών, δηλαδή $\frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{BA}}{\Delta\mathrm{A}} \square \frac{\mathrm{BA}}{\Gamma\mathrm{A}}$. Η σχέση αυτή για να υφίσταται ως αληθής, θα πρέπει η διαδικασία, η συμβολιζομένη με το σύμβολο $\square$, να συμπίπτει με τη διαδικασία της γνωστής διαιρέσεως.

(12, 8)-(12, 9)=(9, 8) κατά τον Αριστόξενο.

$\frac{9}{8} = \frac{12}{8} \square \frac{12}{9} = \frac{12}{8} : \frac{12}{9} = \frac{12}{8} \cdot \frac{9}{12}$ κατά τον Πυθαγόρα.

Συμπερασματικά λέμε ότι:

Α. για ν' αφαιρέσουμε δύο διαστήματα που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με δύο μήκη μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που έχουν κοινή αρχή, αφαιρούμε αυτά τα δύο μη ηχούντα τμήματα της χορδής και βρίσκουμε το μη ηχούν τμήμα της χορδής του διαστήματος της διαφοράς.

Β. για ν' αφαιρέσουμε δύο διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με λόγους ηχούντων τμημάτων της χορδής, διαιρούμε το λόγο του μειωτέου δια του λόγου του αφαιρετέου και βρίσκουμε το λόγο των ηχούντων τμημάτων της χορδής για το διάστημα της διαφοράς.

Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα οι Φυσικοί Ernst Weber και Gustaf Fechner κατέληξαν σε έναν ψυχοφυσικό νόμο, που λέει ότι το αίσθημα είναι ανάλογο του δεκαδικού λογαρίθμου του ερεθίσματος, που το προκαλεί. Δηλαδή

Αίσθημα = k log(Ερέθισμα)

Το k είναι μια σταθερά αναλογίας που, κατά περίπτωση, λαμβάνει κάποια τιμή. Από δύο δοθέντα ομοειδή ερεθίσματα ε_1 και ε_2 τα προκαλούμενα αισθήματα α_1 και α_2, αντίστοιχα, είναι:

$$\alpha_1 = k\log(\varepsilon_1)$$
$$\alpha_2 = k\log(\varepsilon_2)$$

Η διαφορά α_1-α_2 των δύο προκαλουμένων αισθημάτων εκφράζεται από τη σχέση:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = k\log(\varepsilon_1) - k\log(\varepsilon_2) = k\log\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$$

Βλέπει κανείς ότι στη σχέση αυτή εισάγεται ο λογάριθμος του λόγου των δύο μεγεθών ε_1 και ε_2.

Είναι σε όλους μας γνωστό το ψυχοφυσικό μέγεθος του μουσικού ύψους (pitch) με βάση το οποίο οι ήχοι μπορούν να διαταχθούν επάνω σε μια μουσική κλίμακα και οι διακυμάνσεις του συνιστούν τη μελωδία. Το μουσικό ύψος ενός ήχου σχετίζεται με το ρυθμό της επαναλήψεώς του και στην απλή περίπτωση του ημιτονοειδούς κύματος σχετίζεται με τη συχνότητα. Για κάθε συχνότητα (ερέθισμα) αντιλαμβανόμαστε ένα μουσικό ύψος (αίσθημα). Δύο συχνότητας, οι f_1 και f_2, με τα αντίστοιχά τους μουσικά ύψη, υ_1 και υ_2 συνδέονται, σύμφωνα με τα προηγούμενα, με τη σχέση:

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = k\log_2(f_1) - k\log_2(f_2) = k\log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$$

όπου $\upsilon_1 > \upsilon_2$, επειδή $f_1 > f_2$. Οι συχνότητες, όμως στην περίπτωση πακτωμένων κατά τα δύο άκρα χορδών, είναι αντιστρόφως ανάλογες του μήκους των ηχούντων τμημάτων των χορδών. Οπότε η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = k\log_2(f_1) - k\log_2(f_2) = k\log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = k\log_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)$$

Και επειδή κατά Πυθαγόρα ο λόγος των ηχούντων τμημάτων των χορδών ονομάζεται διάστημα, δια τούτο σήμερα στη Μουσική Ακουστική τον λόγο των δύο συχνοτήτων, που παράγονται από τα ηχούντα τμήματα δύο χορδών ονομάζεται διάστημα και κατ’ επέκτασιν μουσικό διάστημα ονομάζουμε το λόγο δύο συχνοτήτων. Τη δε διαφορά των αντιστοίχων μουσικών υψών $(\upsilon_1 - \upsilon_2)$ την ονομάζομε μέγεθος του μουσικού διαστήματος.

Μουσικολογική αλληγορία
της Πλατωνικής Πολιτειολογίας

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Τμήματος Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών

Προλεγόμενα

Θα ήθελα να εκκινήσω με ένα προσωπικό σχόλιο. Το ενδιαφέρον μου για τον πλατωνισμό ήταν κατ' αρχάς το ενδιαφέρον του επιστήμονος που ασχολείται με τον πυθαγορισμό, στοχεύοντας στην κατανόηση του τρόπου μελέτης από τους πυθαγορείους των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί αιώνες κατ' αυτόν ή εκείνον τον τρόπο στην ανθρώπινη αίσθηση. Έτσι ο άνθρωπος από της αρχαιότητος μέχρι της σημερινής εποχής δεν κάνει τίποτ' άλλο από το να προσπαθεί ν' ανακαλύψει και διατυπώσει με την επιστημονική γνώση, που εκάστοτε διαθέτει, τη φύση και τη μορφή αυτών των φαινομένων κατά την Πλατωνική φιλοσοφική κι επιστημονική άποψη «*σώζειν τα φαινόμενα*».

Στην προσπάθειά μου αυτή εντυπωσιάσθηκα εξαιρετικά από τον μυστικισμό, που διέκρινε τη μετάδοση της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμυημένων οπαδών του πυθαγορισμού, αλλά σύντομα διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγο αυτό τα ιερά κείμενά τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με σημεία, σύμβολα, αριθμούς κι αστερισμούς, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά που, διαφορετικώς, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρέβλωση (McClain E. G., 2006).

Διεπίστωσα ότι υπάρχουν κρίσιμες περικοπές ιερών κειμένων και κειμένων της παγκοσμίου λογοτεχνίας -Βέδες, Αιγυπτιακό βιβλίο των Νεκρών, Βίβλος, Πλάτων- που πραγματεύονται αριθμούς. Επί πλέον συνειδητοποίησα ότι η επανάληψη ταυτοσήμων και ομοίων αριθμών στη Βαβυλώνα, την Αίγυπτο, την Ελλάδα και την Παλαιστίνη επιβεβαιώνουν τις κάποτε αναπτυχθείσες θεωρήσεις, οι οποίες είχαν ιστορική συνέχεια και προσανατολισμό μιας βασικής πνευματικής παραδόσεως.

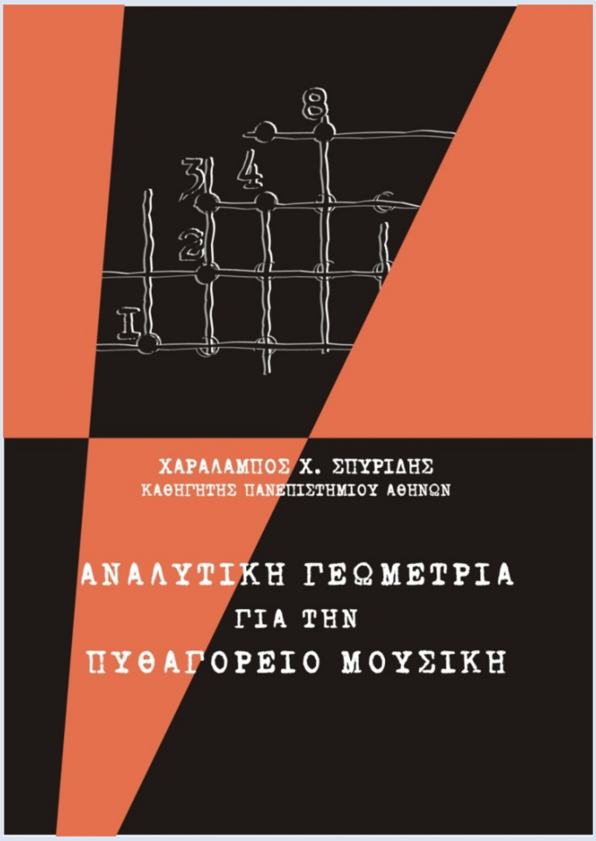
Μελετώντας την πορεία των μουσικών ιδεών από τον Πυθαγόρα στον Πλάτωνα, ασχολήθηκα επί πολύν καιρό με το «*μουσικό χωρίο*» του Πλατωνικού Τιμαίου (35 a1 - 36 b6), το οποίο αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία.

Σύντομα αντελήφθηκα ότι ο πλατωνισμός αντιμετωπίζει τη μουσική με μια νέα οπτική. Μια οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνο που ο μελετητής θα πρέπει ν' ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.

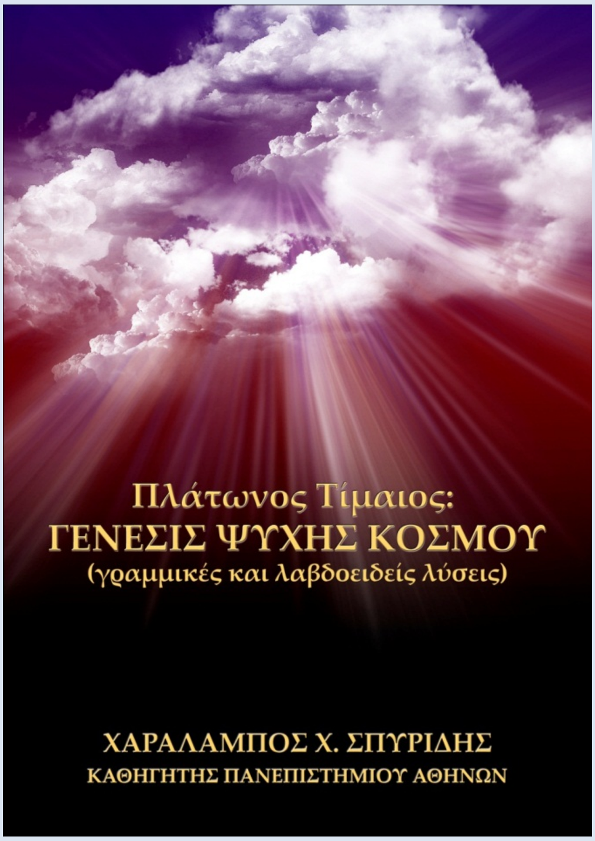
Κατάλαβα ότι ο μελετητής θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τον Πλάτωνα ως την πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για να μπορέσει να εισχωρήσει στην περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών αφενός και αφετέρου να συσχετίσει την τότε με τη σημερινή επιστημονική ορολογία.

Καρπός αυτής της ενασχολήσεώς μου με το «*μουσικό χωρίο*» υπήρξαν τα δύο σύγγραμματά μου με τίτλο «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*» (Εικόνα 1) και «*Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεση Ψυχής Κόσμου*», (Εικόνα 2), εις τα οποία αποκαλύπτε-

ται πλήρως η όποια μουσική αλληγορία κάτω από τις προεκτάσεις της μεγίστης Πλατωνικής τετρακτύος 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 εις το εν λόγω Πλατωνικό χωρίο.



Εικόνα 1: Το σύγγραμμά του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη με τίτλο «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*» 425 σελίδων.



Εικόνα 2: Το σύγγραμμά του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη με τίτλο
«*Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεση Ψυχής Κόσμου*».

Με την *Πολιτεία*, το σημαντικότερο ίσως έργο της Πλατωνικής γραμματολογίας ξεκίνησα ν' ασχολούμαι από τοπικιστικά κίνητρα και μόνον. Τυγχάνω ως προς την καταγωγήν Θραξ εκ Θρακός πατρός και Θράσσης μητρός. Ο εν λόγω Πλατωνικός διάλογος αναφέρεται στη συμμετοχή των πρωταγωνιστών στην εορτή των Βενδιδείων, προς τιμήν της Βενδίδος ή Βένδιδος, μιας Θρακικής σεληνιακής θεότητος, η οποία εταυτίσθη προς την Εκάτη ή την Άρτεμι ή και την Περσεφόνη. Στη Θράκη τα Βενδίδεια ήσαν εορταί με οργιαστικόν χαρακτήρα και διεδόθησαν στο Βυζάντιο, στις ελληνικές αποικίες επί της θρακικής χερσονήσου, στη Λήμνο, στην Αμφίπολη και δια των Θρακών εμπόρων στον Πειραιά.

Πυθαγόρεια αριθμολογία και δίκαιο

Με την έννοια δίκαιο οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν την παροχή αμοιβαίων υπηρεσιών, δηλαδή την κατ' αμοιβαιότητα δικαιοσύνη, η οποία ασκείται εκουσίως από όλα τα μέλη της κοινωνίας και κατ' αυτόν τον τρόπο συνέχεται η πολιτική Κοινωνία.

Το πολίτευμα των Πυθαγορείων (Σακελλαρίου, Γ. Θ. 1962) προέβλεπε την ύπαρξη ισορροπίας μεταξύ των διακριτών εξουσιών του κράτους. Όπως μας αναφέρουν οι Πολύβιος, Κικέρων και Πλούταρχος, το διακριτό είχε την αρχή του στη Λυκούργειο νομοθεσία και στο Σπαρτιατικό πολίτευμα. Να θυμηθούμε ότι οι Σπαρτιάτες θεωρούσαν ότι οι νόμοι τους εδόθησαν από τον θεό Απόλλωνα (Πλ. Νόμ. 624Α), εξασφάλιζαν δικαιοσύνη για όλους τους πολίτες και απαγορεύετο αυτηρώς η κριτική των νόμων από τους νέους (Πλ. Νόμ. 634 D).

Οι Πυθαγόρειοι, ως γνωστόν, θεωρούσαν τους αριθμούς ως ουσία των πραγμάτων κι επίστευαν ότι τα πάντα εγίνοντο επί τη βάσει σχεδίου ενός αριθμού. Την αρετή της δικαιοσύνης την παριστούσαν με τον αριθμό πέντε (5) με βάση το παρακάτω σκεπτικό.

Για τους Πυθαγορείους η έννοια της δικαιοσύνης καθορίζεται ως η δύναμη της διανομής του ίσου, που ανήκει στον καθένα. Αυτό είναι το λεγόμενο «*αναλογούν δίκαιον*». Το «*αναλογούν δίκαιον*» για τους φυσικούς αριθμούς της δεκάδος είναι ο μέσος όρος αυτών, δηλαδή

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{i} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Για τους Πυθαγορείους το θεμέλιο και η φύση της δικαιοσύνης εμφανίζονται σε όλα τα τετράγωνα των αριθμών (*αριθμοί ισάκις ίσοι*), διότι είναι το γινόμενο δύο ίσων αριθμών, αλλά ιδιαιτέρως η φύση της δικαιοσύνης αποκαλύπτεται στα τετράγωνα των περιττών αριθμών, επειδή έχουν ένα μέσον:

$$3^2 = 9 = 4+1+4$$

$$5^2 = 25 = 12+1+12$$

$$7^2 = 49 = 24+1+24$$

....

....

$$27^2 = 729 = 364+1+364$$

Το τετράγωνο του πρώτου περιττού αριθμού, δηλαδή το $3^2 = 9$, είναι ο πλέον αντιπροσωπευτικός αριθμός.

Ο Αρχύτας, ο Πυθαγόρειος, (Μαθηματικός, Μηχανικός, Στρατηγός και Πολιτικός ηγέτης του Τάραντος) μας αναφέρει ότι το Σύνταγμα ενός Κράτους μπορεί να καθορισθεί κατά τρεις διαφορετικούς τύπους του πολιτικού δικαίου. Ο κάθε τύπος περιγράφεται από συγκεκριμένη μαθηματική αναλογία τέτοιας, ώστε μεταξύ των αριθμών της να αναφέρονται ωρισμένες σχέσεις βάσει των οποίων το Σύνταγμα κατανέμει εξουσίες και δικαιώματα στις πολιτικές υπηρεσίες και ανάμεσα στις τάξεις των πολιτών.

Έτσι, λοιπόν, το Ολιγαρχικό Δίκαιο και το Τυραννικό Δίκαιο θεμελιούνται επάνω στην αριθμητική αναλογία (1, 2, 3), η οποία εγκαθιστά μια μεγάλη ανισότητα μεταξύ του λόγου των μικρών σε σχέση με το λόγο των μεγάλων όρων της $\left(\frac{2}{1} > \frac{3}{2}\right)$, αφού ο διπλάσιος λόγος είναι μεγαλύτερος του ημιολίου. Στο Ολιγαρχικό Δίκαιο οι λίγοι και στο Τυραννικό Δίκαιο ο ένας κυβερνούν την πολιτεία, επιδιώκοντας το δικό τους καλό και όχι αυτό της πολιτείας. (Σπυρίδης, Χ. Χ. 2005).

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Αριθμητική	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N}$, τότε ισχύει: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$	3, 2, 1

Πρέπει να τονισθεί ότι στην Αριθμητική αναλογία «αγνοείται η ταυτότητα του λόγου και εξετάζεται μόνον η διαφορά των όρων» ή, με άλλα λόγια, «διατηρεί τις σχέσεις των όρων σύμφωνα με την ισότητα της ποσότητος, αρνούμενη την ομοιότητα του λόγου»[1], γι’ αυτό ονομάζεται «αναλογία κατά ποσότητα».

Το Δημοκρατικό Δίκαιο θεμελιούται επάνω στην γεωμετρική αναλογία (1, 2, 4), η οποία εγκαθιστά ισότητα σχέσεων μεταξύ των λόγων των μεγάλων και των μικρών όρων της $\left(\frac{2}{1}=\frac{4}{2}\right)$ (αναλογία κατά ποιότητα). Στο Δημοκρατικό Δίκαιο τόσο ο φτωχός, όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση της Πολιτείας.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Γεωμετρική	Εάν $\alpha>\beta>\gamma$ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{N}$, τότε ισχύει: $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$	4, 2, 1

Η αναλογία την οποία ο Αρχύτας ονομάζει Αρμονική (3, 4, 6), χρησιμεύει ως το υπόδειγμα για το Αριστοκρατικό και το Βασιλικό Δίκαιο και τούτο διότι αυτή εγκαθιστά μια μικρή ανισότητα μεταξύ των λόγων των μικρών σε σχέση με το λόγο των μεγάλων όρων της $\left(\frac{4}{3}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\right)$, αφού ο επίτριτος λόγος είναι μικρότερος του ημιολίου. Για το λόγο αυτό η αρμονική πρόοδος ονομάζεται *υπεναντία* της αριθμητικής προόδου.

Το δίκαιο της αριστοκρατίας αναγνωρίζει στους άξιους πολίτες περισσότερα δικαιώματα απ’ ό,τι αναγνωρίζει το δίκαιο της ολιγαρχίας. Το δίκαιο της δημοκρατίας, όπως προανεφέρθη, δεν κάμνει καμμία διάκριση ανάμεσα στους πολίτες. Κατά τον Στοβαίο (Στοβαίος IV.1. 131) το αριστοκρατικό δίκαιο είναι από ιδεολογικής απόψεως το καλύτερο, διότι μιμείται το δίκαιο της φύσεως, το οποίο κατ’ αναλογία παρέχει στον καθέναν ό,τι του αξίζει.

[1] Σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιεί ο Νικόμαχος ο Γερασηνός δύο ζεύγη αριθμών έχουν μια όμοια ποιοτική σχέση, όταν παρουσιάζουν τον ίδιο λόγο και έχουν μια όμοια ποσοτική σχέση, όταν παρουσιάζουν την ίδια διαφορά.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Αρμονική ή Υπενάντιος	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N}$, τότε ισχύει: $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$	6, 4, 3

Η αρχή της αμοιβαιότητος και ισορροπίας υφίσταται σε όλη την Πυθαγόρειο φιλοσοφία, η οποία διακηρύσσει ότι στις αντινομίες των όντων και των φυσικών φαινομένων υπάρχουν τρόποι εναρμονίσεως, που συνιστούν και διατηρούν τον κόσμο.

Η ίδια αρχή της αμοιβαιότητος και ισορροπίας εφαρμόζεται και στον κοινωνικό και πολιτικό βίο, όπου οι αντιθέσεις οδηγούνται στην εναρμόνιση και στην ανάπτυξη πολιτισμού. Κατά τον Φιλόλαο (*Θραύσμα 10, γρ. 2-3*)

«ἔστι γὰρ ἁρμονία πολυμιγέων ἕνωσις καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις»

(Πολυμιγής σημαίνει σύμμικτος, μεμιγμένος από πολλά και διάφορα είδη, πολυσύνθετος, πολυποίκιλος. Η αρμονία, άρα, αφορά στο πλήθος των εναντιοτήτων και αντιθέσεων, δηλαδή αυτών που φρονούν ενάντια, αντίθετα).

Πλατωνική Πολιτειολογία

Στην Πλατωνική γραμματολογία η *Πολιτεία* θεωρείται το σημαντικότερο ίσως έργο. Σ' αυτό ο Πλάτων προσπαθεί να μας δώσει την εικόνα του τελείου πολιτεύματος. (Σημαιοφορίδης, Ηρ. 2002). Η πολιτική εμπειρία, που διέθετε ο Πλάτων, ήτο πολύ μεγάλη, αφού εκάλυπτε όλον τον ελληνικό και τον γνωστό βαρβαρικό κόσμο. Η πολιτική του σκέψη, όμως, ήταν επηρεασμένη από την Αθήνα, που στην ιστορία της είχε γνωρίσει 10 πολιτειακές μεταβολές, και οι Συρακούσες, που εγνώρισαν όλα τα πολιτεύματα κυρίως δε την τυραννίδα. (Μικρογιαννάκης, Εμ. 2002)

Στην ιδανική Πολιτεία του Πλάτωνος ο κάθε πολίτης, αναλόγως των φυσικών του προδιαθέσεων και ικανοτήτων, αναλαμβάνει έναν συγκεκριμένο και αυστηρά καθορισμένο ρόλο, ο οποίος συνεπάγεται και έναν αντίστοιχο τρόπο ζωής.

Τα δικαιώματα και οι υποχρεώσεις του κάθε πολίτη, αναλόγως της τάξεώς του, οριοθετούνται βάσει δύο γνωμόνων: την ευνομία και την ενότητα της Πολιτείας. Άρα το κύριο μέλημα είναι να καθορισθεί η μορφή της πολιτειακής οργανώσεως που θα εξασφαλίζει σε μια πόλη αυτές τις δύο αρχές. Αυτό το πολιτειακό μοντέλο δεν είναι ούτε το μοναδικό σύστημα πολιτικής και κοινωνικής οργάνωσης που υπάρχει, ούτε είναι αμετάβλητο. Σ' αυτό το πολιτειακό μοντέλο ζει το πρότυπο του αριστοκρατικού ανθρώπου.

Ο Πλάτων στην *Πολιτεία* του δίδει το ακόλουθο πενταμερές πολιτειακό σχήμα:

1. **Πλατωνική πολιτεία**, **αριστοκρατία** (κυβερνούν περισσότερα του ενός πρόσωπα, που ανήκουν στην τάξη των αρίστων)
2. **Κρητικολακωνική**, **τιμοκρατία** ή **φιλαρχία** (Η λέξη τιμή σημαίνει δόξα, διάκριση, αξίωμα).

3. **Ολιγαρχία** (κυβερνούν οι πλούσιοι, ενώ οι φτωχοί δεν έχουν μερίδιο στην εξουσία)
4. **Δημοκρατία** (το ανώτατο όργανο είναι το σύνολο των πολιτών)
5. **Τυραννίδα**, το «έσχατον νόσημα της πόλεως».

Στην παρούσα εισήγηση μ' ενδιαφέρει η πυθαγόρειος συμπεριφορά του Πλάτωνος. Συγκεκριμένα, ασπαζόμενος ο Πλάτων την πυθαγόρειον ρήση «τα πάντα κατ' αριθμόν γίγνονται», συμπεριφέρεται ως πυθαγόρειος (**Οἱ Πυθαγορικοὶ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων,** Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10), χρησιμοποιεί αριθμούς, προκειμένου να αισθητοποιήσει τα λεγόμενά του και δηλώνει ότι ο τύραννος είναι 729 φορές χειρότερος από τον βασιλέα (Stephanus 587 b11 - 588 a2). Η συγκεκριμένη περικοπή περιλαμβάνει έναν διάλογο μεταξύ του Σωκράτους και του φίλου του Γλαύκωνος, αδελφού του Πλάτωνος, και έχει ως ακολούθως:

Οἶσθ' οὖν, ἦν δ' ἐγώ, ὅσῳ ἀηδέστερον ζῇ τύραννος βασιλέως;

Ἂν εἴπῃς, ἔφη.

Τριῶν ἡδονῶν, ὡς ἔοικεν, οὐσῶν, μιᾶς μὲν γνησίας, δυοῖν δὲ νόθαιν, τῶν νόθων εἰς τὸ ἐπέκεινα ὑπερβὰς ὁ τύραννος, φυγὼν νόμον τε καὶ λόγον, δούλαις τισὶ δορυφόροις ἡδοναῖς συνοικεῖ, καὶ ὁπόσῳ ἐλαττοῦται οὐδὲ πάνυ ῥᾴδιον εἰπεῖν, πλὴν ἴσως ὧδε.

Πῶς; ἔφη.

Ἀπὸ τοῦ ὀλιγαρχικοῦ τρίτος που ὁ τύραννος ἀφειστήκει· ἐν μέσῳ γὰρ αὐτῶν ὁ δημοτικὸς ἦν.

Ναί.

Οὐκοῦν καὶ ἡδονῆς τρίτῳ εἰδώλῳ πρὸς ἀλήθειαν ἀπ' ἐκείνου συνοικοῖ ἄν, εἰ τὰ πρόσθεν ἀληθῆ;

Οὕτω.

Ὁ δέ γε ὀλιγαρχικὸς ἀπὸ τοῦ βασιλικοῦ αὖ τρίτος, ἐὰν εἰς ταὐτὸν ἀριστοκρατικὸν καὶ βασιλικὸν τιθῶμεν.

Τρίτος γάρ.

Τριπλασίου ἄρα, ἦν δ' ἐγώ, τριπλάσιον ἀριθμῷ ἀληθοῦς ἡδονῆς ἀφέστηκεν τύραννος.

Φαίνεται.

Ἐπίπεδον ἄρ', ἔφην, ὡς ἔοικεν, τὸ εἴδωλον κατὰ τὸν τοῦ μήκους ἀριθμὸν ἡδονῆς τυραννικῆς ἂν εἴη.

Κομιδῇ γε.

Κατὰ δὲ δύναμιν καὶ τρίτην αὔξην δῆλον δὴ ἀπόστασιν ὅσην ἀφεστηκὼς γίγνεται.

Δῆλον, ἔφη, τῷ γε λογιστικῷ.

Οὐκοῦν ἐάν τις μεταστρέψας ἀληθείᾳ ἡδονῆς τὸν βασιλέα τοῦ τυράννου ἀφεστηκότα λέγῃ ὅσον ἀφέστηκεν, ἐννεακαιεικοσικαιεπτακοσιοπλασιάκις ἥδιον αὐτὸν ζῶντα εὑρήσει τελειωθείσῃ τῇ πολλαπλασιώσει, τὸν δὲ τύραννον ἀνιαρότερον τῇ αὐτῇ ταύτῃ ἀποστάσει.

Ἀμήχανον, ἔφη, λογισμὸν καταπεφόρηκας τῆς διαφορότητος τοῖν ἀνδροῖν, τοῦ τε δικαίου καὶ τοῦ ἀδίκου, πρὸς ἡδονήν τε καὶ λύπην.

Η νεοελληνική απόδοση της ανωτέρω περικοπής κατά τους Α. Παπαθεοδώρου και Φ. Παππά (ΠΑΠΥΡΟΣ. 1939) έχει ως εξής:

- Ξέρεις, λοιπόν, είπα, πόσο αηδέστερα ζη ο τύραννος από το βασιλιά;
- Αν μου το ειπής, απήντησε, θα το μάθω.
- Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, η μία γνήσια και οι άλλες δύο νόθες. Ο τύραννος ξεπερνώντας και το τελευταίο ακόμα σύνορο των νόθων ηδονών, και ξεφεύγοντας πολύ μακρυά από το νόμο και τον ορθό λόγο, ζη πάντοτε με κάτι δουλικές ηδονές, που τις χρησιμοποιεί σαν δορυφόρους, και δεν είναι καθόλου εύκολο να ορίση κανείς πόσο είναι κατώτερος από το βασιλιά, παρά μόνο, ίσως, κατά τον ακόλουθο τρόπο.
- Πώς; είπε.
- Ας πάρουμε τον ολιγαρχικό σαν αφετηρία, ο τύραννος νομίζω πως είναι τρίτος στη σειρά, γιατί ανάμεσά τους στέκει ο δημοκρατικός.
- Ναι.
- Αν λοιπόν αυτά που είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής, που συγκατοικεί με τον τύραννο, δεν θάναι κατά τρεις φορές μακρύτερα από την αλήθεια, από όσο είναι το είδωλο που συγκατοικεί με τον ολιγαρχικό;
- Έτσι είναι.
- Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ταυτίσουμε τον αριστοκρατικό και το βασιλικό.
- Ασφαλώς τρίτος.
- Ώστε ο τύραννος, είπα εγώ, απέχει από την αληθινή ηδονή, για να εκφρασθώ με αριθμό, το τριπλάσιο του τριπλασίου.
- Φαίνεται.
- Καθώς φαίνεται λοιπόν, είπα, θα μπορούσε το είδωλο της ηδονής του τυράννου, ως προς το μήκος, ίσως να παρασταθή με ένα επίπεδο αριθμό.
- Βεβαιότατα.
- Αν τον αριθμό αυτό τον υψώσουμε στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο, θα δείξη καθαρά την απόσταση που χωρίζει τον τύραννο από το βασιλιά.
- Αυτό είναι φανερό, είπε, σε ένα άνθρωπο που ξαίρει λογιστικά.
- Εάν λοιπόν κανείς αναστρέφοντας την αναλογία θελήση να δείξη πόσο αληθινώτερη είναι η ηδονή του βασιλιά από την ηδονή του τυράννου, θα βρη άμα κάμη όλους τους πολλαπλασιασμούς, ότι αυτός ζη επτακόσιες είκοσι εννέα φορές ευχαριστότερα, ενώ ο τύραννος ζη δυστυχέστερα άλλες τόσες.
- Τι καταπληκτικό αριθμό, εφώναξε, μας έρριξες κατακέφαλα, για να μας δείξης τη διαφορά των δύο ανθρωπίνων τύπων, του δικαίου και του αδίκου, ως προς την ηδονή και τη λύπη.

Η Μουσικολογική αλληγορία της περικοπής

Όπως έχω ήδη αναφέρει, οι αλληγορικές πλατωνικές περικοπές με μαθηματικές εκφράσεις, όπως η συγκεκριμένη, αντιμετωπίζονται σήμερα με μια νέα οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση. Η οπτική αυτή δεν πρόκειται να κερδίσει την άμεση αποδοχή και υποστήριξη των θεολόγων, των φιλοσόφων, των φιλολόγων, των μαθηματικών και των άλλων επιστημόνων, οι οποίοι έχουν καταστεί εξαιρετικά ειδικοί εις το να βλέπουν το σύνολο παρά τη λεπτο-

μέρεια. Επίσης δεν θα κερδίσει ούτε τους μουσικούς, οι οποίοι θεωρούν τη μουσική σαν έναν κλάδο διασκεδάσεως, ούτε και τους μουσικολόγους, οι οποίοι εξ ενστίκτου φοβούνται τους αριθμούς.

Διαβάζοντας πλατωνικά χωρία που περιλαμβάνουν είτε αριθμούς, είτε μαθηματικούς όρους, οι μεν φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνση σ’ αυτά «*απλουστεύοντες το κείμενο*», οι δε μαθηματικοί τα αντιμετωπίζουν επιδερμικώς θεωρώντας τα ως διατυπώσεις «*ποιητική αδεία*». (Σπυρίδης, Χ. Χ. 17-21/10/2006).

Ο πεπαιδευμένος μουσικός, όμως, γνωρίζει ότι κάθε φθόγγος χαρακτηρίζεται από μια ποσότητα, δηλαδή μια αριθμητική τιμή (συχνότητα) ή μια αριθμητική σχέση (λόγο συχνοτήτων ή λόγο μηκών ταλαντουμένων τμημάτων χορδής) και από μία ποιότητα, δηλαδή ένα μουσικό ύψος ή ένα ηχόχρωμα. Μόνη της είτε η ποσότητα, είτε η ποιότητα, χαρακτηρίζει τον φθόγγο μονοπλεύρως, δεδομένου ότι αμφότερες αποτελούν τις δύο όψεις του αυτού νομίσματος κι αμοιβαίως η μία φωτίζει την άλλη. (Σπυρίδης, Χ. Χ. 2005).

Στο σημείο αυτό ας αρχίσω να ξεδιπλώνω τις σκέψεις μου.

1. «*Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, η μία γνήσια και οι άλλες δύο νόθες*».

Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι εκ των τριών αναλογιών (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική) η μία, η πρώτη, είναι νόθος, διότι «αγνοείται η ταυτότητα του λόγου και εξετάζεται μόνον η διαφορά των όρων (αναλογία κατά ποσότητα)» και οι δύο άλλες είναι γνήσιες (αναλογίες κατά ποιότητα). (Σπυρίδης, Χ. Χ. 2005).

Στην περικοπή τα νούμερα, που αφορούν στις ηδονές, πάνε αντίστροφα, δηλαδή μία ηδονή γνήσια και δύο νόθες.

Περί νόθων και γνησίων ηδονών θα επανέλθω αργότερα, διότι πρέπει να παραχθεί εν συνεχεία πρόσθετη πληροφορία.

2. «*Ο τύραννος ξεπερνώντας και το τελευταίο ακόμα σύνορο των νόθων ηδονών, και ξεφεύγοντας πολύ μακρυά από το νόμο και τον ορθό λόγο, ζη πάντοτε με κάτι δουλικές ηδονές, που τις χρησιμοποιεί σαν δορυφόρους, και δεν είναι καθόλου εύκολο να ορίση κανείς πόσο είναι κατώτερος από το βασιλιά, παρά μόνο, ίσως, κατά τον ακόλουθο τρόπο.*
   Πώς; είπε».

Η ηδονή που δοκιμάζει ο βασιλικός άνδρας είναι η μόνη γνήσια. Οι ηδονές που δοκιμάζουν ο τιμοκρατικός και ο ολιγαρχικός είναι οι δύο νόθες. Η ηδονή που απολαμβάνει ο τύραννος είναι πιο νόθα και απ’ αυτήν του ολιγαρχικού. Η υπέρτατη ηδονή για έναν φιλόσοφο είναι το Αγαθό, που είναι Ιδέα και μάλιστα η Υψίστη Ιδέα. Το Αγαθό ταυτίζεται με τη γνώση.

Όλη η δομή της Πολιτείας του Σωκράτους, όπως περιγράφεται στο διάλογο, προσομοιάζει με το Αριστοκρατικό πολίτευμα. (Σουκισιάν Τ. Μάρτιος 2006).

Όλες οι ποιοτικές εκφράσεις, που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο απόσπασμα, με κάποιον αλγόριθμο, τον οποίον ο Πλάτων θα εκθέσει με τον τρόπο του παρακάτω και ο οποίος αναμένεται εναγωνίως, θα ποσοτικοποιηθούν.

3. *«Ας πάρουμε τον ολιγαρχικό σαν αφετηρία, ο τύραννος νομίζω πως είναι τρίτος στη σειρά, γιατί ανάμεσά τους στέκει ο δημοκρατικός».*
«Αν λοιπόν αυτά που είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής, που συγκατοικεί με τον τύραννο, δεν θάναι κατά τρεις φορές μακρύτερα από την αλήθεια, από όσο είναι το είδωλο που συγκατοικεί με τον ολιγαρχικό;»

Επειδή όλοι θεωρούν ότι με αλχημείες ο Πλάτων παρήγαγε τον αριθμό 729, θεωρώ ότι πρέπει να ευρεθεί ο αναλυτικός αλγόριθμος, που χρησιμοποιεί.

Η τριάδα των ανθρώπων των πολιτευμάτων με αναφορά στον ολιγαρχικό είναι:

1	Ολιγαρχικός
2	Δημοκρατικός
3	Τύραννος

Θεωρώ προς στιγμήν ότι η απόσταση του ολιγαρχικού από μια απόλυτη αφετηρία είναι x. Τότε, των επομένων δύο οι αποστάσεις από αυτήν την απόλυτη αφετηρία θα είναι 2x και 3x, αντιστοίχως.

Για να προχωρήσει σωστά το μοντέλο, θα πρέπει η έννοια «είδωλο ηδονής» να εκφράζεται μαθηματικά με δύναμη η οποία έχει ως βάση την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από την απόλυτη αφετηρία και εκθέτη την τάξη του τύπου πολιτικού ανθρώπου. Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι η απόσταση από μια απόλυτη αφετηρία για τον Πλάτωνα εκφράζει ένα πυθαγόρειο μουσικό διάστημα και το σχετικό είδωλο ηδονής εκφράζει το πυθαγόρειο γινόμενο ενός ακεραίου αριθμού, που ταυτίζεται με την τάξη του τύπου πολιτικού ανθρώπου, επί ένα μουσικό διάστημα, που εκφράζει την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από μια απόλυτη αφετηρία.

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση από μια απόλυτη αφετηρία	Σχετικό είδωλο ηδονής
Ολιγαρχικός	$y_1 = x$	$y_1^1 = (x)^1$
Δημοκρατικός	$y_2 = 2x$	$y_2^2 = (2x)^2$
Τύραννος	$y_3 = 3x$	$y_3^3 = (3x)^3$

4. *«Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ταυτίσουμε τον αριστοκρατικό και το βασιλικό»*.

Με τη νέα τριάδα πολιτικών τύπων ανθρώπου προσδιορίζει την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από την απόλυτη αφετηρία, που δεν είναι άλλη από τον βασιλικό, τον οποίο στη συνέχεια τον ταυτίζει με τον αριστοκρατικό.

Κανονικά θα έπρεπε να είχε θέσει x=0, αφού ως απόλυτη αφετηρία εκλαμβάνει τον βασιλικό άνθρωπο. Αλλά κατά πρώτον συμφώνως προς τα λεγόμενα των μαθηματικών, που συνέγραψαν τις ιστορίες των Μαθηματικών, το μηδέν δεν το εγνώριζαν τότε, κατά δεύτερον το μηδέν θα κατέστρεφε τα είδωλα ηδονής όλων των τύπων πολιτικών ανθρώπων, αφού ως δυνάμεις με μηδενική βάση θα ισούντο όλες με το μηδέν και κατά τρίτον αρχίζει από τη μονάδα, διότι η Ψυχή του Κόσμου επί του αντιστρόφου δικτυωτού αρχίζει από τη μονάδα.

Τοποθετεί, λοιπόν, για την απόλυτη αφετηρία τον μικρότερο φυσικό αριθμό, το ένα (1), οπότε αβίαστα προκύπτουν τα ακόλουθα:

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση
Βασιλικός	Για x=1 $y_1 = x = 1$
Αριστοκρατικός	$y_2 = 2x = 2$
Ολιγαρχικός	$y_3 = 3x = 3$

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση	Σχετικό είδωλο ηδονής	Απόλυτο είδωλο ηδονής
Ολιγαρχικός	$z_1 = y_3$	$z_1^1 = \left(y_3\right)^1$	$3^1 = 3$
Δημοκρατικός	$z_2 = 2y_3$	$z_2^2 = \left(2y_3\right)^2$	$\left(2\cdot 3\right)^2 = 6^2 = 36$
Τύραννος	$z_3 = 3y_3$	$z_3^3 = \left(3y_3\right)^3$	$\left(3\cdot 3\right)^3 = \left(3^2\right)^3 = 3^6 = 729$

5. *«Ασφαλώς τρίτος.*

Ώστε ο τύραννος, είπα εγώ, απέχει από την αληθινή ηδονή, για να εκφρασθώ με αριθμό, το τριπλάσιο του τριπλασίου.

Φαίνεται.

Καθώς φαίνεται λοιπόν, είπα, θα μπορούσε το είδωλο της ηδονής του τυράννου, ως προς το μήκος, ίσως να παρασταθή με ένα επίπεδο αριθμό.

Βεβαιότατα.

Αν τον αριθμό αυτό τον υψώσουμε στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο, θα δείξη καθαρά την απόσταση που χωρίζει τον τύραννο από το βασιλιά.

Αυτό είναι φανερό, είπε, σε ένα άνθρωπο που ξαίρει λογιστικά.

Εάν λοιπόν κανείς αναστρέφοντας την αναλογία θελήση να δείξη πόσο αληθινώτερη είναι η ηδονή του βασιλιά από την ηδονή του τυράννου, θα βρη άμα κάμη όλους τους πολλαπλασιασμούς, ότι αυτός ζη επτακόσιες είκοσι εννέα φορές ευχαριστότερα, ενώ ο τύραννος ζη δυστυχέστερα άλλες τόσες.

Τι καταπληκτικό αριθμό, εφώναξε, μας έρριξες κατακέφαλα, για να μας δείξης τη διαφορά των δύο ανθρωπίνων τύπων, του δικαίου και του αδίκου, ως προς την ηδονή και τη λύπη».

Η έννοια του *επιπέδου* αριθμού ανάγεται στον τέλειο αριθμό των Πυθαγορείων, την ιερά τετρακτύν[2], της οποίας ενσαρκωτές είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4. Η τετρακτύς ήταν πρωτίστως τιμωμένη από τους Πυθαγορείους, διότι περιείχε όλες τις μουσικές συμφωνίες. Πράγματι, 4:1 είναι ο τετραπλάσιος λόγος και εκφράζει τη συμφωνία (το εύφωνο μουσικό διάστημα) της δις διαπασών, 3:2 είναι ο ημιόλι-

[2] Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν αναγκαίο το να πλάθουν λέξεις εσωτερικής σημασίας όπως π.χ. φιλοσοφία, κόσμος, τετρακτύς (εκ του τέτταρα και άγω), κάθαρσις, εχεμύθια, κατάρτυσις κ.α., στις οποίες απέδιδαν ιδιαίτερη σημασία.

ος λόγος και εκφράζει τη διαπέντε συμφωνία ή διοξεία, ο 4:3 είναι ο επίτριτος λόγος και εκφράζει τη διατεσσάρων συμφωνία ή συλλαβά, 2:1 είναι ο διπλάσιος λόγος και εκφράζει τη διαπασών συμφωνία.

Η ιερά τετρακτύς συμβολικά παριστάνεται με δέκα κουκίδες, οι οποίες έχουν τριγωνική διάταξη, αριθμητικώς εκφράζεται δια του «*τριγωνικού*» αριθμού 10=1+2+3+4 και το πλήθος των κουκίδων εκάστης σειράς της τριγωνικής διατάξεως εκφράζει αυτό που δείχνει το σχήμα 1.

Ο αριθμός 3 εκφράζει το επίπεδο, αφού τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο.

Σχήμα 1: Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος.

Αναφορικώς με τον αριθμό 729, τον οποίον επέλεξε και αναφέρει ο Πλάτων. Αυτός ο αριθμός από τη σκοπιά της μουσικής ως προς ένα μοναδιαίο μήκος ταλαντουμένης χορδής αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα:

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(2^3\right)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

το οποίο είναι ένα πυθαγόρειο τρίτονο συν εννέα διαπασών.

Το πυθαγόρειο τρίτονο ήτο το πλέον διάφωνο μουσικό διάστημα του μουσικού συστήματος, το οποίο εγνώριζε ο Πλάτων. Εξακολουθεί και σήμερα να φέρει τον ίδιο οικτρώς διάφωνο χαρακτήρα (*diabolo in musica*) στο δυτικό τονικό σύστημα 2.500 χρόνια μετά απ’ αυτόν.

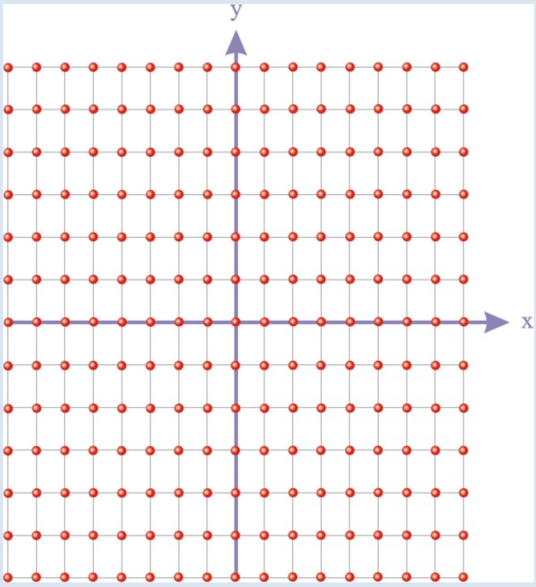
Αυτό το οποίο ο Πλάτων εξετίμησε με τον αριθμό 729 ήτο η σχέση μεταξύ του βασιλέως και του τυράννου και τη σχέση αυτή τη θεωρεί ως τη μεγίστη δυνατή ένταση μέσα σε ένα πολιτισμένο σύστημα.

Όπως έχω ήδη αναφέρει, μπορούμε να συμμερισθούμε την αμηχανία, την οποία αισθάνεται κάποιος μη μουσικός αντικρύζοντας τέτοιους αριθμούς. Για ν’ αντιληφθεί κανείς το ενυπάρχον ανάλογο, πρέπει να καταλάβει (όπως ο Πλάτων το είχε ως δεδομένο) ότι στην αρχαιότητα ο μουσικός συμβολισμός εγίνετο άμεσα καταληπτός από όλους τους μεμυημένους και γι’ αυτό ο Πλάτων τον χρησιμοποιεί συχνά. Όταν κατά τον ρούν της Ιστορίας ο ρόλος της μουσικής από πνευματική ή ψυχική δύναμη εθυσιάσθη εις τον βωμό της ατομικής εκφράσεως και απολαύσεως, η ερμηνεία των άλλοτε ξεκάθαρων κειμένων κατέστη δύσκολη και ακατόρθωτη.

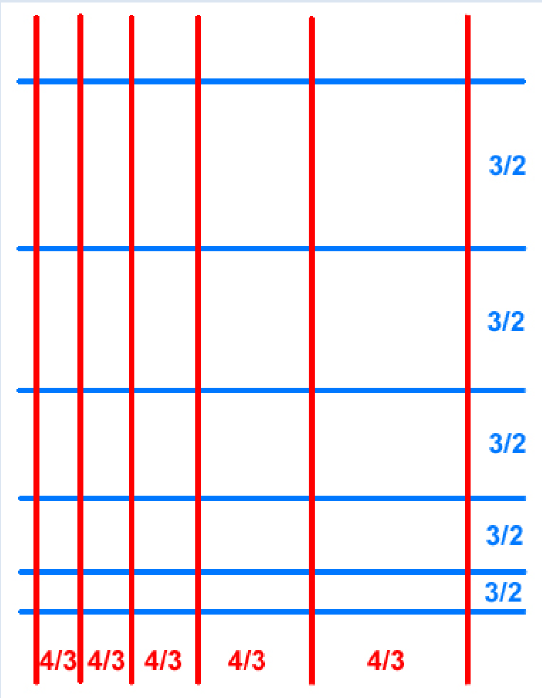
Εις τα κείμενα των Βεδών, τα οποία εγράφησαν το 4000 π.Χ. περίπου, υπάρχει θεμελιωμένη μια πρωτοεπιστήμη αριθμών και φθόγγων. Ο άνθρωπος του καιρού εκείνου εφρόντισε με τους αριθμούς να προσδιορίσει εναλλακτικά χορδίσματα ή εναλλακτικές δομές μουσικών κλιμάκων. (McClain E. G. 2006). Επειδή οι ποιητές περιορίζοντο στους ακεραίους θετικούς ή στους λεγομένους φυσικούς αριθμούς και χρησιμοποιούσαν τους κατά το δυνατόν μικρότερους ακεραίους αριθμούς σε κάθε τονικό γενικό πλαίσιο, μας κατέστησαν ικανούς να ανακαλύψουμε τις μουσικές δομές τους με μαθηματικές μεθόδους, όπως είναι τα εύφωνα διαστήματα (συμφωνίες) του Πυθαγόρου.

Θα αναφερθώ στο σύγγραμμά μου «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*» και συγκεκριμένα στη θεωρία περί των αντιστρόφων δικτυωτών, που διατυπώνω σ’ αυτό.

Με τον όρο *αντίστροφο δικτυωτό* (Σχήμα 2) θα εννοούμε το σύνολο των σημείων που ορίζονται από τις τομές των ευθειών δύο συνεπιπέδων δεσμών παραλλήλων ευθειών ορθογωνίων μεταξύ τους. Στην πρώτη δέσμη οι ευθείες ισαπέχουν κατά διαστήματα δια τεσσάρων και στη δευτέρα κατά διαστήματα δια πέντε (Σχήμα 3).



Σχήμα 2: Το αντίστροφο δικτυωτό σε log-log διάγραμμα.



Σχήμα 3: Οι δύο δέσμες των συνεπιπέδων παραλλήλων ευθειών που δια της τομής των ορίζουν τους κόμβους του αντιστρόφου δικτυωτού.

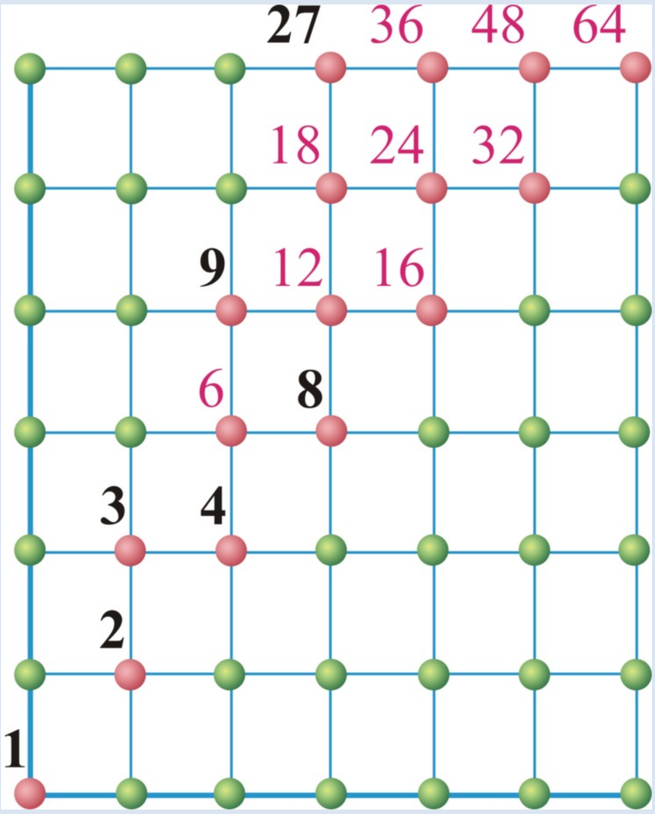
Λόγω της Ευκλειδείου μεθόδου της ανθυφαιρέσεως ή της ανταναιρέσεως εκ του συνόλου των κόμβων του αντιστρόφου δικτυωτού φυσική σημασία έχουν μόνον οι κόμβοι, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δονούμενα τμήματα χορδής με μήκη εκφραζόμενα δι’ **ακεραίων** αριθμών. Η μικρότερη αριθμητική τιμή αποδεκτού κόμβου είναι αυτή της μο-

νάδος και εκφράζει το μήκος της «ανθυφαιρετικής» μονάδος, η οποία δια τούτο είναι και αδιαίρετος.

Εκεί ισχυρίζομαι ότι ο Πλάτων με τις δύο τετρακτύες αριθμών (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) που δομούν τη μεγίστη τετρακτύ του (1, 2, 3, 4, 8, 9, 27) προσπαθεί να περιχαρακώσει ένα πεδίο τιμών, τ*ην Ψυχή του Κόσμου*, εντός του οποίου θα ευρίσκονται οι λύσεις του προβλήματός του περί Ψυχογονίας. Το πεδίο αυτό των τιμών, όπως αποδεικνύω, είναι μια τριγωνικής μορφής περιοχή του αντιστρόφου δικτυωτού (Σχήμα 4), η οποία έχει κορυφή επί του κόμβου αναφοράς και πλευρές καθοριζόμενες από τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$\phi(x) = 2^x \quad x = 0,1,2,3,\ldots \text{ και } \rho(y) = 3^y \quad y = 0,1,2,3,\ldots$$

Όλοι δε οι ενδιάμεσοι αριθμοί της Ψυχής του Κόσμου είναι της μορφής $\sigma(x, y) = 2^x \cdot 3^y \quad x, y = 0,1,2,3,\ldots$



Σχήμα 4: Η Ψυχή του Κόσμου επί του αντιστρόφου δικτυωτού.

Με τον εκθετικό χαρακτήρα, λοιπόν, των εννοιών σχετικό και απόλυτο είδωλο ηδονής εις τον αλγόριθμό του ο Πλάτων προσπαθεί να μας καθοδηγήσει να κατασκευάσουμε σωστά το «αντίστροφο δικτυωτό» -κάτι τέτοιο υποψιάζομαι ότι είχε στο μυαλό του- και να τοποθετήσουμε επ' αυτού τους αριθμούς της Ψυχής του Κόσμου.

Πράγματι, λεπτολογούντες θα λέγαμε ότι με τον όρο σχετικό είδωλο ηδονής ο Πλάτων ορίζει κατ' αλγεβρικόν τρόπον –θα λέγαμε σήμερα (!)- τις γεννητρίους συναρτήσεις $\phi(x) = 2^x \quad x = 0,1,2,3,\ldots$ και $\rho(y) = 3^y \quad y = 0,1,2,3,\ldots$ οι οποίες καθορίζουν τις θέσεις των κόμβων του άνω και κάτω ορίου της Ψυχής Κόσμου καθώς επίσης την συνάρτηση $\sigma(x, y) = 2^x \cdot 3^y \quad x, y = 0,1,2,3,\ldots$ που καθορίζει τις θέσεις των ενδιαμέσων κόμβων της Ψυχής Κόσμου.

Με τον όρο δε απόλυτο είδωλο ηδονής ορίζει επακριβώς την τιμή εκάστου κόμβου, δηλαδή το μήκος του ταλαντουμένου τμήματος χορδής που αυτός αντιπροσωπεύει, οπουδήποτε εντός της Ψυχής Κόσμου.

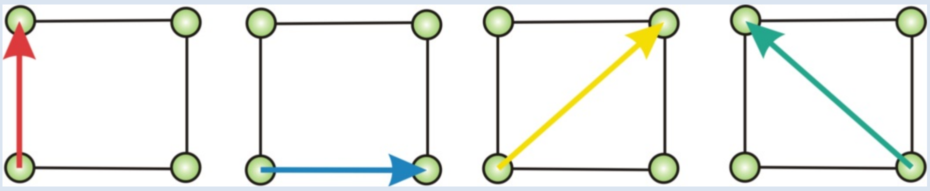
Πράγματι, το απόλυτο είδωλο ηδονής του Δημοκρατικού πολιτικού ανδρός είναι κατά Πλάτωνα ο αριθμός 36 ήτοι:

$$36 = (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = \sigma(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 2\ \text{διαπασών} + 2(\text{διαπασών και διαπέντε}) =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

Το αντίστροφο δικτυωτό είναι ένας ανισότροπος χώρος ως προς τη μετατόπιση, αφού η κίνηση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων

- κατά την κατακόρυφο διεύθυνση εκφράζει διάστημα διαπέντε
- κατά την οριζόντιο διεύθυνση εκφράζει διάστημα διατεσσάρων
- κατά την διαγώνιο διεύθυνση (*από κάτω αριστερά προς άνω δεξιά*) εκφράζει διάστημα διαπασών
- κατά την διαγώνιο διεύθυνση (*από κάτω δεξιά προς άνω αριστερά*) εκφράζει διάστημα επογδόου τόνου.



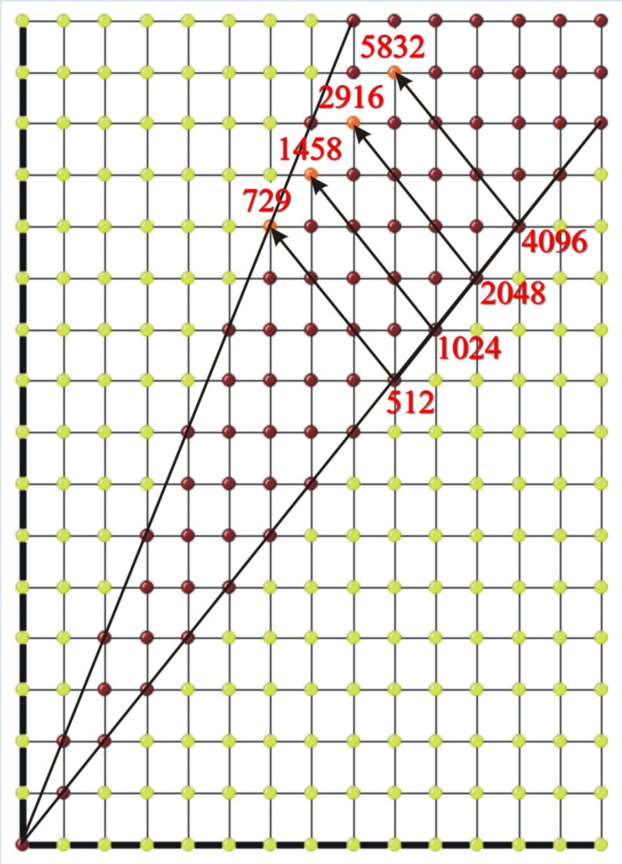
Διαπιστώνει κανείς ότι υπάρχουν δύο και μοναδικοί κόμβοι ο 512 επί της πρώτης γεννητρίας συναρτήσεως και ο 729 επί της δευτέρας, οι οποίοι απέχουν ακριβώς τρεις επογδόους τόνους μεταξύ τους. Υπάρχουν, βέβαια, και οι κόμβοι

1458 $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{10} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot 1024\right]$,

2916 $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{11} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot 2048\right]$ και

5832 $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{12} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot 4096\right]$,

οι οποίοι δεν κείνται επί της δευτέρας γεννητρίας συναρτήσεως, που απέχουν και αυτοί τρεις επογδόους τόνους από τους κόμβους 1024, 2048 και 4096 της πρώτης γεννητρίας συναρτήσεως και οι οποίοι θα μπορούσαν να ενταχθούν σε μία κλάση κόμβων σε απόσταση ενός διαπασών ο ένας από τον άλλον με πρώτον τον κόμβο 729, δηλαδή (729, 1458, 2916, 5832) (Σχήμα 5).



Σχήμα 5: Η κλάση των κόμβων (729, 1458, 2916, 5832) επί της Ψυχής του Κόσμου.

Γιατί επέλεξε ο Πλάτων να αναφέρει τον αριθμό 729 και δεν ανέφερε κάποιον από τους τρεις άλλους αριθμούς της κλάσεως; Θεωρώ λογικοφανείς τους εξής τέσσερις λόγους:

1. Είναι ο μόνος από τους τέσσερις, που εκφράζεται μονολεκτικά. Το αριθμητικό επίρρημα «ἐννεακαιεικοσικαιεπτακοσιοπλασιάκις» που εκφράζει αρχαϊστί «729 φορές» είναι η μακροσκελέστερη λέξη μέσα σε ολόκληρη την Πλατωνική γραμματεία και δομείται από 35 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. (Σπυρίδης, Χ. Χ. 2004).
2. Όπως έχω προαναφέρει, για τους Πυθαγορείους το θεμέλιο και η φύση της δικαιοσύνης εμφανίζονται σε όλα τα τετράγωνα των αριθμών (αριθμοί ισάκις ίσοι), διότι είναι το γινόμενο δύο ίσων αριθμών, αλλά ιδιαιτέρως η φύση της δικαιοσύνης αποκαλύπτεται στα τετράγωνα των περιττών αριθμών, επειδή έχουν ένα μέσον. Το τετράγωνο του πρώτου περιττού αριθμού, δηλαδή το $3^2=9$, είναι ο πλέον αντιπροσωπευτικός, τον οποίον ο Πλάτων επεδίωκε και στηρίχθηκε σ' αυτόν.
3. Οι πυθαγόρειοι προτιμούσαν από την πληθώρα των δυνατών λύσεων, αυτές που εκφραζόντουσαν με τους μικρότερους φυσικούς αριθμούς.
4. Αυτόν τον λειτουργικό αλγόριθμο σκέφθηκε ο Πλάτων, αυτόν και εφάρμοσε, διότι με τον αριθμό 729 και μόνον ωδηγείτο στον στόχο του.

Ο αριθμός 729 πιστεύω ότι είναι ένας αριθμός παγίδα, ο οποίος επαγίδευσε πολλούς ερευνητές των μαθηματικο-μουσικών Πλατωνικών προβλημάτων. Στο σύγγραμμά μου «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο μουσική*» αναλυτικά αναφέρω ότι η λύση του προβλήματος της Ψυχογονίας, που αρχίζει από την τιμή 384 και την ο-

ποία έδωσε ο Τίμαιος, ο φιλόσοφος, είναι λανθασμένη. Δικαιολογώ τη λύση του Σευήρου, που αρχίζει από την τιμή 768, με την οποία συμφωνεί και η δική μου λύση.

Θεωρώ ότι, προκειμένου να περιέχεται ο αριθμός 729 στη λύση του πλατωνικού προβλήματος περί Ψυχογονίας, ωδηγήθηκε ο Τίμαιος σε λάθος αποτέλεσμα. Στη λύση, που έδωσε ο Σευήρος, ο αριθμός 729 δεν υπάρχει, αφού αυτή ξεκινά από τον αριθμό 768. Το γεγονός αυτό δεν θεωρώ ότι παίζει κάποιο ρόλο, δεδομένου ότι ο αριθμός 729 αναφέρεται σε πρόβλημα της πλατωνικής Πολιτείας και όχι του πλατωνικού Τιμαίου.

Τώρα θεωρώ ότι μπορούμε να επανέλθουμε στο θέμα των γνησίων και των νόθων ηδονών.

«Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, η μία γνήσια και οι άλλες δύο νόθες».

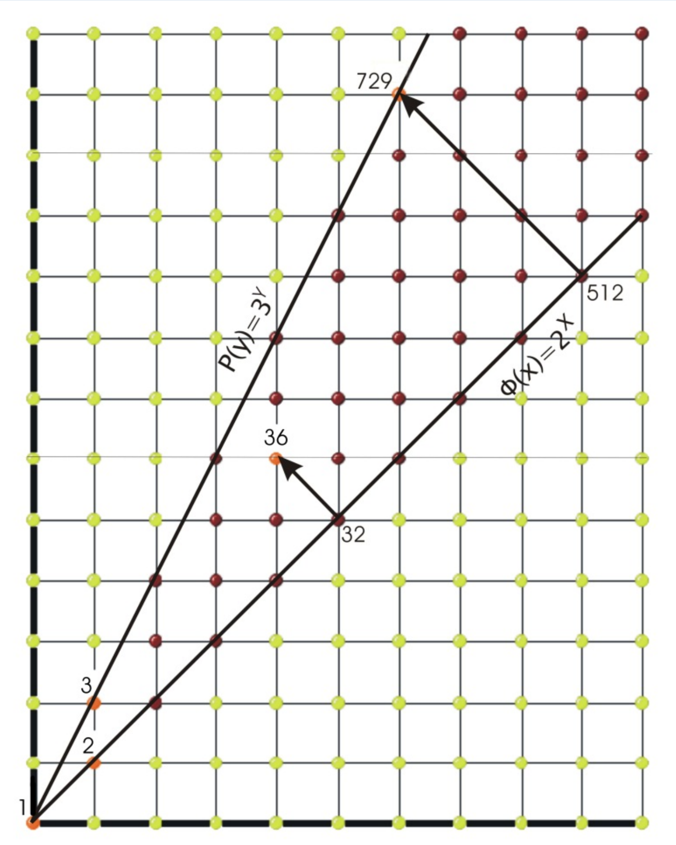
Τη δήλωση αυτή την κάνει ο Πλάτων, όταν ομιλεί για τον Βασιλικό (1), τον Αριστοκρατικό (2) και τον Ολιγαρχικό (3) τύπο ανθρώπων.

«Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ***ταυτίσουμε*** τον αριστοκρατικό και το βασιλικό».

Αυτή η δήλωση είναι εξαιρετικά σημαντική για τον εξής λόγο:

Τοποθετώντας τους αριθμούς 1, 2 και 3 επί των αντιστοίχων κόμβων της Ψυχής του Κόσμου του αντιστρόφου πλέγματος, παρατηρούμε ότι δύο εξ αυτών, οι 1 και 2, κείνται επί διαστήματος ενός διαπασών. Και μάλιστα αυτοί είναι οι ονομαζόμενοι «νόθες ηδονές». Ο τρίτος, ο 3, κείται από τον 2 σε διάστημα δια πέντε και από τον 1 σε διάστημα διαπασών και δια πέντε. Και μάλιστα αυτός είναι η γνήσια ηδονή.

Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι ο φθόγγος του κόμβου 3, αναγόμενος εντός ενός διαπασών με αφαίρεση ενός διαπασών, απέχει από τον φθόγγο του κόμβου 1 και από τον φθόγγο του κόμβου 2 διάστημα δια πέντε (Σχήμα 6). Να σημειωθεί ότι με την αναγωγή ενός διαστήματος εντός ενός διαπασών δεν αλλοιούται ο εύφωνος ή ο διάφωνος χαρακτήρα του μουσικού διαστήματος, αφού η μετατόπιση κατ’ οκτάβες ενός φθόγγου τίποτα δεν μεταβάλλει στο αρμονικό του περιεχόμενο.



Σχήμα 6: Τα είδωλα ηδονής των πολιτικών ανδρών επί του αντιστρόφου πλέγματος.

Βάσει αυτών θεωρώ ότι όλοι οι κόμβοι του αντιστρόφου πλέγματος, οι οποίοι κείνται σε αποστάσεις ακεραίου πλήθους διαπασών από τις «νόθες ηδονές», δηλαδή επί της γεννητρίας συναρτήσεως $\phi(x)=2^x \quad x=0,1,2,3,...$ αποτελούν και αυτοί «νόθες ηδονές» με την έννοια ότι σχηματίζουν μια ευθεία αναφοράς για τη μέτρηση των ειδώλων ηδονής όλων των δυνατών «γνησίων ηδονών».

Έτσι, λοιπόν, ο αριθμός $36=\left(\frac{9}{8}\right)\cdot\left(\frac{2}{1}\right)^5$, που αντιπροσωπεύει το είδωλο ηδονής του δημοκρατικού άνδρα, απέχει από τον κόμβο 32, δηλαδή την ευθεία αναφοράς, κατά ένα επόγδοο διάστημα, διάφωνο μεν, αλλά αρμονικό κύτταρο όλων των μουσικών συστημάτων της αρχαιοελληνικής μουσικής. Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι ο φθόγγος του 36, αναγόμενος εντός ενός διαπασών με αφαίρεση πέντε διαπασών, απέχει από τον φθόγγο αναφοράς, δηλαδή τον 1, κατά ένα επόγδοο διάστημα.
Αναφορικώς με το αρμονικό περιεχόμενο του αριθμού 729, τον οποίον επέλεξε να μνημονεύσει ο Πλάτων και ο οποίος αντιπροσωπεύει το είδωλο ηδονής του τυραννικού άνδρα, ωμίλησα προηγουμένως. Αυτός ο αριθμός απέχει από τον κόμβο του 512, δηλαδή την ευθεία αναφοράς, κατά ένα πυθαγόρειο τρίτονο.

Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι ο φθόγγος του 729, αναγόμενος εντός ενός διαπασών με αφαίρεση εννέα διαπασών, απέχει από τον φθόγγο αναφοράς, δηλαδή τον 1, κατά ένα πυθαγόρειο τρίτονο.

Όπως λέει ο καθηγητής Εμμανουήλ Μικρογιαννάκης, η εκτροπή των πολιτευμάτων προχωρεί ολοένα προς κατώτερα διαζώματα. Συγκεκριμένα από την τιμοκρατία προχωρεί σε νοσηρότερες μορφές και φθάνει με κατακόρυφη καθοδική πορεία στην τυραννίδα. Οι μεταβάσεις είναι μονοσήμαντες. Κάθε μεταβολή γίνεται προς συγκεκριμένο πολιτειακό τύπο, που είναι υποδεέστερος, και η κατάληξη είναι η τυραννίς. Η τυραν-

νίς προέρχεται μόνον από τη δημοκρατία. Το χειρότερο με την τυραννίδα είναι ότι περιερχόμεθα σε αδιέξοδο, σε απορία. Κατά τον Πλάτωνα ο τύραννος είναι όχι απλώς δούλος, αλλά ο δουλικώτερος πάντων. (Μικρογιαννάκης, Εμ. 2002).

Το μουσικολογικό περιεχόμενο των ανωτέρω, που αναφέρει ο καθηγητής Εμμανουήλ Μικρογιαννάκης, είναι το εξής. Η δυσαρμονία προχωρεί από το σύμφωνο διάστημα της ταυτοφωνίας και του διαπασών προς όλο και περισσότερο διάφωνα μουσικά διαστήματα και φθάνει με κατακόρυφη καθοδική πορεία στην αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο $\left(\frac{9}{8}\right)^3$. Η αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, προέρχεται μόνον από τον επόγδοο τόνο $\left(\frac{9}{8}\right)$, αφού δομείται αποκλειστικώς από τρεις επογδόους τόνους. Το χειρότερο με την αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, είναι ότι αισθανόμεθα στ' αυτιά μας τον οικτρώς διάφωνο χαρακτήρα του (*diabolo in musica*). Κατά τον Πλάτωνα η αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, δεν είναι απλώς διάφωνο διάστημα, αλλά το διαφωνέστερο πάντων των διαστημάτων.

Ο καθηγητής κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκης, ερμηνεύοντας με άλλο σκεπτικό τον Πλατωνικό αλγόριθμο, αναφέρει ότι οι τύραννοι θα έχουν βαθμό ευδαιμονίας στην κλίμακα 0-3, ο δημοκρατικός ανήρ 3-9, ο ολιγαρχικός 9-27, ο τιμοκρατικός 27-81, ο αριστοκρατικός 81-243 και ο φιλόσοφος-βασιλεύς 243-729. (Μικρογιαννάκης, Εμ. 2002).

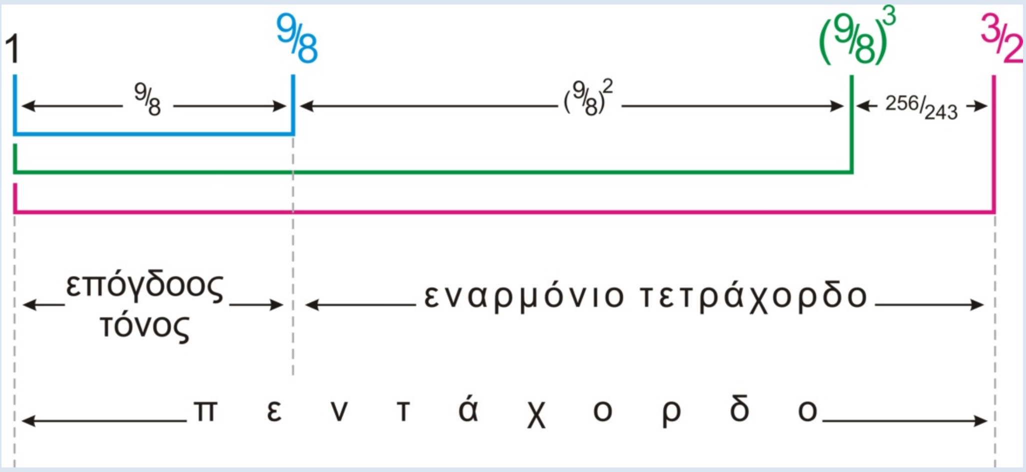
Οι ανωτέρω αναφερόμενες τιμές κλίμακος αποτελούν αποκλειστικώς τιμές της δεύτερης γεννήτριας συναρτήσεως $\rho(y)=3^y \quad y=0,1,2,3,...$ της Ψυχής του Κόσμου.

Κατά την δική μου ερμηνεία του Πλατωνικού αλγορίθμου, δίνοντας για τους δύο πρώτους τύπους πολιτικού ανδρός τιμές για το απόλυτο είδωλο ηδονής τους ίσες με τις τιμές της απόστασής τους από το απόλυτο σημείο αναφοράς, έχουμε τους εξής βαθμούς ευδαιμονίας:

Τύπος ανθρώπου	Απόλυτο είδωλο ηδονής
Βασιλικός	1
Αριστοκρατικός	2
Ολιγαρχικός	$3^1=3$
Δημοκρατικός	$(2\cdot 3)^2=6^2=36$
Τύραννος	$(3\cdot 3)^3=\left(3^2\right)^3=3^6=729$

Οι τιμές αυτές των απολύτων ειδώλων ηδονής, αναγόμενες εντός του ενός διαπασών με αρχή τον φθόγγο αναφοράς, δηλαδή τον 1, σχηματίζουν τα εξής μουσικά διαστήματα $\left[1,\ \frac{9}{8},\ \left(\frac{9}{8}\right)^3,\ \frac{3}{2}\right]$ (επόγδοος τόνος, πυθαγόρειον τρίτονον, δια πέντε), τα οποία δομούν ένα πεντάχορδο με διαστηματική δομή $\left[1,\ \frac{9}{8},\ \left(\frac{9}{8}\right)^2,\ \frac{256}{243}\right]$ (επόγδοος τόνος, πυθαγόρειον δίτονον, λείμμα). Τούτο σημαίνει ότι το εν λόγω πεντάχορδο δομείται από έναν επόγδοο τόνο $\left(\frac{9}{8}\right)$ συν ένα τετράχορδο $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2,\ \frac{256}{243}\right]$. Το τετράχορδο αυτό

δομείται από ένα ασύνθετο δίτονο και από πυκνό μεγέθους λείμματος. Άρα πρόκειται για τη δομή ενός εναρμονίου τετραχόρδου, για το οποίο ήθελε, κατά τη γνώμη μου, να μιλήσει αλληγορικώς ο Πλάτων (Σχήμα 7).



Σχήμα 7: Οι τιμές των απολύτων ειδώλων ηδονής, αναγόμενες εντός του ενός διαπασών με αρχή τον φθόγγο αναφοράς, δηλαδή τον 1, σχηματίζουν μουσικά διαστήματα που δομούν ένα εναρμόνιο πεντάχορδο.

Το δίτονον είναι το χαρακτηριστικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το υπόλοιπο διάστημα του εναρμονίου τετραχόρδου, το ονομαζόμενον πυκνόν, δηλαδή το διάστημα λιχανός-υπάτη έχει μέγεθος ενός λείμματος (256:243). Για τη διαίρεση αυτού του διαστήματος, του πυκνού, δεν μας αναφέρει τίποτα ο Πλάτων, αλλά, ως Πυθαγόρειος, θα ασπάζεται, εικάζω, τα όσα αναφέρονται στην ιη Πρόταση της μουσικής πραγματείας *Κατατομή Κανόνος* του Ευκλείδου, δηλαδή «Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα». Με άλλα λόγια το πυκνόν διαιρείται από τις παρυπάτες στα τετράχορδα υπατών και μέσων και από τις τρίτες στα τετράχορδα συνημμένων, διεζευγμένων και υπερβολαίων σε δύο διαστήματα. Στην Πυθαγόρειο θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι άνισα, αλλά στην Αριστοξένειο θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Ίσως λόγω αυτού του συγκερασμού ο Αριστόξενος (Αρμονικά 1.22-26) ασχολείται διεξοδικά με τις θέσεις των λιχανών και των παρανητών σε σχέση με αυτό που κάνει για τις θέσεις των παρυπατών και των τριτών (Αρμονικά 1. 26-27).

Σχόλια

Η μουσικολογική αλληγορία της Πλατωνικής Πολιτειολογίας κρίνεται ως εξαιρετικώς ενδιαφέρουσα και αποκαλυπτική για τις γνώσεις του Πλάτωνος –και των μουσικών της εποχής του- όσον αφορά στο αρμονικό περιεχόμενο των μουσικών διαστημάτων. Πράγματι αξιολογεί και κατατάσσει τα μουσικά διαστήματα της ταυτοφωνίας, του διαπασών, του διαπέντε, του επογδόου και του τριτόνου με βάση τη δυσαρμονία (παραφωνία) που προκαλούν κατά την ακρόασή τους.

Η Μουσική Ακουστική διδάσκει ότι ένας σύνθετος ήχος χαρακτηρίζεται από την αρμονική του δομή, δηλαδή από τον θεμέλιό του και το πλήθος των αρμονικών του και ότι όταν δύο σύνθετοι ήχοι συνηχούν, ο θεμέλιος και οι αρμονικοί εκάστου ήχου συμμετέχουν στο ερέθισμα, που φθάνει στο αυτί του ακροατού. Βάσει αυτών σήμερα εξηγούμε

τη δυσαρμονία είτε με το πλήθος των διακροτημάτων που συμβαίνουν ανάμεσα στους μη κοινούς αρμονικούς των συνακροωμένων ήχων, είτε με τους φθόγγους συνδυασμού [πρώτοι $\left(f_1 - f_2,\ f_1 > f_2\right)$ και δεύτεροι $\left(2 \cdot f_2 - f_1\right)$ τόνοι διαφοράς] των θεμελίων συχνοτήτων $\left(f_1\right)$ και $\left(f_2\right)$ των συνακροωμένων ήχων, λόγω της μη γραμμικής συμπεριφοράς του ακουστικού μας οργάνου. Έτσι, κατατάσσομε ακριβώς με την ίδια σειρά δυσαρμονίας τα εν λόγω μουσικά διαστήματα (Σπυρίδης, 1996). Στην εποχή του Πυθαγόρου και του Πλάτωνος πώς γινόταν η κατάταξη; Απλώς δια της ακροάσεως των μουσικών διαστημάτων; Δεν εγνώριζαν τα περί διακροτημάτων; Τότε ποιος ο ρόλος των αριθμών 1, 2, 3, 4 της ιεράς τετρακτύος, αφού σήμερα γνωρίζουμε ότι όσο μικρότεροι είναι οι αριθμοί που εκφράζουν το λόγο των θεμελίων των δύο συνθέτων ήχων, τόσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός της συμφωνίας του διαστήματός των, διότι κατά τη θεωρία των διακροτημάτων οι μικροί αριθμοί συνεπάγονται την απουσία των ενοχλητικών διακροτημάτων μεταξύ των υψηλοτέρας τάξεως αρμονικών;

Πρέπει να σημειωθεί ότι μέχρι στιγμής μόνον οι Προτάσεις ιζ και ιη της Ευκλειδείου πραγματείας Κατατομή κανόνος γνωρίζαμε ότι αναφέρονται στο εναρμόνιο γένος των αρχαίων Ελλήνων, διότι οι εν λόγω προτάσεις δεν αναφέρονται από τον Πορφύριο. Επειδή, βεβαίως, ο Ευκλείδης πουθενά προηγουμένως δεν κάνει ονομαστικά μνεία των γενών, υπάρχει η άποψη ότι αυτές οι Προτάσεις δεν είναι μέρος της αρχικής πραγματείας, αλλά ότι είναι κατοπινά ενθέματα –κατά την άποψή μου ευτυχώς-.

Το δίτονον είναι το χαρακτηριστικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το δίτονο εμφανίζεται μεταξύ του λιχανού και του φθόγγου κορυφής του τετραχόρδου π.χ. μεταξύ λιχανού μέσων και της μέσης. Βλέπε και 7 Αριστοξ. Στοιχ. Αρμον. 22.27-23.22, 50.22-25. Στον Αρχύτα 1.21 και Πτολ. Αρμον. 30.9ff αναφέρεται αντί διτόνου (9:8)Χ(9:8)=81:64, το διάστημα 80:64=5:4, το οποίο είναι κατά (81:64):(80:64)=(81:80) –ένα κόμμα- μικρότερο του διτόνου. Το υπόλοιπο διάστημα του εναρμονίου τετραχόρδου, το ονομαζόμενον πυκνόν, δηλαδή το διάστημα λιχανός-υπάτη έχει μέγεθος ενός λείμματος (256:243), βλέπε Φιλόλαο (1.12 αποσπ. 6), Πλάτωνα (2.3 Τίμ. 35b-36c) και την Πρόταση 20 στην Ευκλείδου κατατομή κανόνος.

Η δομή του εν λόγω εναρμονίου πενταχόρδου (επόγδοος τόνος + εναρμόνιο τετράχορδο) είναι κατά την κατιούσα διαδοχή, αφού το πυκνόν πάντοτε καταλαμβάνει τη χαμηλότερη συχνοτική περιοχή της δομής. Απ’ εδώ βλέπουμε ότι ο Πλάτων προσλαμβάνει άνωθεν, δηλαδή ο επόγδοος τόνος –ως προσλαμβανόμενος- είναι στην υψηλότερη συχνοτική περιοχή της δομής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Σπυρίδης, Χαράλαμπος Χ. (2006) «Αντίστροφα δικτυωτά», στο *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*. Σελ. 157 κ.ε. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- __________ (2006) «Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα», στο *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*. Σελ. 47-57. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- __________ (2005) «Πυθαγόρειες Αναλογικότητες ή Αναλογίες ή Μεσότητες», στο *Ευκλείδου Κανόνος κατατομή*. Σελ. 309 κ.ε. Αθήνα: Γαρταγάνης.
- __________ (2004) *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*. Αθήνα: Γαρταγάνης.
- __________ (2005) Φυσική και Μουσική Ακουστική. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- __________(2005) ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ κανόνος κατατομή. Αθήνα: Γαρταγάνης.
- __________ (2006) *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- __________ (17-21/10/2006) Οἱ Πυθαγορικοὶ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων, τὴν μουσικήν φασιν ἐναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν πολλῶν ἕνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν· Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10-12. Εισήγηση στο Γ' Διεθνές Συνέδριο «Θεωρία και Πράξη της Ψαλτικής Τέχνης. Η Οκταηχία». Αθήνα: Μέγαρο Μουσικής.
- __________ (2004) «ΤΑ ΟΜΗΡΙΚΑ ΕΠΗ (ΙΛΙΑΣ ΚΑΙ ΟΔΥΣΣΕΙΑ) ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΥΛΩΝΑ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ»*, στο Επιστημονική Επετηρίς της Φιλοσοφικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών Τόμος ΛΕ' (2003-2004).* Σελ. 81-107, Αθήνα.
- __________ (1996) «Τόνοι συνδυασμού – Διακροτήματα», στο Μουσική Ακουστική. Σελ. 141 κ.ε. Θεσσαλονίκη: Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

- Σουκισιάν Τακβόρ (Μάρτιος 2006) Τα πολιτεύματα στην Πολιτεία του Πλάτωνα. Εισήγηση στα μέλη του Ομίλου Μελετών.
- Σακελλαρίου, Γεώργιος Θ. (1962) Πυθαγόρας ο Διδάσκαλος των αιώνων: Ιδεοθέατρον.
- Μικρογιαννάκης, Εμμανουήλ. (2002) «Πολιτειακή παθολογία κατά τον Πλάτωνα της Πολιτείας», στο ΠΛΑΤΩΝ, Τόμος Α', Αφιέρωμα στον Δημήτρη Ζ. Ανδριόπουλο. Σελ. 245 κ.ε. Αθήνα: Παπαδήμας.
- Σημαιοφορίδης, Ηρ. (2002) «Πλατωνική πολιτειολογία», στο ΠΛΑΤΩΝ, Τόμος Α', Αφιέρωμα στον Δημήτρη Ζ. Ανδριόπουλο. Σελ. 261 κ.ε. Αθήνα: Παπαδήμας.
- McClain Ernest G. (2006) *The myth of invariance*. New York: Patrck A. Heelan, Editor, Nicolas Hays, Nicolas Hays, Ltd.
- Παπαθεοδώρου, Α. – Παππά, Φ. (μετ.) (1939) *Πλάτωνος Πολιτεία (ή περί δικαίου πολιτικός).* Αθήνα: Επιστημονική Εταιρεία των Ελληνικών Γραμμάτων ΠΑΠΥΡΟΣ.

«Μουσικός Διανυσματικός Λογισμός»

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας,
Τμήμα Μουσικών Σπουδών,
Φιλοσοφική Σχολή,
Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΜΟΥ
***ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Ι. ΡΕΝΤΖΕΠΕΡΗΝ**,*

ΟΣΤΙΣ ΜΟΥ ΕΔΙΔΑΞΕ ΤΗΝ ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΔΟΜΗ,
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΔΕΣΜΗ
ΠΟΛΛΩΝ ΚΟΣΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΑΝΤΙΚΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ…

1. Προλεγόμενα

Θα ήθελα να εκκινήσω με ένα προσωπικό σχόλιο. Το ενδιαφέρον μου για τον πλατωνισμό ήταν κατ' αρχάς το ενδιαφέρον του επιστήμονος που ασχολείται με τον πυθαγορισμό, στοχεύοντας στην κατανόηση του τρόπου μελέτης από τους πυθαγορείους των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί αιώνες κατ' αυτόν ή εκείνον τον τρόπο στην ανθρώπινη αίσθηση.

Έτσι ο άνθρωπος από της αρχαιότητος μέχρι της σημερινής εποχής δεν κάνει τίποτ' άλλο από το να προσπαθεί ν' ανακαλύψει και διατυπώσει με την επιστημονική γνώση, που εκάστοτε διαθέτει, τη φύση και τη μορφή αυτών των φαινομένων κατά την Πλατωνική φιλοσοφική κι επιστημονική άποψη
«σώζειν τα φαινόμενα».

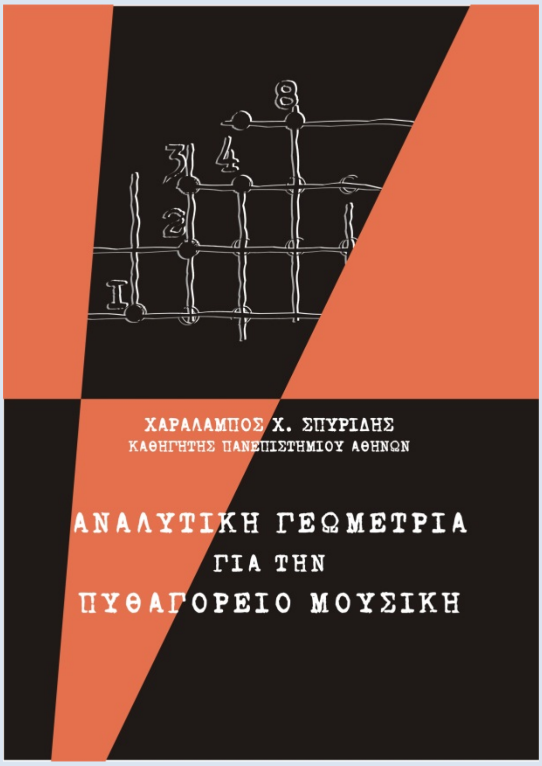
Στην προσπάθειά μου αυτή εντυπωσιάσθηκα εξαιρετικά από τον μυστικισμό, που διέκρινε τη μετάδοση της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμυημένων οπαδών του πυθαγορισμού, αλλά συντόμως διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγον αυτόν τα ιερά κείμενά τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με σημεία, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά που, διαφορετικώς, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρέβλωση (McClain E. G., 2006).

Μελετώντας την πορεία των μουσικών ιδεών από τον Πυθαγόρα στον Πλάτωνα, ασχολήθηκα επί πολύν καιρό με το
«*μουσικό χωρίο*» του Πλατωνικού Τιμαίου (35a1 - 36b6), το οποίο αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία.

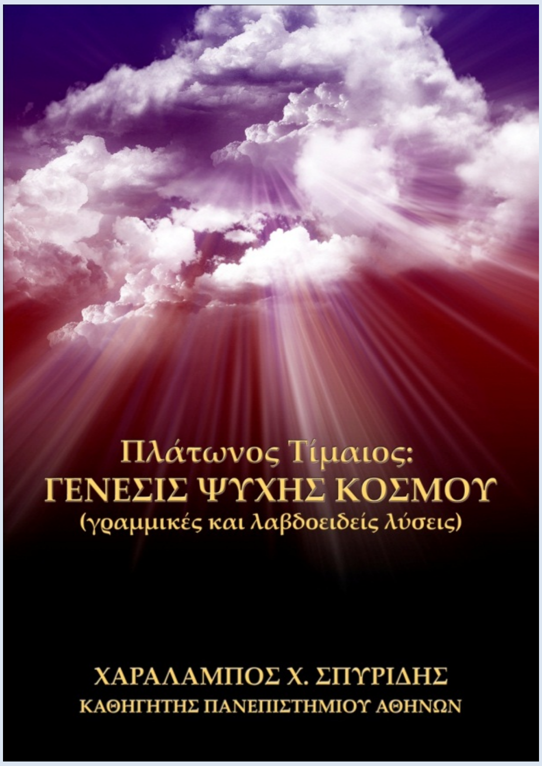
Συντόμως αντελήφθηκα ότι ο πλατωνισμός αντιμετωπίζει τη μουσική με μια νέα οπτική. Μια οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνο που ο μελετητής θα πρέπει ν' ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.

Κατάλαβα ότι ο μελετητής θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τον Πλάτωνα ως την πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για να μπορέσει να εισχωρήσει στην περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών αφενός και αφετέρου να συσχετίσει την τότε με τη σημερινή επιστημονική ορολογία.

Καρπός αυτής της ενασχολήσεώς μου με το «*μουσικό χωρίο*» υπήρξαν τα δύο σύγγραμματά μου με τίτλο
«Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική» (Εικόνα 1.1) και
«*Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεση Ψυχής Κόσμου*», (Εικόνα 1.2), εις τα οποία αποκαλύπτεται πλήρως η όποια μουσική αλληγορία κάτω από τις προεκτάσεις
της μεγίστης Πλατωνικής τετρακτύος 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 εις το εν λόγω Πλατωνικό χωρίο.



Εικόνα 1.1: Το σύγγραμμά του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη με τίτλο
«*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*».



Εικόνα 1.2: Το σύγγραμμά του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη με τίτλο
«Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεση Ψυχής Κόσμου (γραμμικές & λαβδοειδείς λύσεις)».

2. Η επιστήμη της Αρμονικής (=Μουσικής)

Οι πυθαγόρειοι ανεκάλυψαν τις βασικές αρχές της παγκοσμίου αρμονίας, των οποίων έκφραση και απείκασμα είναι οι μουσικοί λόγοι.

Η λέξη αρμονία σημαίνει συναρμολόγηση, σύνδεση, εκ του αρχαίου ρήματος *αραρίσκω*, το οποίο έχει τη σημασία συνάπτω, ενώνω, συναρμόζω, βάλλω μαζί, προσαρμόζω τι προς τι, συναρμολογώ τι με τι.

Η αλληλοδιαδοχή ποικίλων μουσικών λόγων εντός της διαπασών (=οκτάβας) γεννά αλληλουχία ποικίλων αλληλοσυνδεομένων μουσικών διαστημάτων και φθόγγων. Για τον λόγο αυτόν οι παλαιοί μαθηματικοί και μουσικοί αποκαλούσαν τη διαπασών «*αρμονίαν*».

Τα πολυποίκιλα φαινόμενα περί την αρμονίαν αντιμετώπιζαν οι πυθαγόρειοι με την επιστήμη της Αρμονικής (=Μουσικής), μια πρωτοεπιστήμη αριθμών και φθόγγων, η οποία ετυμολογικώς σημαίνει μέσον προς συναρμογήν δια του νοός.

Η Αρμονική (=Μουσική) κατά τους Πυθαγορείους (Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*) ήτο η τρίτη κατά σειράν εκ των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής επιστήμης
(Αριθμητική, Γεωμετρία, Αρμονική και Σφαιρική), ενώ κατά τον Πλάτωνα ήτο η τετάρτη εκ των πέντε ιδιοτήτων δια των οποίων εξαγνίζεται ο άνθρωπος
(Αριθμητική, Γεωμετρία, Στερεομετρία, Μουσική και Αστρονομία).

Ο Νικόμαχος επισημαίνει ότι για να λειτουργήσει εκάστη επιστήμη ή ιδιότητα χρειάζεται οπωσδήποτε τις γνώσεις όλων των προηγουμένων της επιστημών ή ιδιοτήτων.

Η Αρμονική, ως ασχολουμένη με την αρμονία, ήτο μία καθαρώς μαθηματική επιστήμη, βασιζομένη στην Αριθμητική, τη Γεωμετρία και την Στερεομετρία και δεν ήτο μια δραστηριότητα αποσκοπούσα στην τέρψη και τη διασκέδαση των ανθρώπων.

Οφείλω να καταθέσω ότι η πολυετής ερευνητική ενασχόλησή μου με το γνωστό ως «*μουσικό χωρίο*» εκ του Πλατωνικού Τιμαίου, το οποίο αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου βασιζομένου σε δύο τετράδες αριθμών, σε δύο τετρακτύες,
(1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) και διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία, μου εδημιούργησε την πίστη ότι η Πυθαγόρειος μουσική, ως καθαρώς μαθηματικός κλάδος, ήτο η εν είδει Διανυσματικού Λογισμού αντιμετώπιση των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων.

Επιθυμών να επαληθεύσω αυτό μου το πιστεύω εδημιούργησα τη θεωρία του **Μουσικού Διανυσματικού Λογισμού** δια της οποίας απλοποιήθηκε η όλη αντιμετώπιση των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων και η οποία αποτελεί το θέμα της παρούσης εισηγήσεώς μου.

Συνειδητοποιώντας το περιεχόμενο του αποσπάσματος του Νικομάχου του Γερασηνού «περί των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής Επιστήμης» το ενδιαφέρον μου μετετοπίσθη από τη θεωρία των μουσικών διαστημάτων προς τη Γεωμετρία, διότι με τη Γεωμετρία οι αρχαίοι Έλληνες επεδίωκαν να κατανοήσουν την αφηρημένη δομή των σημείων και των ευθειών, χωρίς να προσκολλώνται σε συγκεκριμένους τύπους-συνταγές.

Με προβλημάτιζαν οι νέοι τύποι γεωμετριών, που πολλοί είχαν προταθεί από διαφόρους μαθηματικούς κατά τον δέκατο ένατο αιώνα και που ο καθένας παρεβίαζε ένα από τα θεμελιώδη αξιώματα της Ευκλειδείου Γεωμετρίας. Το σημαντικό για μένα ήταν οι σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα και όχι τα ίδια τα αντικείμενα. Θεωρούσα ότι η Γεωμετρία εξακολουθεί να έχει νόημα ακόμη και όταν οι όροι σημείο, ευθεία, επίπεδο, αντικατασταθούν από τις λέξεις μουσικό ύψος, μουσικό διάστημα, μουσικό σύστημα.

Η ανάγκη να απαντήσω στα πάρα πολλά ερωτηματικά, που αντιμετώπισα κατά την πολυειδή ανάλυση του εν λόγω Πλατωνικού χωρίου, με ωδήγησε στη σύλληψη και διατύπωση της Γεωμετρίας των *ευθέων* και των *αντιστρόφων δικτυωτών* και στη συγγραφή του βιβλίου μου με τίτλο «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*» με έντονες επιρροές από την Ρεντζεπέρειο διδασκαλία της Κρυσταλλοδομής.

Ως γνωστόν, όλες οι υπάρχουσες Γεωμετρίες, άλλη ολιγότερο και άλλη περισσότερο, περιγράφουν τον φυσικό κόσμο. Η δική μου Γεωμετρία περιγράφει ιδανικά τον κόσμο όλων των μουσικών γεγονότων, δηλαδή τις μουσικές όλων των μουσικών πολιτισμών που υπήρξαν, υπάρχουν και που θα υπάρξουν στον πλανήτη Γη με την πλέον λεπτή μέθοδο, με τη συντομότερη ανάλυση, με τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και καλαισθησία και, τέλος, τον μικρότερο πνευματικό κόπο.

Απόρροια της θεωρίας των δικτυωτών είναι «*Ο Μουσικός Διανυσματικός Λογισμός*» δια του οποίου επιλύονται τα μουσικά προβλήματα, αντιμετωπίζοντας τα μουσικά διαστήματα ως διανύσματα.

3. Επίπεδα Δικτυωτά

Με τον όρο επίπεδο δικτυωτό εννοούμε το σύνολο των σημείων που ορίζονται από τις τομές των ευθειών δύο συνεπιπέδων δεσμών[1] παραλλήλων ευθειών, συνήθως ορθογωνίων μεταξύ τους.

Λαμβάνομε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy. Λαμβάνομε επίσης μία επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα y'Oy, που τέμνουν τον άξονα x'Ox κατά επίτριτα μουσικά διαστήματα $\left(\frac{4}{3}\right)$ και μια επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα x'Ox, που τέμνουν τον άξονα y'Oy καθ' ημιόλια μουσικά διαστήματα $\left(\frac{3}{2}\right)$. Οι τομές των δύο επιπέδων και ορθογωνίων δεσμών παραλλήλων ευθειών ορίζουν ένα σύνολο ομοεπιπέδων *σημείων* ή *κόμβων*, δηλαδή ορίζουν ένα *επίπεδο δικτυωτό* (Σχήμα 3.1).

Το επίτριτο και το ημιόλιο διάστημα επελέγησαν για τη δόμηση του δικτυωτού -ως χαρακτηριστικά θεμελειώδη μουσικά διαστήματα κατά τους αντιστοίχους άξονες x και y-, διότι είναι εκφραστές των δύο και μοναδικών ασυνθέτων αρχαιοελληνικών συμφωνιών, ήτοι της διατεσσάρων και της διαπέντε.

> Τῶν συμφωνιῶν αἱ μέν εἰσιν ἀσύνθετοι, αἱ δὲὲ σύνθετοι, ἀσύνθετοι μὲν αἱ διὰ τεσσάρων αἵ τε διὰ πέντε, σύνθετοι δὲ αἱ διὰ ὀκτὼ καὶ ἕνδεκα καὶ δώδεκα καὶ δεκαπέντε.
>
> Ανωνύμου του Bellermann, Τέχνη Μουσικής, 74, 1 έως 75, 1.

Ο κάθε κόμβος του δικτυωτού ορίζει είτε ένα ***μουσικό ύψος***, είτε ένα **μήκος ταλαντουμένου τμήματος χορδής** επί ενός συμπαντικού μονοχόρδου. Στην πρώτη περίπτωση το δικτυωτό θα ονομάζεται **ευθύ** ή **Πυθαγόρειο**, στη δεύτερη περίπτωση **αντίστροφο** ή **Σπυρίδειο**.

Οι έννοιες ευθύ και αντίστροφο εδόθησαν επειδή τα μουσικά ύψη και τα ταλαντούμενα τμήματα χορδών συνδέονται δια της αντιστρόφου σχέσεως $\frac{f_1}{f_2}=\frac{L_2}{L_1}$.

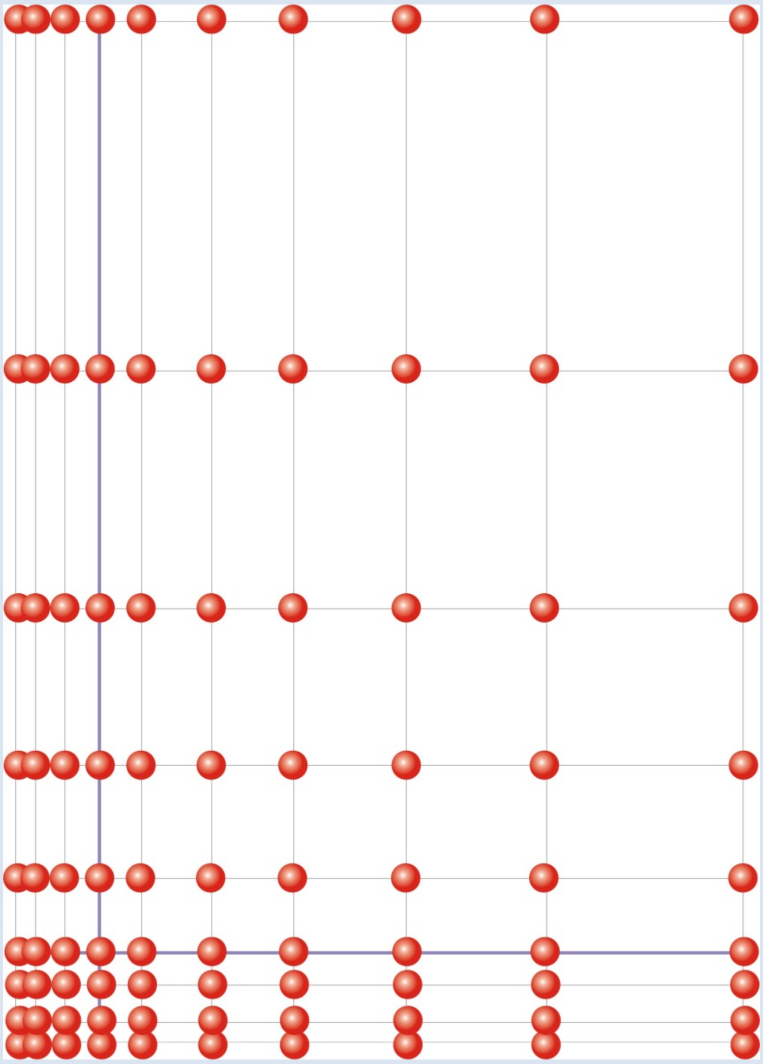
Πρέπει να τονισθεί ευθύς εξ αρχής ότι το δικτυωτό αποτελεί μια αφηρημένη περιοδική διάταξη κόμβων, επί της οποίας υλοποιείται η Πυθαγόρειος μουσική και ΜΟΝΟΝ.

Κατά τη σχεδίαση του δικτυωτού σε γραμμικούς άξονες οι παράλληλες ευθείες των συνεπιπέδων δεσμών απέχουν κατά αποστάσεις ανάλογες του $\left(\frac{a}{b}\right)^k \; k=1,2,3,...$, όπου $\left(\frac{a}{b}\right)$ είναι το χαρακτηριστικό θεμελειώδες μουσικό διάστημα κατά τον αντίστοιχο άξονα. Ως εκ τούτου είναι μεταξύ τους μη ισαπέχουσες.

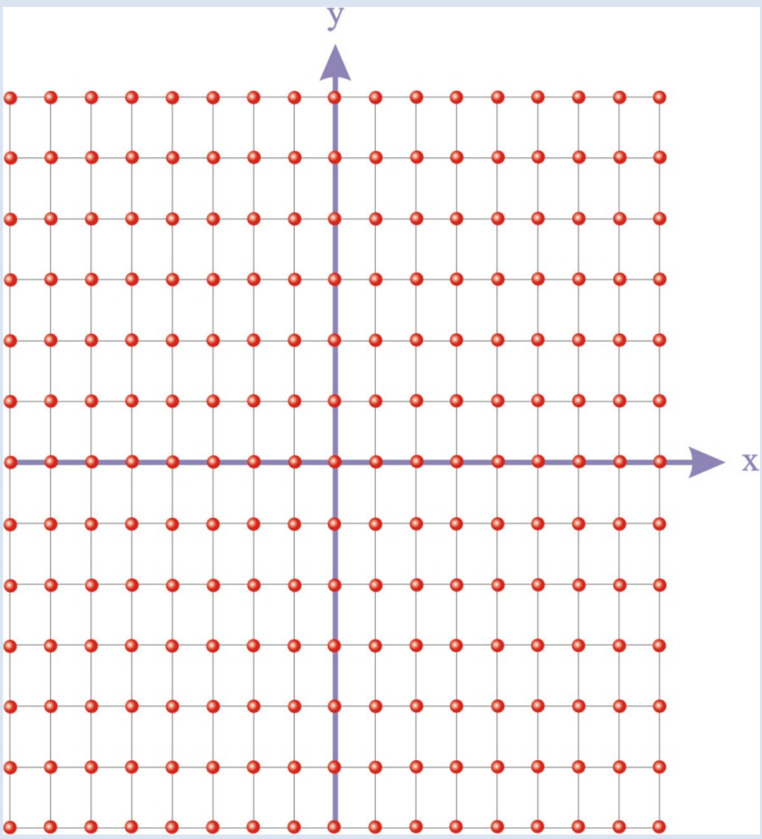
Προκειμένου να καταστεί το δικτυωτό ευκολότερο στη σχεδίαση και περισσότερον εποπτικό, το σχεδιάζουμε σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με λογαριθμικούς άξονες (Σχήμα 3.2), οπότε οι παράλληλες ευθείες ανά δέσμη καθίστανται ισαπέχουσες.

Στο εξής, όταν ομιλούμε για το ευθύ ή το αντίστροφο δικτυωτό, θα εννοούμε μετακίνηση κατά μήκος των αξόνων κατά το αντίστοιχο χαρακτηριστικό θεμελειώδες τους μουσικό διάστημα, αλλά θα το σχεδιάζουμε σε log-log άξονες.

[1] Δέσμη ευθειών εν γένει λέγεται το σύνολο των ευθειών, οι οποίες διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο ονομάζεται *κέντρο* της δέσμης. Δεχόμαστε ότι το κέντρο μιας δέσμης παραλλήλων ευθειών ευρίσκεται στο άπειρο.



Σχήμα 3.1: Το δικτυωτό σε γραμμική σχεδίαση.



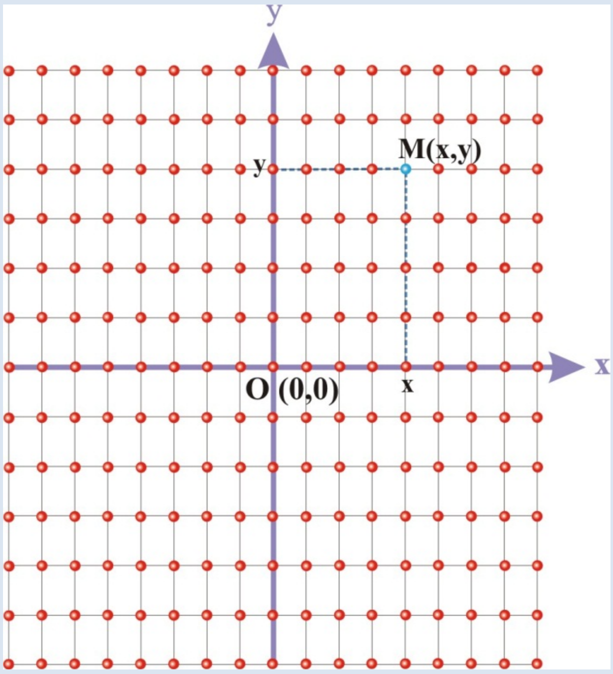
Σχήμα 3.2: Το δικτυωτό σε log-log διάγραμμα,

όπου $x = \log\left[\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]$ και $y = \log\left[\left(\frac{3}{2}\right)^y\right]$.

Επί εκάστου δικτυωτού κατά τον άξονα x το βήμα (= η μικρότερη επιτρεπτή μετακίνηση) είναι ένα επίτριτο διάστημα και κατά τον άξονα y το βήμα είναι ένα ημιόλιο διάστημα. Αυτά σημαίνουν ότι στο δικτυωτό οι μετατοπίσεις γίνονται κατά ακέραιο αριθμό βημάτων και ΜΟΝΟΝ.

Το βήμα κατά τον άξονα x και το βήμα κατά τον άξονα y έχουν μέτρα $\left(\frac{4}{3}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}\right)$, αντιστοίχως, είναι κάθετα μεταξύ τους και ονομάζονται *παράμετροι του δικτυωτού*.

Επί του ευθέος δικτυωτού συμβολίζουμε με M(x,y) ένα μουσικό διάστημα, που υλοποιείται με την εκτέλεση x επιτρίτων και y ημιολίων μουσικών διαστημάτων σε σχέση με ένα αρχικό μουσικό ύψος O(0,0), το οποίο εκλαμβάνεται ως μουσικό ύψος αναφοράς (Σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3: Ένα μουσικό ύψος M(x,y) σε Πυθαγόρειο δικτυωτό, το οποίο σε σχέση με ένα μουσικό ύψος αναφοράς O(0,0) σχηματίζει ένα μουσικό διάστημα.

Ένας κόμβος του Πυθαγορείου δικτυωτού με συντεταγμένες x και y συμβολίζεται ως $M(x,y)$ και παριστά το μουσικό ύψος $M(x,y)=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{y}\cdot O(0,0)$, αφού υλοποιείται με την εκτέλεση x επιτρίτων και y ημιολίων μουσικών διαστημάτων σε σχέση με ένα αρχικό μουσικό ύψος O(0,0), το οποίο εκλαμβάνεται ως μουσικό ύψος αναφοράς (Σχήμα 3.3). Τούτο συμβαίνει επειδή οι αριθμητικές σχέσεις των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων προστίθενται δια πολλαπλασιασμού.

Επί του αντιστρόφου δικτυωτού, αντιστοίχως, ένας κόμβος M με συντεταγμένες x, y παριστά ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής, το οποίο υλοποιεί σε σχέση με ένα αρχικό δονούμενο τμήμα χορδής $L_0(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως δονούμενο τμήμα χορδής αναφοράς, το μουσικό διάστημα

$$L_M(x,y)=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{y}\cdot L_0(0,0)$$

Προφανώς, οποιοδήποτε μουσικό διάστημα εκφράζεται σαν απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων του δικτυωτού, η οποία επαναλαμβανόμενη δίδει **στοίχο** του δικτυωτού.

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο σχηματίζεται από τις δύο παραμέτρους του δικτυωτού ονομάζεται **βρόχος**.

Το δικτυωτό μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται με περιοδική μετατόπιση του βρόχου από τις δύο παραμέτρους του.

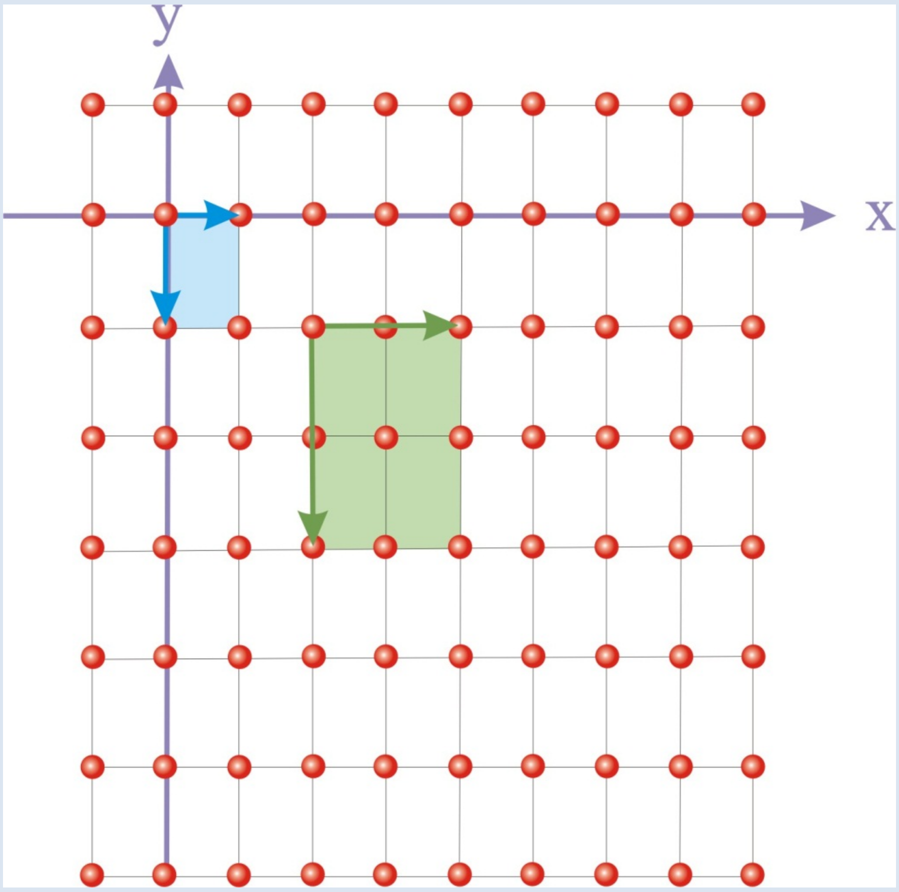
Ένας βρόχος δεν έχει σαφώς καθορισμένη αρχή ή θέση στο δικτυωτό, εκτός εάν επιβάλλεται από ένα πρόβλημα ο καθορισμός της αρχής και της θέσεώς του.

Ένας βρόχος ονομάζεται απλός, διπλός, τριπλός και γενικώς πολλαπλός, αναλόγως του εάν περιέχει 1, 2, 3, ..., πολλούς ισοδυνάμους από μετατόπιση κόμβους (Σχήμα 3.4).

Προφανώς, οι τέσσερις κόμβοι στις κορυφές ενός βρόχου πρέπει να θεωρούνται ως ένας, διότι ο καθένας τους ανήκει κατά το ¼ στον εν λόγω βρόχο, αφού συμμετέχει στον σχηματισμό τεσσάρων γειτονικών βρόχων.

Οι δύο παράμετροι του δικτυωτού, που ορίζουν απλό βρόχο, ονομάζονται συζυγείς.

Όλοι οι απλοί βρόχοι, οι οποίοι ορίζονται από διαφόρους συζυγείς παραμέτρους ενός δικτυωτού, έχουν το ίδιο εμβαδόν. Πολλαπλός βρόχος με n κόμβους μέσα του έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν (n+1) απλών βρόχων.



Σχήμα 3.4: Απλός και σύνθετος βρόχος σε δικτυωτό.

Επί δικτυωτού, στο οποίο έχει καθορισθεί ο κόμβος αναφοράς Ο(0,0), δίδεται ένας ακόμη κόμβος M_1 με συντεταγμένες (x, y) $x, y \in N$.

Τούτο, κατά τα γνωστά, σημαίνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα OM_1 επί του δικτυωτού αντιπροσωπεύει το Πυθαγόρειο μουσικό διάστημα, το οποίο δομείται από x επίτριτα και y ημιόλια μουσικά διαστήματα.

Έστω ότι επί του ιδίου δικτυωτού μας δίδονται οι κόμβοι M_2, M_3, ..., M_n με συντεταγμένες $(2x,2y)$, $(3x,3y)$ και (nx, ny) $n \in N$, αντιστοίχως. Η κοινή ευθεία ή διεύθυνση επί της οποίας κείνται αυτοί οι κόμβοι λέμε ότι ορίζει τη θέση ενός **στοίχου** του δικτυωτού. Η δυάδα $x, y,$ αποτελεί τους **δείκτες** του στοίχου, οι οποίοι τιθέμενοι εντός αγκυλών $[x, y]$ συμβολίζουν τον εν λόγω στοίχο. Επειδή οι δείκτες $[x, y]$, $[2x, 2y]$, $[3x, 3y]$, ..., $[nx, ny]$ ορίζουν, προφανώς, τον ίδιο στοίχο, συνηθίζεται να συμβολίζεται η διεύθυνση ενός στοίχου με δείκτες χωρίς κοινό παράγοντα.

Το σύνολο όλων των παραλλήλων στοίχων του δικτυωτού ως προς τον στοίχο $[x, y]$ το συμβολίζουμε με τους ίδιους δείκτες, αλλά εντός διπλών αγκυλών $[[x, y]]$.

Αφού στο δικτυωτό όλοι οι κόμβοι ορίζονται με συντεταγμένες ακεραίους αριθμούς, έπεται ότι μέσα στον οιονδήποτε απλό βρόχο του δικτυωτού δεν υπάρχει κανείς κόμβος, διότι τότε ο κόμβος αυτός αφενός μεν θα ορίζετο με μη ακεραίους συντεταγμένες, αφετέρου δε ο βρόχος θα έπαυε να είναι απλός και θα καθίστατο πολλαπλός.

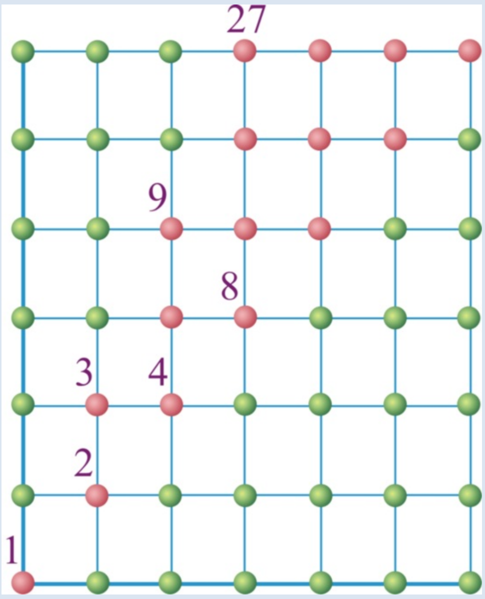
Όπως έχει ήδη λεχθεί, έκαστος των κόμβων επί ενός αντιστρόφου δικτυωτού ορίζει ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής επί του άνευ δεσμών βραχίονος του συμπαντικού μονοχόρδου.

Λόγω της Ευκλειδείου μεθόδου της ανταναιρέσεως ή της ανθυφαιρέσεως εκ του συνόλου των κόμβων του αντιστρόφου δικτυωτού φυσική σημασία έχουν μόνον οι κόμβοι, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δονούμενα τμήματα χορδής με μήκη εκφραζόμενα δι' ακεραίων αριθμών.

Η μικρότερη αριθμητική τιμή αποδεκτού κόμβου είναι αυτή της μονάδος και εκφράζει το μήκος της «ανθυφαιρετικής» μονάδος, η οποία δια τούτο είναι και αδιαίρετη.
«τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον» κατά την 3η μαθηματική πρόταση της πραγματείας Ευκλείδου κατατομή κανόνος. Βλέπε Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα, σ. 58.

Επειδή στην αρχαία ελληνική μουσική τα διαστήματα εξεφράζοντο ως λόγοι μηκών ταλαντουμένων τμημάτων χορδής, όπως συμβαίνει επί του αντιστρόφου δικτυωτου, γι' αυτόν τον λόγο η όλη μελέτη της αρχαιοελληνικής μουσικής πραγματοποιείται επί του αντιστρόφου δικτυωτού.

Έχω αποδείξει στα δύο προμνημονευθέντα συγγράμματά μου ότι ένα αντίστροφο δικτυωτό αποτελεί αυτό που ο Πλάτων ονομάζει **ΚΟΣΜΟΝ** εις τον Τίμαιό του και το τμήμα του Κόσμου, που περιλαμβάνει τους κόμβους που αντιστοιχούν σε δονούμενα τμήματα χορδής με μήκη εκφραζόμενα δι' ακεραίων αριθμών, ονομάζεται **Ψυχή του Κόσμου** (Σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.5: Ο καθορισμός των ορίων της Ψυχής του Κόσμου με τους όρους της μεγίστης τετρακτύος του Πλάτωνος [«μουσικό χωρίο (35a1-36b6)» του διαλόγου *του Τίμαιος]*.

Ο ασχολούμενος με την επίλυση του Πλατωνικού προβλήματος επί του ***αντιστρόφου δικτυωτού*** ευρίσκεσαι αντιμέτωπος με ένα θαυμάσιο ***πρόβλημα της θεωρίας αριθμών***, το οποίο είναι εξ ίσου διαχρονικό μ’ ένα αληθινό έργο τέχνης, και αισθάνεται την ανάγκη να αναφωνήσει: «*Αυτά δεν είναι Μαθηματικά. Αυτά είναι Θεολογία!*».

4. ΜΟΥΣΙΚΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Για πρώτη φορά το έτος 2004 στο σύγγραμμά μου με τον τίτλο *Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ*, σύμφωνα με τη γραμμική Αριστοξένειο θέαση του μουσικού διαστήματος, αντιμετώπισα το μουσικό διάστημα ως ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (α, β) και καθόρισα την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων με βάση τα μη ηχούντα τμήματα χορδής.

Το επόμενο έτος, 2005, στο σύγγραμμά μου με τον τίτλο *ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗ* καθιέρωσα για πρώτη φορά τα ευθέα και τα αντίστροφα δικτυωτά, τα οποία με οδήγησαν στην ανακάλυψη του *Μουσικού Διανυσματικού Λογισμού*, τον οποίο και χρησιμοποιώ για τη θεωρητική αντιμετώπιση μουσικών προβλημάτων, που αφορούν στα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα.

Περί του *Μουσικού Διανυσματικού Λογισμού*, ο οποίος προσομοιάζει προς αυτόν, που όλοι ως Φυσικοί γνωρίζουμε, με προπαιδεία τα όσα μέχρι στιγμής σας ανέπτυξα, θα σας ομιλήσω εν γενικαίς γραμμαίς.

4.1 Ορισμοί

Μουσικό διάνυσμα λέγεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB από έναν κόμβο A σε έναν κόμβο B ενός άξονα (στοίχου) δικτυωτού. Ο κόμβος A θεωρείται αρχή και ο κόμβος B θεωρείται τέλος του μουσικού διανύσματος.

Συμβολικά το μουσικό διάνυσμα AB γράφεται $\overline{AB}$.

Επίσης, ένα μουσικό διάνυσμα το συμβολίζουμε με ένα πεζό γράμμα λ.χ. $\overline{AB} = \overline{a}$.

Τα μουσικά διανύσματα θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη των μουσικών διαστημάτων στο δομικό Πυθαγόρειο μουσικό σύστημα.

4.1.1 Στοιχεία μουσικού διανύσματος

Φορέας του μουσικού διανύσματος ονομάζεται ο άξονας (στοίχος) επάνω στον οποίον βρίσκεται το μουσικό διάνυσμα.

Διεύθυνση του μουσικού διανύσματος ονομάζεται η διεύθυνση, την οποία ορίζει ο φορέας του.

Φορά του μουσικού διανύσματος $\overline{AB}$ είναι η φορά από τον κόμβο (αρχής) Α προς τον κόμβο (πέρατος) Β.

Μέτρο $\left|\overline{AB}\right|$ του μουσικού διανύσματος $\overline{AB}$ ονομάζεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Το μέτρο ενός μουσικού διανύσματος βρίσκεται ως εξής:

Περίπτωση 1η

Έστω το μουσικό διάνυσμα από τον κόμβο Ο(0,0) (την αρχή των ορθογωνίων συντεταγμένων xOy) σε έναν κόμβο Α(x,y) του δικτυωτού. Το μέτρο (= η απόσταση των άκρων Ο και Α) αυτού του μουσικού διανύσματος θα δίδεται από τη σχέση: $\left|\overline{OA}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y$.

Περίπτωση 2η

Έστω το μουσικό διάνυσμα από τον κόμβο $A(x_1, y_1)$ σε έναν κόμβο $B(x_2, y_2)$ του δικτυωτού. Το μέτρο (= η απόσταση των άκρων Α και Β) αυτού του μουσικού διανύσματος θα δίδεται από τη σχέση: $\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(x_2 - x_1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(y_2 - y_1)}$

Κάθε μουσικό διάνυσμα με αρχή έναν κόμβο του δικτυωτού και πέρας έναν άλλον κόμβο του ιδίου δικτυωτού παριστάνει ένα μουσικό διάστημα μεταξύ είτε των μουσικών υψών, είτε μεταξύ των μηκών των ταλαντουμένων μηκών χορδής, τα οποία αντιστοιχούν στους κόμβους αρχής και πέρατος αυτού.

Το μέτρο αυτού του μουσικού διανύσματος θα δίνει την αριθμητική σχέση, η οποία εκφράζει το μέγεθος του αντιστοίχου μουσικού διαστήματος.

4.1.2 Είδη μουσικών διανυσμάτων

<u>Ελεύθερα</u> ονομάζονται δύο μουσικά διανύσματα, τα οποία έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά. Αυτά σημαίνουν ότι οι φορείς (στοίχοι) των ελευθέρων μουσικών διαστημάτων είναι μεταξύ τους παράλληλοι [[x,y]].

<u>Ολισθαίνοντα</u> ονομάζονται δύο μουσικά διανύσματα, τα οποία έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και επί πλέον κείνται επάνω στον ίδιο φορέα [x,y].

<u>Εφαρμοστά</u> ονομάζονται δύο μουσικά διανύσματα, τα οποία έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά και επί πλέον το ίδιο σημείο εφαρμογής (=την ίδια αρχή).

<u>Ουδέτερο μουσικό διάνυσμα</u> $\overline{o}$: Το μουσικό διάνυσμα από έναν οποιονδήποτε κόμβο Α(x,y) του δικτυωτού προς τον ίδιο κόμβο Α(x,y) έχει διεύθυνση και φορά απροσδιόριστες, μέτρο δε που δίδεται από τη σχέση:

$\left|\overline{o}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{y-y} = \left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0$. Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται ουδέτερο μουσικό διάνυσμα.

<u>Μοναδιαίο μουσικό διάνυσμα</u> $\overline{x_0}$ (1,0) ή $\overline{y_0}$ (0,1) λέγεται το διάνυσμα του άξονα x ή y, αντιστοίχως, που έχει θετική φορά και μέτρο ίσο προς $\left(\frac{4}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0$ ή $\left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1$, αντιστοίχως.

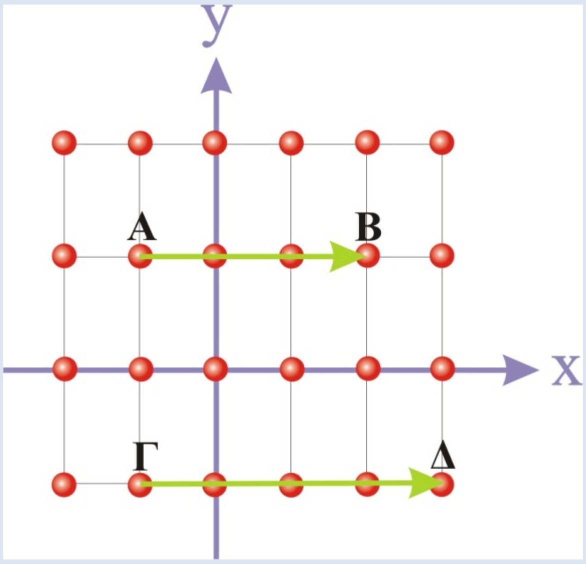
Οι ορθογώνιοι άξονες xOy στα δικτυωτά είναι *κβαντισμένοι*. Δηλαδή επάνω τους δεν μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε μήκος, αλλά το μήκος είτε επάνω στον άξονα x'Ox, είτε επάνω στον άξονα y'Oy είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μέτρου του αντιστοίχου μοναδιαίου μουσικού διανύσματος, δηλαδή:

$$x = \kappa\left|\overline{x_0}\right|,\ y = \lambda\left|\overline{y_0}\right| \quad \kappa, \lambda \in N .$$

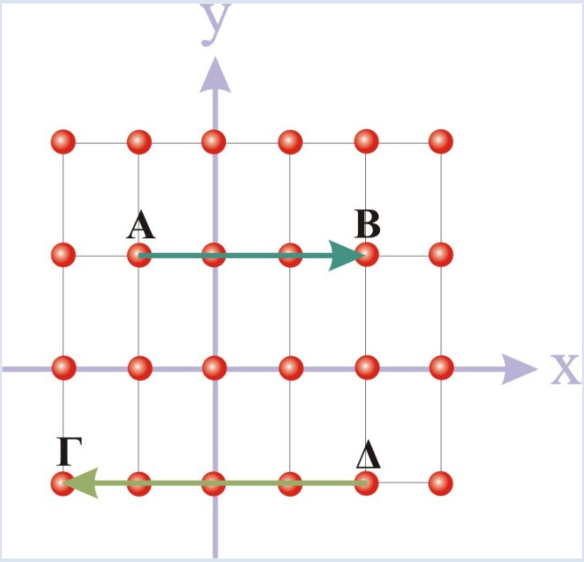
Με τα ανωτέρω καθίσταται αντιληπτό ότι στο κβαντισμένο αυτό ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy σχηματίζεται ένα δικτύωμα του οποίου τα κομβικά σημεία έχουν συντεταγμένες $x = \kappa\left|\overline{x_0}\right|$, $y = \lambda\left|\overline{y_0}\right|$ $\kappa, \lambda \in N$.

Δύο ή περισσότερα μουσικά διανύσματα λέγονται συγγραμμικά, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση [x,y].

Δύο συγγραμμικά μουσικά διανύσματα, εάν έχουν ίδια φορά, λέγονται ομόρροπα (Σχήμα 4.1), εάν έχουν αντίθετη φορά, λέγονται αντίρροπα (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.1: Ομόρροπα μουσικά διανύσματα.



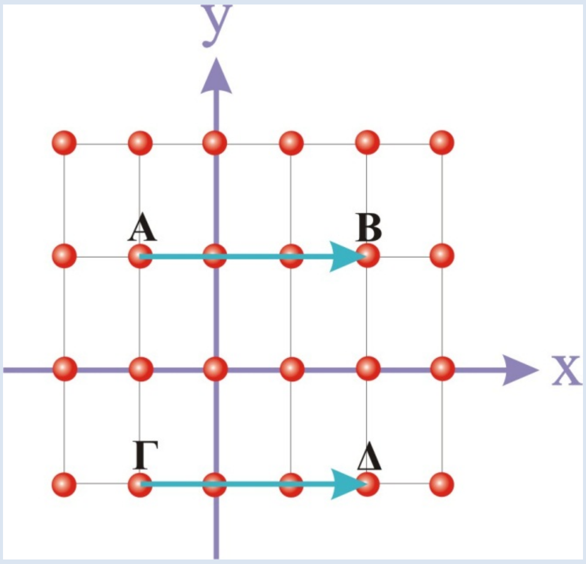
Σχήμα 4.2: Αντίρροπα μουσικά διανύσματα.

Παρατήρηση

Δεν μπορούμε να ομιλούμε για ομόρροπα ή αντίρροπα μουσικά διανύσματα, εάν αυτά δεν είναι συγγραμμικά.

Δύο μουσικά διανύσματα λέγονται ίσα «δυνάμει» (Σχήμα 4.3), όταν είναι είτε ελεύθερα, είτε είναι ολισθαίνονται. Αυτά σημαίνουν ότι τα μουσικά διαστήματα είναι ομόρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο χωρίς να αποτελεί κώλυμμα η περιοχή είτε των μουσικών τους υψών, είτε των μηκών των ταλαντουμένων τμημάτων χορδής. Επί παραδείγματι, στο

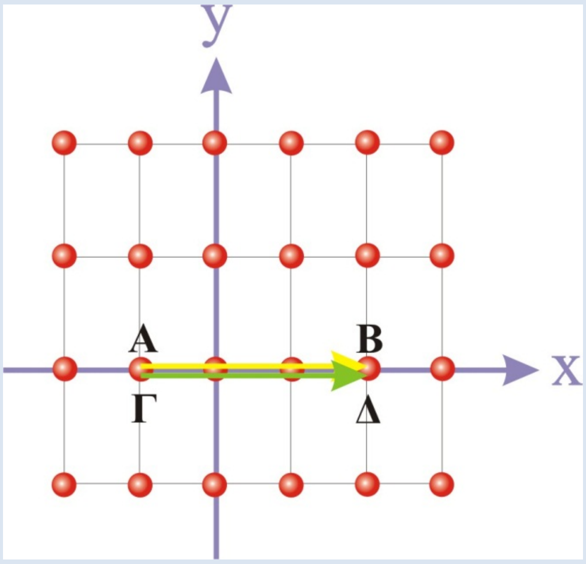
τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων υπάρχουν πέντε διαστήματα διατεσσάρων (τετράχορδα), που είναι ίσα μεταξύ τους, αλλά το καθένα τους αναφέρεται σε διαφορετική περιοχή μουσικών υψών λ.χ. τετράχορδο υπατών, τετράχορδο μέσων, τετράχορδο συνημμένων, τετράχορδο διεζευγμένων, τετράχορδο υπερβολαίων.



Σχήμα 4.3: Ίσα «δυνάμει» μουσικά διανύσματα.

Δύο μουσικά διανύσματα λέγονται ίσα «ενεργεία» (Σχήμα 4.4), όταν είναι εφαρμοστά. Αυτό σημαίνει ότι τα μουσικά διαστήματα είναι ομόρροπα και έχουν την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας. Δηλαδή κατά την εκτέλεσή τους το άκουσμά τους είναι απολύτως το ίδιο.

Επί παραδείγματι, στο τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων το μουσικό διάστημα από την υπάτη μέσων μέχρι τη μέση είναι ίσο με το τετράχορδο μέσων.



Σχήμα 4.4: Ίσα «ενεργεία» μουσικά διανύσματα

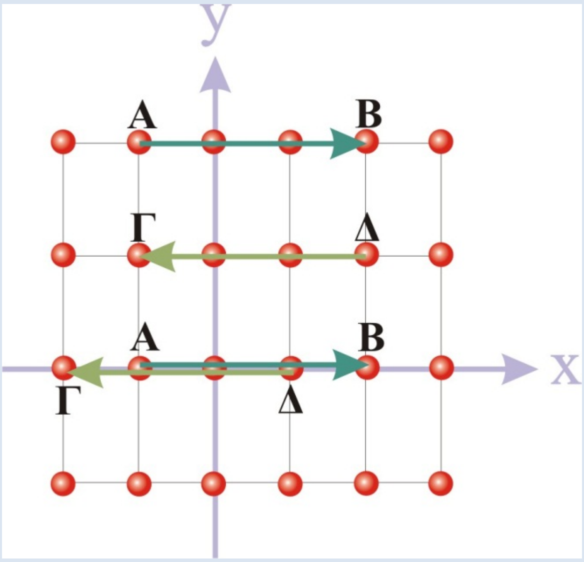
Δύο μουσικά διανύσματα λέγονται αντίθετα «δυνάμει» (Σχήμα 4.5), όταν

είτε έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά (οι φορείς τους είναι διαφορετικοί και μεταξύ τους παράλληλοι [[x,y]]),

είτε έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και επί πλέον κείνται επάνω στον ίδιο φορέα [x,y].

Αυτά σημαίνουν ότι τα μουσικά διαστήματα είναι αντίρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο χωρίς να αποτελεί κώλυμμα η περιοχή είτε των μουσικών τους υψών, είτε των μηκών των ταλαντουμένων τμημάτων χορδής.

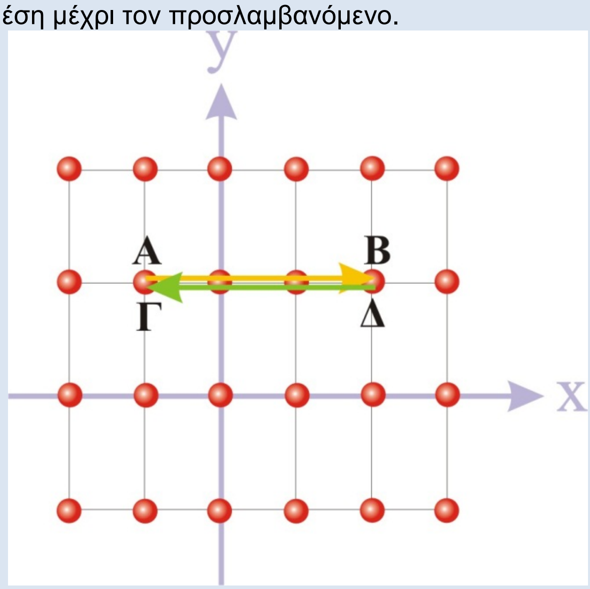
Επί παραδείγματι, στο τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων το μουσικό διάστημα από την υπάτη υπατών μέχρι τη νήτη υπατών (=υπάτη μέσων) είναι αντίθετο «δυνάμει» με το μουσικό διάστημα από τη νήτη υπερβολαίων μέχρι την υπάτη υπερβολαίων (=νήτη διεζευγμένων). Πράγματι, το καθένα από τα δύο αυτά μουσικά διαστήματα είναι ένα δια τεσσάρων, μόνον που το πρώτο είναι ανιόν και το δεύτερο κατιόν.



Σχήμα 4.5: Αντίθετα «δυνάμει» μουσικά διανύσματα.

Δύο μουσικά διανύσματα λέγονται <u>αντίθετα «ενεργεία»</u> (Σχήμα 4.6), όταν έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση [x,y], αντίθετη φορά καθώς επίσης η αρχή και το πέρας του πρώτου είναι πέρας και αρχή, αντίστοιχα, του δευτέρου.

Επί παραδείγματι, στο τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων το μουσικό διάστημα από τον προσλαμβανόμενο μέχρι τη μέση είναι αντίθετο «ενεργεία» του μουσικού διαστήματος από τη μέση μέχρι τον προσλαμβανόμενο.



Σχήμα 4.6: Αντίθετα «ενεργεία» μουσικά διανύσματα.

Διαδοχικά μουσικά διανύσματα

Δύο ή περισσότερα μουσικά διανύσματα καλούνται *διαδοχικά*, όταν η αρχή εκάστου είναι πέρας του προηγουμένου του.

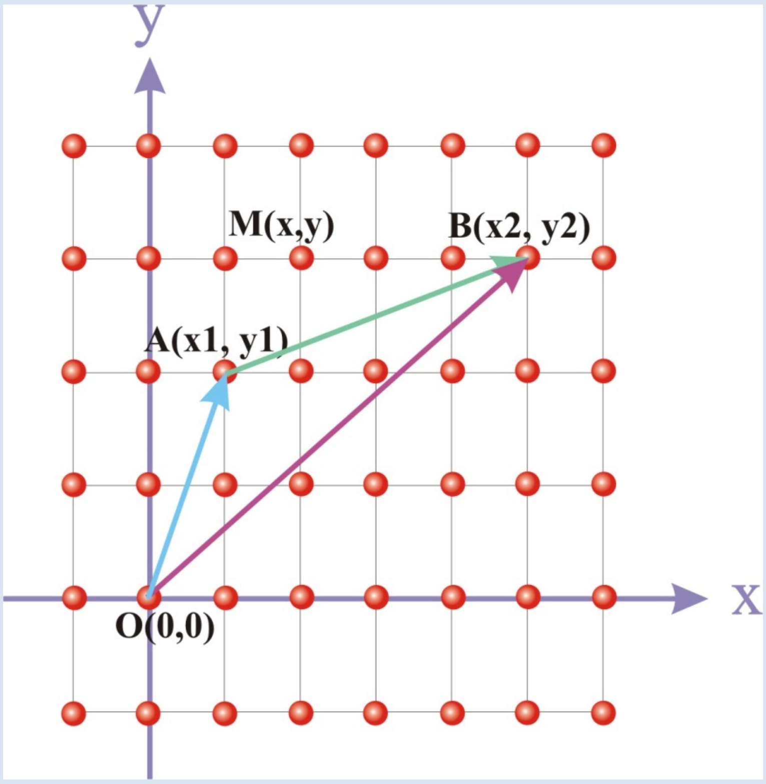
4.2 Πράξεις με μουσικά διανύσματα

4.2.1 Πρόσθεση μουσικών διανυσμάτων

Διακρίνουμε την πρόσθεση «ενεργεία» και την πρόσθεση «δυνάμει» των μουσικών διανυσμάτων.

Η πρόσθεση «ενεργεία» αναφέρεται πάντοτε σε διαδοχικά μουσικά διανύσματα και είναι υλοποιήσιμη μουσικώς, δηλαδή εκτελείται στην πράξη επί συγκεκριμένων μουσικών διαστημάτων. Αυτό με ένα μουσικό παράδειγμα σημαίνει το εξής: ξεκίνησα από ένα συγκεκριμένο μουσικό ύψος και έπαιξα ένα ανιόν διάστημα διατεσσάρων και στη συνέχεια έπαιξα ένα ανιόν διάστημα διαπέντε. Άρα έπαιξα συνολικά ένα ανιόν διάστημα διαπασών και βρέθηκα σε διπλάσιο μουσικό ύψος του αρχικού.

Δοθέντων, λοιπόν, δύο τουλάχιστον διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων, καλούμε άθροισμα αυτών το μουσικό διάνυσμα το οποίο έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου . Δηλαδή $\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}$ κατά το Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Πρόσθεση «ενεργεία» δύο διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων.

Η πρόσθεση «δυνάμει» αναφέρεται πάντοτε σε μη διαδοχικά μουσικά διανύσματα, δεν έχει υλοποιήσιμο χαρακτήρα παρά έχει ένα χαρακτήρα αφορισμού.

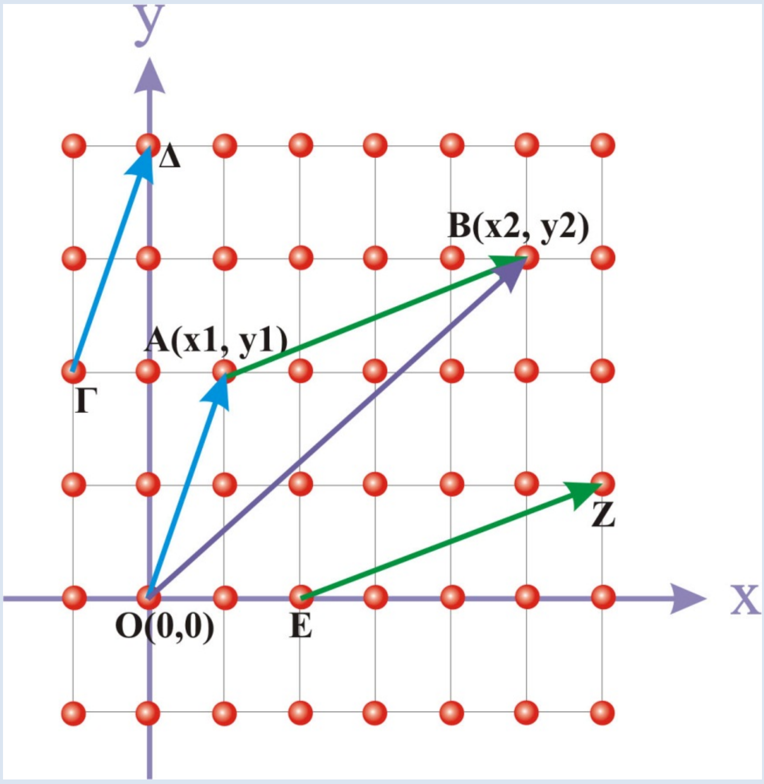
Αυτό με ένα μουσικό παράδειγμα σημαίνει το εξής: Κάθε φορά που προσθέτουμε λ.χ. έναν επόγδοο τόνο σε ένα οποιοδήποτε διατεσσάρων διάστημα, προκύπτει ένα διαπέντε διάστημα. Αυτό είναι ένας αφορισμός, μία λογική πρόταση αληθής, που ισχύει για όλα τα μουσικά διαστήματα, χωρίς, όμως, να αναφέρεται σε κάποια συγκεκριμένα.

Επειδή ωρισμένες φορές δεν είναι τόσο οφθαλμοφανές το αποτέλεσμα της προσθέσεως «δυνάμει», ενεργούμε ωσάν να εκτελούμε πρόσθεση «ενεργεία», εκκινούντες από ένα αυθαιρέτως επιλεγμένο μουσικό ύψος και καθιστώντες τα δοθέντα μουσικά διανύσματα διαδοχικά.

Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις προσθέσεως «δυνάμει» μουσικών διανυσμάτων:

1η Περίπτωση

Έστω ότι έχουμε τα μη διαδοχικά μουσικά διανύσματα $\overline{\Gamma\Delta}$ και $\overline{\mathrm{EZ}}$ (Σχήμα 4.8). Θα έχουμε $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$, όπου $\overline{OA}$ παράλληλο, ομόρροπο και ίσο με το $\overline{\Gamma\Delta}$ (αντιμετωπίζεται ως ελεύθερο μουσικό διάνυσμα) και $\overline{AB}$ παράλληλο, ομόρροπο και ίσο με το $\overline{\mathrm{EZ}}$ (αντιμετωπίζεται ως ελεύθερο μουσικό διάνυσμα).

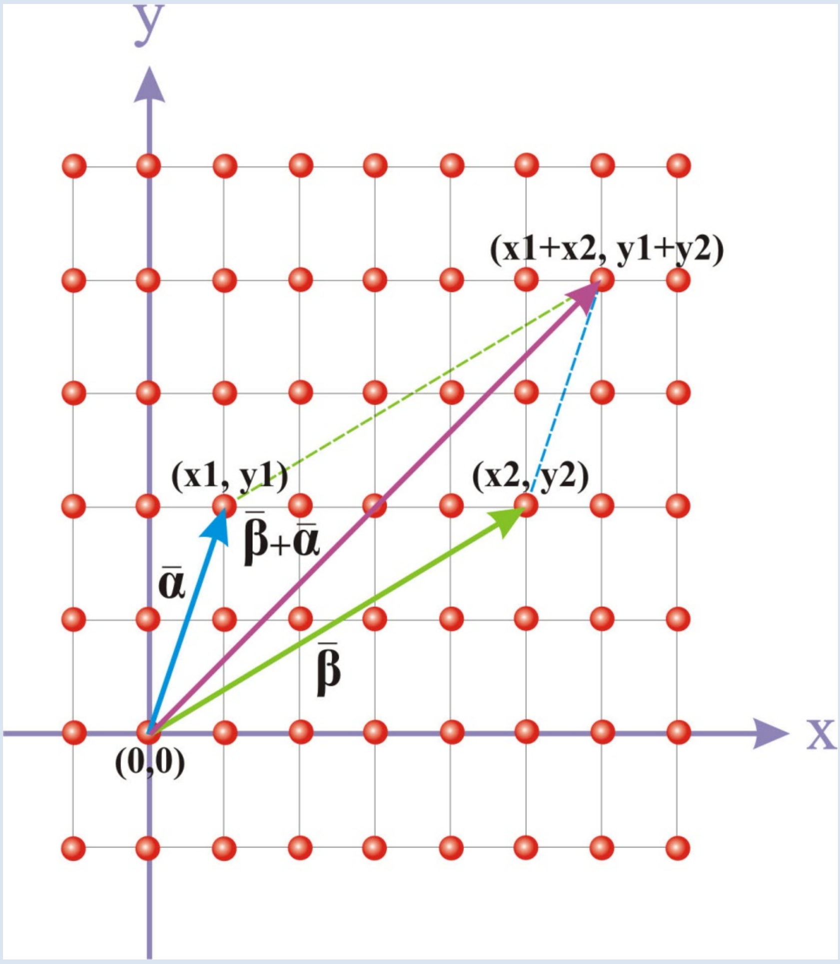


Σχήμα 4.8: Πρόσθεση «δυνάμει» δύο μη διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων.

2η Περίπτωση

Έστω ότι έχουμε να προσθέσουμε δύο μουσικά διανύσματα, τα οποία έχουν κοινή αρχή (Σχήμα 4.9). Άθροισμα αυτών των δύο μουσικών διανυσμάτων είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου[2] που κατασκευάζεται με πλευρές τα δοθέντα δύο μουσικά διανύσματα και η οποία (διαγώνιος) έχει ως αρχή την κοινή αρχή O(0,0) αυτών.

[2] Η μέθοδος του παραλληλογράμμου αποτελεί μια διαδικασία με την οποία καθιστούμε τα δύο μουσικά διανύσματα διαδοχικά, εάν σκεφθεί κανείς ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι παράλληλες και ίσες και, διανυσματικώς, παριστούν ανά δύο ίσα μουσικά διανύσματα (αντιμετωπιζόμενα ως ελεύθερα μουσικά διανύσματα).



Σχήμα 4.9: Πρόσθεση «δυνάμει» δύο μουσικών διανυσμάτων που έχουν κοινή αρχή.

Εάν περισσότερα από δύο μουσικά διανύσματα έχουν κοινή αρχή, το άθροισμά τους βρίσκεται ως εξής: Βρίσκουμε το άθροισμα δύο εξ αυτών, κατόπιν το άθροισμα του αθροίσματος των δύο προηγουμένων με το τρίτο κ.ο.κ. Η περίπτωση αυτή είναι μουσικώς μη υλοποιήσιμη.

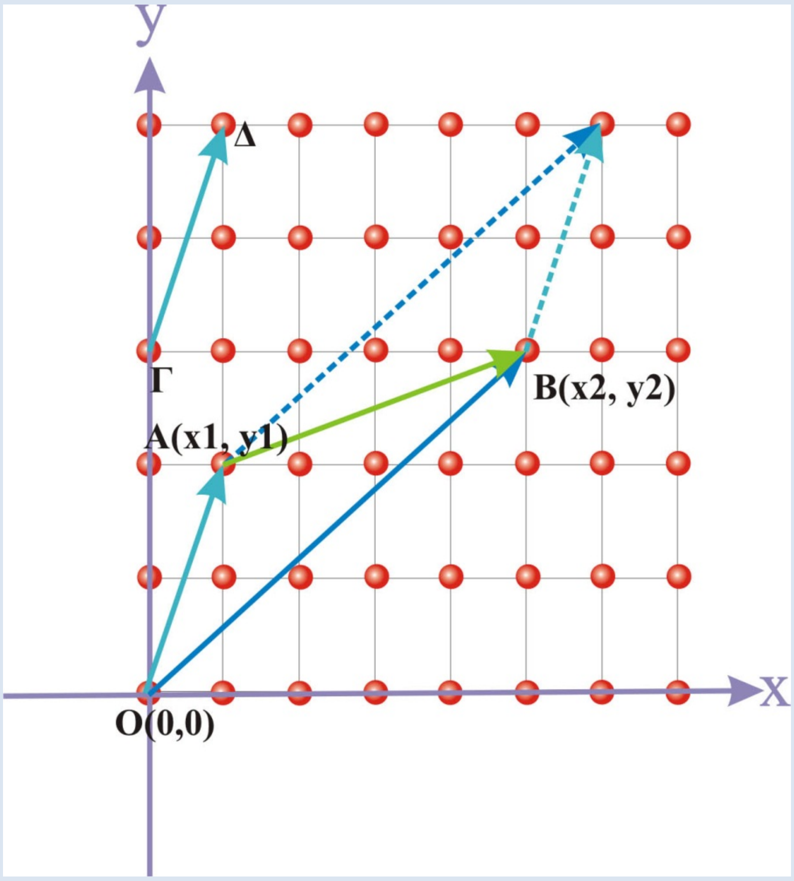
4.2.2 Αφαίρεση δύο μουσικών διανυσμάτων

Διακρίνουμε την αφαίρεση «ενεργεία» και την αφαίρεση «δυνάμει» των μουσικών διανυσμάτων.

Η αφαίρεση «ενεργεία» αναφέρεται πάντοτε σε διαδοχικά μουσικά διανύσματα και είναι μουσικώς υλοποιήσιμη, ενώ η αφαίρεση «δυνάμει» αναφέρεται πάντοτε σε μη διαδοχικά μουσικά διανύσματα, είναι μουσικώς μη υλοποιήσιμη και έχει ένα χαρακτήρα αφορισμού.

Για να πραγματοποιήσουμε γραφικά την αφαίρεση «δυνάμει» δύο δοθέντων μουσικών διανυσμάτων, τα αντιμετωπίζουμε ως ελεύθερα μουσικά διανύσματα και τα καθιστούμε κοινής αρχής επί ενός αφθαιρέτως επιλεγμένου κόμβου του δικτυωτού. Τότε διαφορά αυτών είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές τα δύο δοθέντα μουσικά διανύσματα, η οποία ΔΕΝ διέρχεται από τον κοινή τους αρχή και έχει φορά από το πέρας του αφαιρετέου προς το πέρας του μειωτέου (Σχήμα 4.10).

Έστω ότι έχουμε τα δύο μουσικά διανύσματα $\overline{\Gamma\Delta}$ και $\overline{OB}$, τα οποία ούτε διαδοχικά είναι, ούτε έχουν κοινή αρχή. Η διαφορά «δυνάμει» αυτών $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{\Gamma\Delta}$[3] είναι εξ ορισμού ένα μουσικό διάνυσμα το οποίο, εάν προστεθεί στο $\overline{\Gamma\Delta}$, θα μας δώσει το $\overline{OB}$.



Σχήμα 4.10: Αφαίρεση «δυνάμει» δύο μουσικών διανυσμάτων που δεν έχουν κοινή αρχή.

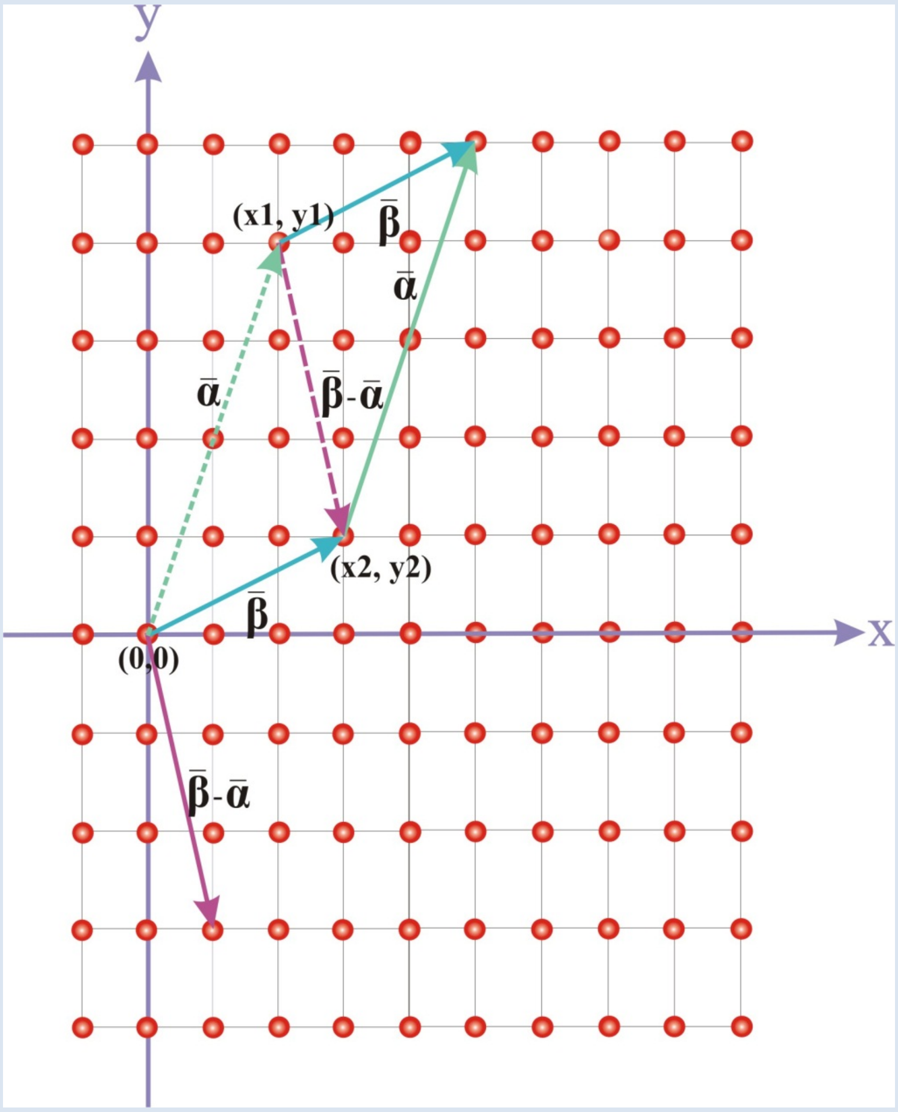
Αφαίρεση «ενεργεία» δύο μουσικών διανυσμάτων. Μπορούμε να εργασθούμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος

Ενεργούμε, όπως στην αφαίρεση «δυνάμει» των δύο μουσικών διανυσμάτων και, όταν βρούμε τη διαφορά, την αντιμετωπίζουμε ως ελεύθερο μουσικό διάνυσμα και λαμβάνουμε ίσο προς αυτήν μουσικό διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου μουσικού διανύσματος (μειωτέου) (Σχήμα 4.11).

---

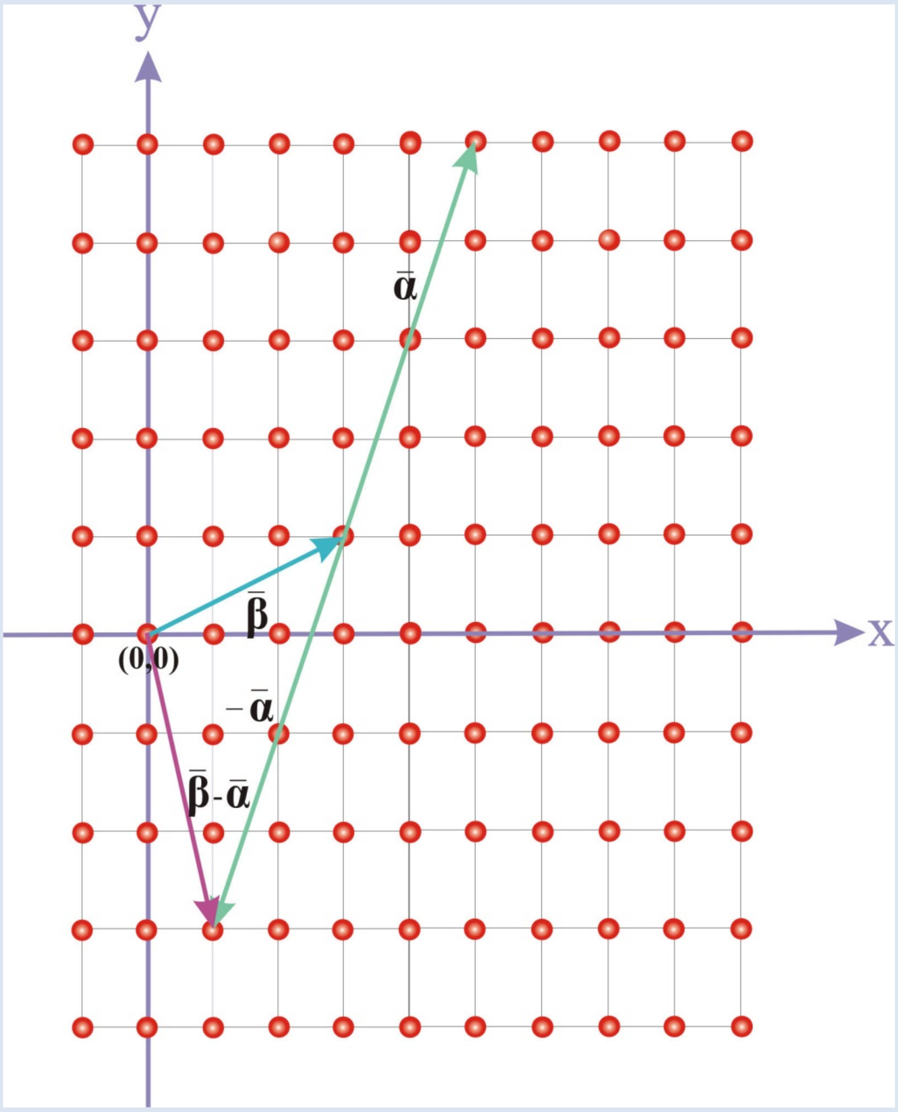
[3] Το διάνυσμα $\overline{AB}$ καλείται διαφορά των δύο διανυσμάτων $\overline{OB}$ και $\overline{\Gamma\Delta}$. Το διάνυσμα $\overline{OB}$ καλείται μειωτέος, διότι θα μειωθεί. Το διάνυσμα $\overline{\Gamma\Delta}$ καλείται αφαιρετέος, διότι θα αφαιρεθεί.



Σχήμα 4.11: Αφαίρεση «ενεργεία» δύο διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων.

2ος τρόπος

Η έκφραση $\overline{\beta}-\overline{\alpha}$ μπορεί να γραφεί ισοδυνάμως ως $\overline{\beta}-\overline{\alpha}=\overline{\beta}+\left(-\overline{\alpha}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι, προκειμένου να αφαιρέσουμε το μουσικό διάνυσμα $\overline{\alpha}$ από το μουσικό διάνυσμα $\overline{\beta}$, προσθέτουμε στο μουσικό διάνυσμα $\overline{\beta}$ το αντίθετο του μουσικού διανύσματος $\overline{\alpha}$, δηλαδή το μουσικό διάνυσμα $-\overline{\alpha}$ (Σχήμα 4.12).



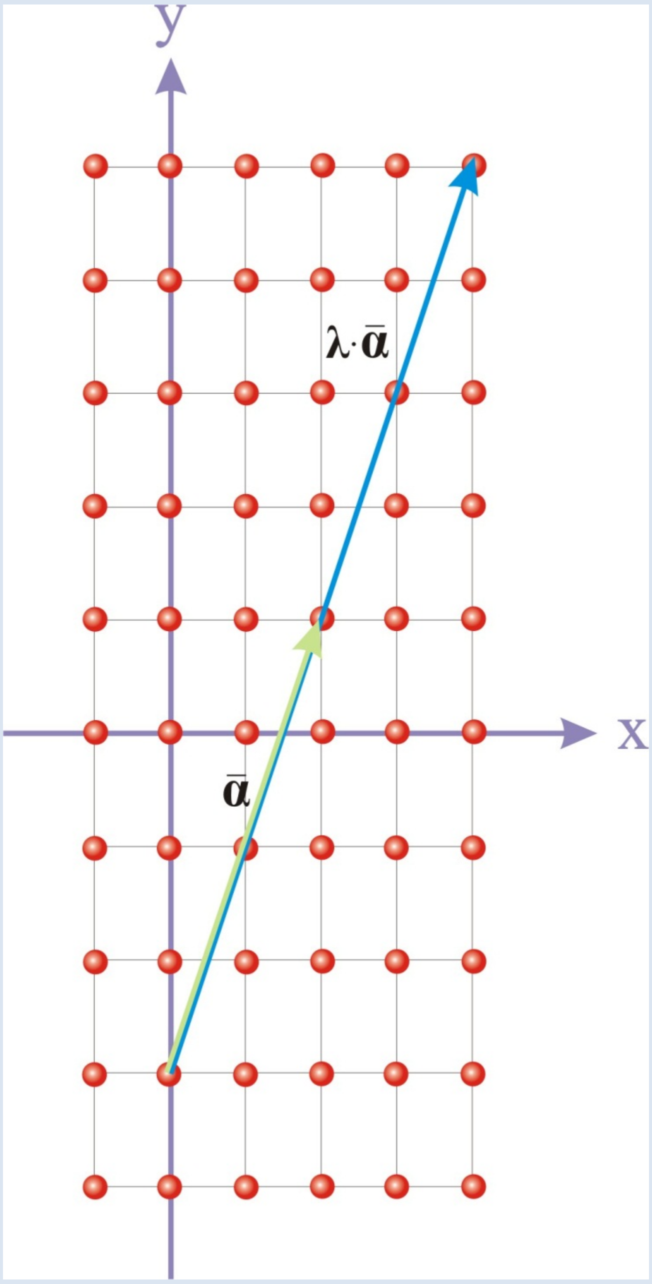
Σχήμα 4.12: Αφαίρεση «ενεργεία» δύο διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων.

4.2.3 Πολλαπλασιασμός μουσικού διανύσματός επί ακέραιο αριθμό (βαθμωτός πολλαπλασιασμός μουσικού διανύσματος)

Έστω το μουσικό διάνυσμα $\overline{AB}$ από τον κόμβο $A(x_1, y_1)$ σε έναν κόμβο $B(x_2, y_2)$ του δικτυωτού (Σχήμα 4.13) και ένας ακέραιος αριθμός λ $(\lambda \in Z)$.

Το διάνυσμα $\lambda \cdot \overline{AB}$

- είναι μουσικό εφ' όσον ξεκινά από κόμβο και καταλήγει σε κόμβο του δικτυωτού,
- είναι ομόρροπο του $\overline{AB}$, εάν λ>0,
- είναι αντίρροπο του $\overline{AB}$, εάν λ<0,
- έχει δε μέτρο ίσο προς $|\lambda| \cdot \left|\overline{AB}\right| = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{|\lambda|\cdot(x_2 - x_1)} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{|\lambda|\cdot(y_2 - y_1)}$.



Σχήμα 4.13: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός μουσικού διανύσματος επί ακέραιο θετικό αριθμό.

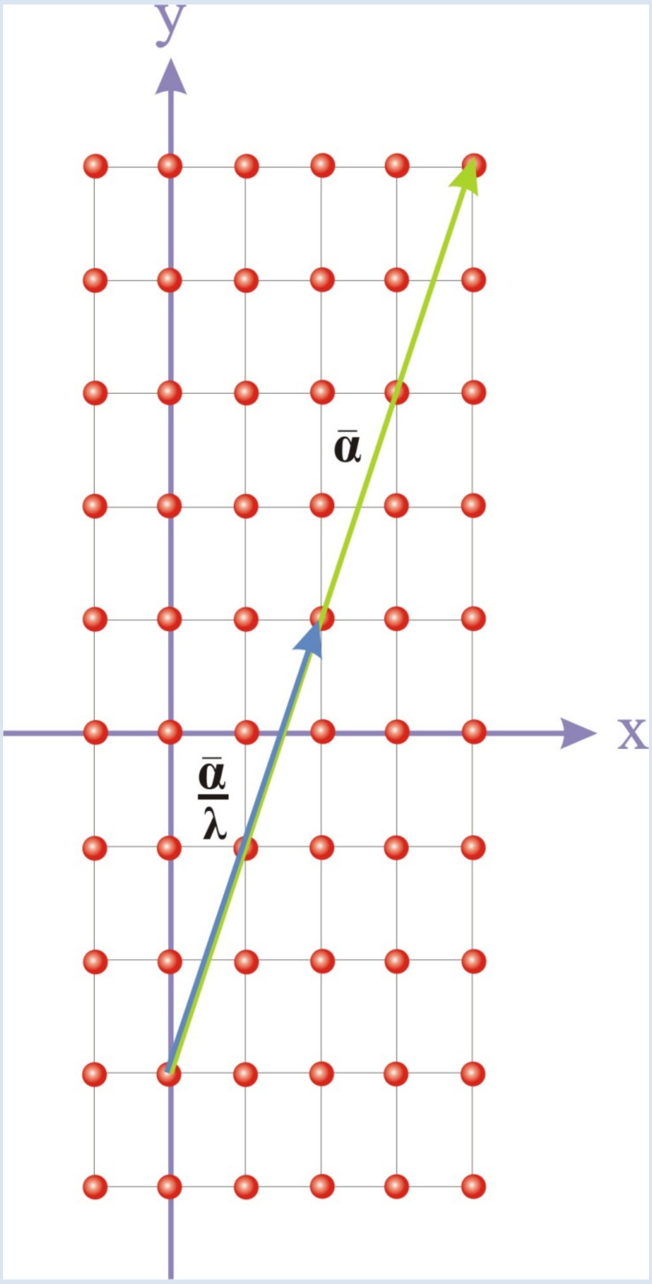
4.2.4 Διαίρεση μουσικού διανύσματος δια ακεραίου αριθμού

Έστω το μουσικό διάνυσμα $\overline{AB}$ από τον κόμβο $A(x_1, y_1)$ σε έναν κόμβο $B(x_2, y_2)$ του δικτυωτού (Σχήμα 4.14) και ένας ακέραιος αριθμός λ $(\lambda \in Z)$.

Το διάνυσμα $\dfrac{\overline{AB}}{\lambda}$

- είναι μουσικό εφ' όσον ξεκινά από κόμβο και καταλήγει σε κόμβο του δικτυωτού,
- είναι ομόρροπο του $\overline{AB}$, εάν λ>0,
- είναι αντίρροπο του $\overline{AB}$, εάν λ<0,

- έχει δε μέτρο ίσο προς $\dfrac{\left|\overline{AB}\right|}{|\lambda|} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{(x_2 - x_1)}{|\lambda|}} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{(y_2 - y_1)}{|\lambda|}}$



Σχήμα 4.14: Διαίρεση μουσικού διανύσματος δια ακεραίου θετικού αριθμού.

4.3. Διαστηματική ανάλυση βρόχου επί του αντιστρόφου δικτυωτού

Όπως έχει ήδη λεχθεί, κάθε κόμβος της Ψυχής Κόσμου επί του αντιστρόφου δικτυωτού εκφράζεται δι' ενός ακεραίου Πυθαγορείου αριθμού $\left(2^x \cdot 3^y \quad x, y \in Z\right)$ και παριστά ένα μήκος χορδής.

Μετακίνηση από κόμβου εις κόμβον του αντιστρόφου δικτυωτού εκφράζει ένα μουσικό διάστημα, το οποίο υπολογίζεται από τον λόγο του αριθμού του κόμβου αφίξεως δια του αριθμού του κόμβου εκκινήσεως $\left(\dfrac{L_{αφίξεως}}{L_{εκκινήσεως}}\right)$.

Μετακίνηση από κόμβο μικρού αριθμού προς κόμβο μεγαλυτέρου αριθμού σημαίνει μετακίνηση από μικρό μήκος δονουμένου τμήματος χορδής προς μεγαλύτερο, δηλαδή εκτέλεση ενός καθοδικού μουσικού διαστήματος.

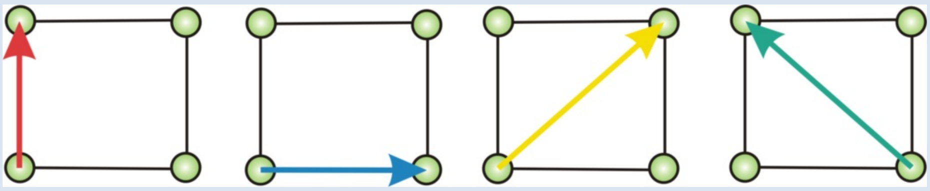
Οι στοιχειώδεις μετακινήσεις μεταξύ των κόμβων του αντιστρόφου δικτυωτού πραγματοποιούνται εντός ενός απλού βρόχου (σχήμα 4.15) είναι οι:

Μετακίνηση κατακορύφως μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων συνεπάγεται εκτέλεση ενός διαπέντε διαστήματος ανιόντος ή κατιόντος, αναλόγως της σχέσεως των αριθμών του κόμβου εκκινήσεως και του κόμβου αφίξεως.

Μετακίνηση οριζοντίως μεταξύ των δύο διαδοχικών κόμβων συνεπάγεται εκτέλεση ενός διατεσσάρων διαστήματος.

Μετακίνηση μεταξύ των διαγωνίων κόμβων (κάτω αριστερά- επάνω δεξιά) συνεπάγεται εκτέλεση ενός διαστήματος διαπασών.

Μετακίνηση μεταξύ των διαγωνίων κόμβων (κάτω δεξιά- επάνω αριστερά) συνεπάγεται εκτέλεση ενός επογδόου διαστήματος.

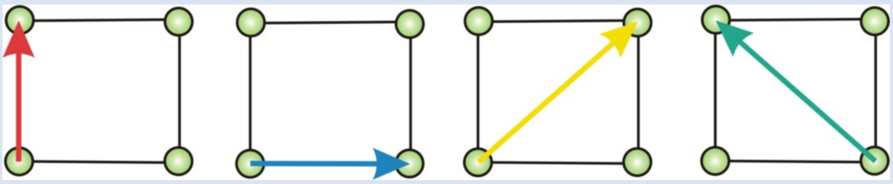


Σχήμα 4.15: Η γραφική παρουσίαση των τεσσάρων δυνατών κινήσεων μεταξύ των κόμβων ενός απλού βρόχου διπλασίων αριθμών.

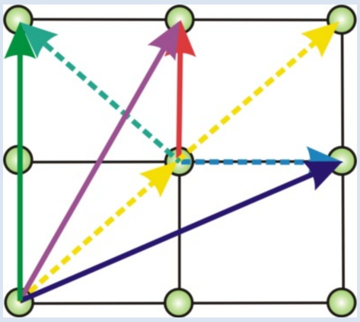
Οι μετακινήσεις μεταξύ κόμβων συνθετοτέρων βρόχων εκφράζουν μουσικά διαστήματα, το μέγεθος των οποίων προκύπτει δια της συνθέσεως ωρισμένων εκ των στοιχειωδών μετακινήσεως εντός του αντιστρόφου δικτυωτού κατά διανυσματικόν τρόπον, όπως θα δειχθεί κατωτέρω.

4.4. Διανυσματική πρόσθεση πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων

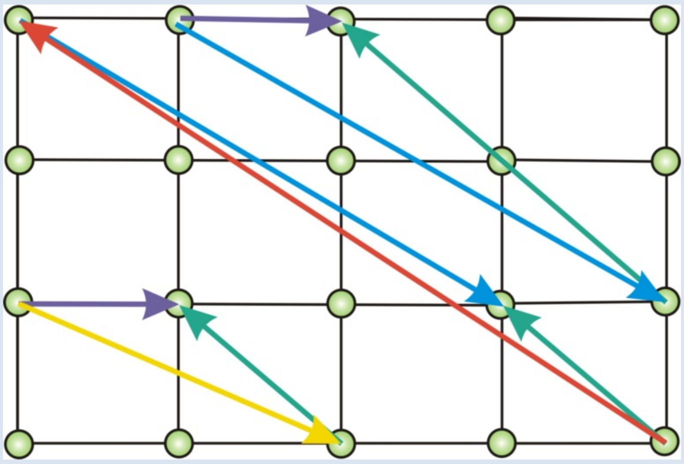
1. Τα μουσικά διαστήματα που αναφέρονται από τον Ιάμβλιχο στο πυθαγόρειο πείραμα στο χαλκοτυπείον.



2. Διαπασών συν έκαστον εκ των μουσικών διαστημάτων που αναφέρονται από τον Ιάμβλιχο στο πυθαγόρειο πείραμα στο χαλκοτυπείον.



3. Τα μουσικά διαστήματα διατονικόν τριημίτονον, αποτομή μείζονος τόνου, λείμμα.



$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$
$$y_1 = 1 \quad y_2 = 0$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(2-0)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(2-0)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{32}{27}$$

ΔΙΑΤΟΝΙΚΟ ΤΡΙΗΜΙΤΟΝΟ (ΚΙΤΡΙΝΟ)

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 0$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 3$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(0-4)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(3-0)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}$$

ΑΠΟΤΟΜΗ ΜΕΙΖΟΝΟΣ ΤΟΝΟΥ (ΚΟΚΚΙΝΟ)

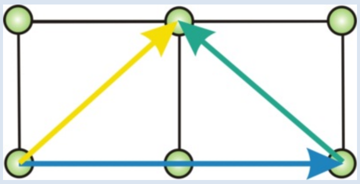
$x_1 = 1 \quad x_2 = 4$

$y_1 = 3 \quad y_2 = 1$

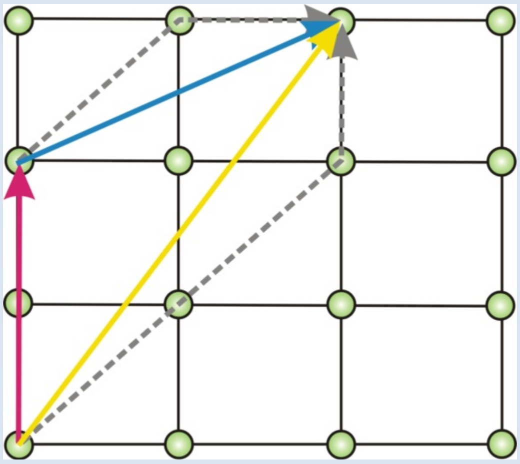
$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(4-1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(1-3)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

ΛΕΙΜΜΑ (ΜΠΛΕ)

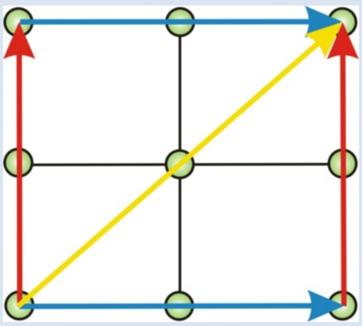
4. Του δις διατεσσάρων προστιθεμένου εις τον μείζονα τόνον (επόγδοον), γεννάται το διαπασών.



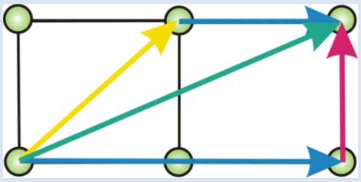
5. Του δις διαπέντε προστιθεμένου εις το διαπασών και διατεσσάρων, γεννάται το δις διαπασών και διαπέντε.



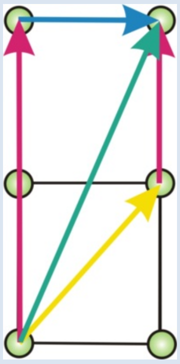
6. Του δις διαπέντε προστιθεμένου εις το δις διατεσσάρων, γεννάται το δις διαπασών και του δις διατεσσάρων προστιθεμένου εις το δις διαπέντε, γεννάται το δις διαπασών.



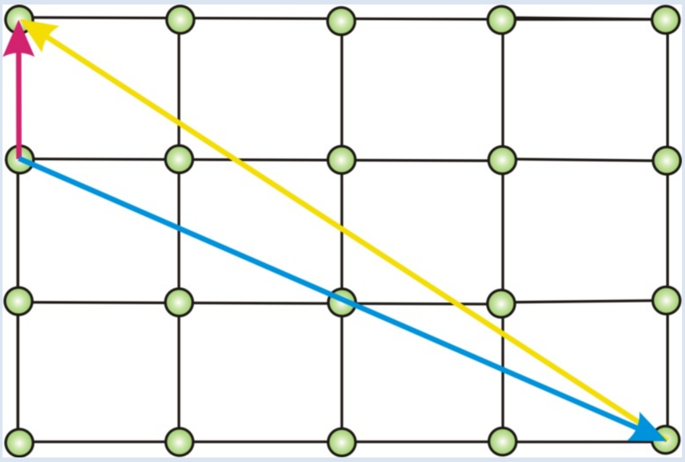
7. Του δις διατεσσάρων προστιθεμένου εις το διαπέντε, γεννάται το διαπασών και διατεσσάρων.



8. Του δις διαπέντε προστιθεμένου εις το διατεσσάρων, γεννάται το διαπασών και διαπέντε.



9. Του δις διατονικού τριημιτόνου προστιθεμένου εις το χρωματικόν ημίτονον ή αποτομήν μείζονος τόνου, γεννάται το διαπέντε.



$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

$y_1 = 2 \quad y_2 = 0$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(4-0)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(0-2)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{2^{10}}{3^{6}} = \frac{1024}{729} = \left(\frac{32}{27}\right)^{2}$$

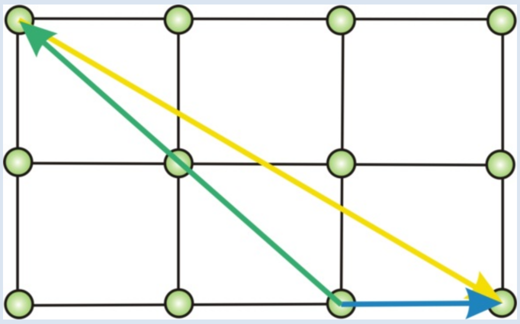
ΔΙΣ ΔΙΑΤΟΝΙΚΟ ΤΡΙΗΜΙΤΟΝΟ (ΜΠΛΕ)

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 0$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 3$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(0-4)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(3-0)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}$$

ΑΠΟΤΟΜΗ ΜΕΙΖΟΝΟΣ ΤΟΝΟΥ (ΚΙΤΡΙΝΟ)

10. Του πυθαγορείου διτόνου προστιθεμένου εις το διατονικόν ημίτονον ή λείμμα, γεννάται το διατεσσάρων.



$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$
$$y_1 = 2 \quad y_2 = 0$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(3-0)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(0-2)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

ΛΕΙΜΜΑ (ΚΙΤΡΙΝΟ)

7. Επίλογος

Απευθυνόμενος προς τους φοιτητάς μου θα ήθελα αφενός μεν να τους θυμίσω τη λατινική ρήση «*ignoramus et ignorabimus*» [είμαστε και θα παραμείνουμε αδαείς] με την έννοια ότι υπάρχουν όρια στην ικανότητά μας να κατανοήσουμε τη φύση, αφετέρου δε να τους συμβουλέψω να μη διστάζουν να ασχολούνται με τα μεγάλα προβλήματα, διότι έτσι δεν αποκλείεται να ανακαλύψουν καθ΄ οδόν κάτι το ενδιαφέρον.

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
e-mail: hspyridis@music.uoa.gr
☎ 210 - 72.77.832

Η μουσικότητα της αρχαιοελληνικής γλώσσας

Και ο λόγος και η μουσική είναι *κωδικοποιημένα μηνύματα*, τα οποία εκπέμπονται από μια *πηγή* (δηλαδή έναν ομιλητή ή ένα μουσικό όργανο) σαν *ήχος* μέσω του αέρα προς κάποιον *δέκτη* με απώτερο σκοπό την *επικοινωνία*.

Η ανθρώπινη ομιλία εμπεριέχει μουσικά στοιχεία, τα οποία είναι έντονα σε ορισμένες γλώσσες.

Η συναρμογή των φωνηέντων και των συμφώνων για τη δόμηση των λέξεων σε μια γλώσσα δεν είναι διαδικασία απλή και δεν πραγματοποιείται με τον ίδιο τρόπο σε όλα τα γεωγραφικά πλάτη της γης, διότι επηρεάζεται ισχυρά από μια παράμετρο, που φέρει το όνομα «κλίμα» της περιοχής και ιδού πώς:

Βιολογικοί νόμοι της αναπνοής επηρεάζουν τη συχνότητα εμφάνισης των φωνηέντων μέσα σε μία λέξη, διότι με τα φωνήεντα ο ομιλητής ανοίγει το στόμα του και επιτυγχάνει τον πρέποντα αερισμό του φωνητικού του οργάνου.

Στην ομιλία των βεδουΐνων της Σαχάρας υπερτερούν τα φωνήεντα σε σχέση με τα σύμφωνα, διότι ο αερισμός του φωνητικού τους οργάνου δεν μπορεί να γίνει αλλιώς. Αντιθέτως, ο κάτοικος του παγωμένου Ιρκούτσκ της Σιβηρίας με τους -50^{o} C ομιλεί με πληθώρα συμφώνων, αποφεύγοντας τα φωνήεντα, για να μη πάθει ψύξη το φωνητικό του όργανο. Με βάση αυτά, θα είναι αδιανόητο ο Λίβυος Συνταγματάρχης Καντάφι να εκφωνεί λόγο μεσούντος του χειμώνος στην Ερυθρά Πλατεία της Μόσχας ή ο Ρώσος Πρόεδρος Πούτιν να ομιλεί κατακαλόκαιρο σε μια εκδήλωση στη μέση της Σαχάρας, διότι ο μεν πρώτος θα πάθαινε αφωνία λόγω ψύξης, ο δε δεύτερος θα είχε πνιγεί από την πολλή ζέστη.

Για τη σχέση (φωνήεντα):(σύμφωνα) θα πρέπει να υπάρχει μια βέλτιστη τιμή κατά την οποία τα σύμφωνα και τα φωνήεντα θα ήσαν μεταξύ τους σε ιδανική σχέση και αρμονία. Η σχέση αυτή λογικά θα πρέπει να εμφανίζεται στη γλώσσα ενός λαού που ζει σε έναν τόπο, όπου οι τέσσερις εποχές εναλλάσσονται, ο χειμώνας είναι γλυκύς, το καλοκαίρι δεν είναι εξοντωτικά καυτό, με άλλα λόγια σε έναν τόπο της ευκράτου ζώνης της γης. Στις γλώσσες που ομιλούνται αποκλειστικά στην εύκρατο ζώνη η συγγένεια και η συνάφεια της λειτουργίας του προφορικού λόγου και της μουσικής είναι δεδομένη, διότι η αλληλουχία και η εναλλαγή των συμφώνων με τα φωνήεντα δημιουργεί μουσικά στοιχεία. Επίσης οι ομιλούμενες γλώσσες στους τόπους αυτούς παρουσιάζουν την τέλεια αναλογία της σχετικής συχνότητας εμφάνισης φωνηέντων προς τη σχετική συχνότητα εμφάνισης συμφώνων. Τούτο σημαίνει ότι σε γλώσσες που ομιλούνται σε θερμότερα κλίματα αυτό το κλάσμα μεγαλώνει, ενώ, αντιθέτως, το ίδιο κλάσμα μικραίνει στις γλώσσες του ψυχρού Βορρά. Δηλαδή η γλωσσική μουσικότητα περιορίζεται ή ακόμη και χάνεται, λόγω του ψύχους.

Γλώσσα με πολύ έντονα μουσικά χαρακτηριστικά ήταν η γλώσσα των αρχαίων Ελλήνων, που ζούσαν στο ιδανικό ελληνικό κλίμα κάτω από τον πάντα γαλανό και φωτεινό ελληνικό ουρανό. Τα μουσικά γνωρίσματα του αρχαίου ελληνικού λόγου είχαν μια τόσο τυπικά διαγραφόμενη μορφολογία, αφού η κάθε μία αρχαία ελληνική λέξη από μόνη της είχε ένα ιδιαίτερα αντικειμενικό μουσικό σχήμα. Ένα σχήμα που προέκυπτε από την συναρμογή των ολιγοτέρων δυνατόν αλφαβητικών και μουσικών σημείων. Τούτο σημαίνει πως η αρχαία ελληνική γλώσσα παρουσίαζε οικονομία *σημαντικής*, δηλαδή παρουσίαζε *ολιγοσημία*.

Οι ασχολούμενοι με τα μαθηματικά της μουσικής θα γνωρίζουν πολύ καλά ότι στη μουσική σύνθεση βρίσκει εφαρμογή η *Συνδυαστική Ανάλυση* και ιδιαίτερα οι *Μεταθέσεις με ή χωρίς επαναλήψεις*. Τούτο σημαίνει ότι κάποια μουσικά στοιχεία είναι δυνατόν να εμφανίζονται τα μεν ως προς τα δε σε όλες τις δυνατές μεταξύ των θέσεις.

Και στην ελληνική γλώσσα, όσον αφορά στο *Συντακτικό*, η Συνδυαστική Ανάλυση βρίσκει ευρυτάτη εφαρμογή, παρέχοντας μια *συντακτική ελευθερία*. Τα τρία συντακτικά μέρη της φράσεως δηλαδή *το υποκείμενο, το ρήμα* και *το αντικείμενο* μπορούν να τοποθετηθούν μέσα στη φράση και με τις έξι[1] δυνατές μεταθέσεις τους και να μας δώσουν έξι προτάσεις, οι οποίες εννοιολογικά μεν είναι συγγενείς, αλλά με γνωσιολογικό περιεχόμενο, το οποίο έχει λεπτές και ουσιαστικές αποχρώσεις.
Έστω για παράδειγμα η πρόταση: «Εγώ ομιλώ σ' εσάς». Στο συγκεκριμένο παράδειγμα με υποκείμενο, ρήμα, αντικείμενο, έχουμε τις εξής $M_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ μεταθέσεις:

εγώ ομιλώ σ' εσάς
εγώ σ' εσάς ομιλώ
ομιλώ εγώ σ' εσάς
ομιλώ σ' εσάς εγώ
σ' εσάς εγώ ομιλώ
σ' εσάς ομιλώ εγώ

Το φαινόμενο αυτό στην Πληροφορική χαρακτηρίζει μια γλώσσα ως *γλώσσα ανοικτής δομής*.

Λέγοντας «μελωδία» δεν πρέπει να εννοούμε απλά τη διαφορετική οξύτητα των φθογγοσήμων, δηλαδή μια αλληλοδιαδοχή διαφορετικών μουσικών υψών, διότι υπάρχουν μελωδίες γραμμένες με έναν και μόνο φθόγγο. Μελωδία είναι μια κίνηση προς καθορισμένη κατεύθυνση από την οποία διακρίνονται φθόγγοι. Μελωδία είναι η εκσφενδόνηση, ο παλμός, η δύναμη, η ενέργεια, η κίνηση. Μελωδία είναι πρώτ' απ' όλα το Πυθαγόρειον «όλον» και μετά είναι τα ορισμένα φθογγόσημα και η τονικότητα. Μελωδία ή μέλος είναι μια νέα κατάσταση, ένα σύνολο, μια μορφική ποιότητα, ανωτέρας ισχύος απ' ό,τι είναι τα μέρη, που την αποτελούν, μαζί με την οποία είναι συνυφασμένο αυτό το κάτι τι, η ιδέα, η λεπτεπίλεπτη εκείνη ουσία που δίνει τη ζωή...

Για τη δόμηση μιας μελωδίας ο συνθέτης πρέπει ν' ασχοληθεί με *τα μουσικά ύψη, τα μουσικά διαστήματα* και *τις χρονικές διάρκειες των νοτών*.

---

[1] Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο C με n αντικείμενα, που διακρίνονται μεταξύ τους από το χρώμα, το μέγεθος ή εν γένει από κάποια χαρακτηριστική τους ιδιότητα. Έστω ότι παίρνουμε όλα τα n αντικείμενα και τα τοποθετούμε σε μια σειρά. Τότε λέμε ότι έχουμε μια μετάθεση των n αντικειμένων. Το πλήθος όλων των μεταθέσεων είναι $M_n = n!$
Το χρησιμοποιούμενο σύμβολο n! είναι το παραγοντικό, το οποίο ορίζεται ως το γινόμενο των πρώτων n ακεραίων αριθμών δηλαδή $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Έχει αναγνωρισθεί ότι ο τρόπος ομιλίας των αρχαίων Ελλήνων είχε να κάνει με τα μουσικά ύψη. Ήταν δηλαδή η αρχαιοελληνική *γλώσσα τονική*, γλώσσα τραγουδιστή, γλώσσα μελωδική σε αντίθεση με τη νεοελληνική μας γλώσσα η οποία είναι γλώσσα εντατική, δηλαδή όλες οι συλλαβές της κάθε λέξης εκφέρονται στο ίδιο μουσικό ύψος και μια απ' όλες, διατηρώντας το ίδιο μουσικό ύψος, απλά τονίζεται περισσότερο από τις άλλες.

Ο *Αριστοτέλης* στη *Ρητορική* ξεκάθαρα θεωρεί τον τονισμό σαν ένα είδος αρμονίας και με τη λέξη *μέγεθος* αναφέρεται στην ένταση της φωνής, ενώ με τις λέξεις *τάση* και *τόνος* αναφέρεται στο ύψος αυτής, επηρεασμένος από τις χορδές, τις οποίες όσο περισσότερο τις τείνουμε, τόσο υψηλότερος ήχος παράγεται.

... ἔστιν
δὲ αὕτη μὲν ἐν τῇ φωνῇ, πῶς αὐτῇ δεῖ χρῆσθαι πρὸς
ἕκαστον πάθος, οἷον πότε μεγάλῃ καὶ πότε μικρᾷ καὶ μέσῃ,
καὶ πῶς τοῖς τόνοις, οἷον ὀξείᾳ καὶ βαρείᾳ καὶ μέσῃ, καὶ
ῥυθμοῖς τίσι πρὸς ἕκαστα. τρία γάρ ἐστιν περὶ ἃ σκοποῦ-
σιν· ταῦτα δ' ἐστὶ μέγεθος ἁρμονία ῥυθμός.

Αριστοτέλης: *Ρητορική,* Bekker Σελίς 1403b, Στίχοι 26-31.

Στις επιστημονικές μου εργασίες δέχομαι τη μελωδία ή γενικώτερα τη μουσική σύνθεση σαν μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών π.χ. διάρκεια χρόνου, μουσικό ύψος, χροιά, δυναμική κ.α., ας πούμε n το πλήθος, η οποία σε ένα σύστημα n το πλήθος ορθογωνίων αξόνων παριστάνει μια «γενικευμένη επιφάνεια». Την επιφάνεια αυτή την ονομάζω *μουσική επιφάνεια (musical surface).* Κάθε σημείο αυτής της μουσικής επιφάνειας παριστάνει ένα μουσικό γεγονός της συγκεκριμένης μουσικής σύνθεσης, περιγραφόμενο πλήρως ως προς όλες τις παραμέτρους, που έλαβε υπόψη του ο συνθέτης.

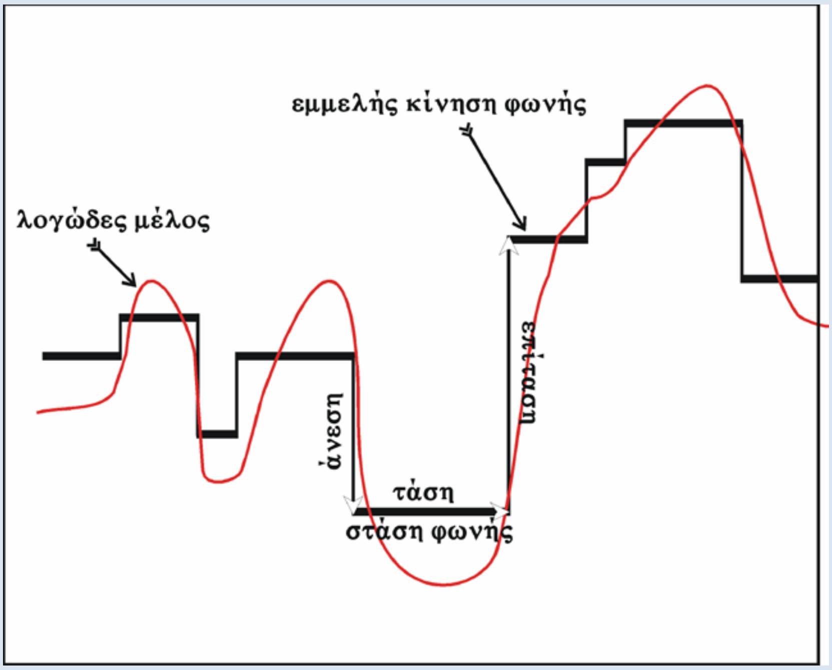
Η απλούστερη των περιπτώσεων είναι αυτή των δύο διαστάσεων. Συγκεκριμένα ο οριζόντιος άξονας είναι κβαντισμένος (ας πούμε βαθμολογημένος) σε στάθμες μουσικού χρόνου και ο κατακόρυφος άξονας είναι κβαντισμένος σε μουσικά ύψη. Οι στάθμες κβάντωσης των μουσικών υψών εξαρτώνται από τον συγκερασμό, που επιλέγει ο μελετητής, δηλαδή εάν θα είναι ο ευρωπαϊκός, ο βυζαντινός κ.α. Σ' αυτό το διδιάστατο ορθογώνιο σύστημα αξόνων η μουσική επιφάνεια εκφυλίζεται σε μια γραμμή βαθμιδωτή (stepwise), που την ονομάζω *καμπύλη των μουσικών υψών (pitch curve).* Αυτή η καμπύλη των μουσικών υψών είναι η απαραίτητη πληρηφορία, που πρέπει να μπορεί ν' αντλεί ένας μουσικολόγος από τα «ακούσματα», προκειμένου να μπορέσει να προβεί στη καταγραφή τους σε μουσική σημειογραφία. Η διαδικασία αυτή είναι η ονομαζόμενη «υπαγόρευση μουσικού κειμένου (dictee)».

Γι' αυτήν τη καμπύλη των μουσικών υψών (pitch curve) μίλησε και έγραψε τον 4ο π.χ. αιώνα ο Αριστόξενος ο Ταραντίνος. Στα *Αρμονικά του Στοιχεία* ο Αριστόξενος περιγράφει τα μουσικά φαινόμενα, όπως αυτά γίνονται αντιληπτά από την αίσθηση της ακοής (εμπειριστής φιλόσοφος). Ονομάζει την ανθρώπινη φωνή *«φωνή ανθρωπική»* και τον ήχο των μουσικών οργάνων *«φωνή οργανική».* Η «φωνή», λοιπόν, όταν μελωδεί είτε επιτείνεται επί το οξύ (η κίνηση αυτή ονομάζεται επίτασις), είτε ανίεται επί το βαρύ (η κίνηση αυτή ονομάζεται άνεσις), είτε παραμένει ενδιαμέσως σε κάποια συγκεκριμένα τονικά ύψη (μουσικά ύψη) (η ενέργεια αυτή ονομάζεται τάσις). Οι τρεις αυτές κινήσεις της «φωνής» στο ορθογώνιο σύστημα, που προαναφέρθηκε, σχηματίζουν την κλιμακωτή (stepwise) γραμμή δηλαδή σχηματίζουν την καμπύλη των μουσικών υψών

(pitch curve). Αυτήν την καμπύλη των μουσικών υψών ο Αριστόξενος την ονομάζει *μουσική* ή *μελωδική* ή *διαστηματική κίνηση της φωνής*. Είναι σαφέστατος στην περιγραφή της διαστηματικής κίνησης της φωνής λέγοντας ότι η επίταση και η άνεση πραγματοποιούνται αυτομάτως, δηλαδή σε χρόνο μηδενικής διάρκειας, ενώ οι στάσεις της φωνής στις διάφορες τάσεις διαρκούν συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα, δηλαδή τόσο χρονικό διάστημα, όση είναι η μουσική διάρκεια του φθόγγου (Βλέπε Σχήμα 1).

Παράλληλα με τη διαστηματική κίνηση της «φωνής» στο τραγούδι ο Αριστόξενος αναφέρεται και στην κίνηση της φωνής κατά την ομιλία. Τονίζει μια χαρακτηριστική διαφορά αυτής της κίνησης από την προηγούμενη. Η κίνηση της φωνής κατά την ομιλία δεν εμφανίζει στάσεις σε κάποιες τάσεις, αλλά είναι μια συνεχής καμπύλη, που την ονομάζει *κίνηση φωνής συνεχή* ή *κίνηση φωνής λογική* ή *λογώδες μέλος* (Βλέπε Σχήμα 1).

Σχήμα 1: Οι κινήσεις της «φωνής» κατά τον Αριστόξενο.



... ὅτι μὲν οὖν διαστηματικὴν ἐν αὐτῷ
δεῖ τὴν τῆς φωνῆς κίνησιν εἶναι προείρηται, ὥστε τοῦ γε
λογώδους κεχώρισται ταύτῃ τὸ μουσικὸν μέλος· λέγεται γὰρ
δὴ καὶ λογῶδές τι μέλος, τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν προσῳδιῶν
τῶν ἐν τοῖς ὀνόμασιν· φυσικὸν γὰρ τὸ ἐπιτείνειν καὶ ἀνιέναι
ἐν τῷ διαλέγεσθαι.

Αριστόξενος: *Στοιχεία Αρμονικής,* Σελίς 23, Στίχοι 11-16.

Κατά τους *Έλληνες γραμματικούς* υπήρχε η λέξη *προσωδία*, η οποία εσήμαινε τη μεταβολή και την ποικιλία του τόνου της φωνής, που επηρεαζότανε από τη βαρύτητα ή την οξύτητα των φθόγγων, τη μακρότητα ή τη βραχύτητα των συλλαβών καθώς επίσης από τον χρόνο εκφοράς των φωνηέντων, των διφθόγγων και των συμφώνων. Από την ανισόχρονη αυτην εναλλαγή των συλλαβών προέκυπτε η *προσωδιακή ρυθμοποιϊα*.

Αν και υπήρχε, προφανώς, μια ομοιότητα ανάμεσα στη μουσική και στις προσωδιακές φόρμες της Ελληνικής γλώσσας, είναι επίσης βέβαιο ότι οι μεταβολές του μουσικού ύψους κατά την ομιλία ήσαν περισσότερο βαθμιαίες απ' ό,τι στο τραγούδι. Η μελική γραμμή της ομιλίας ήταν συνεχής, ώστε στην ακοή να φαίνεται ότι η ομιλία κυλάει, ότι σύρεται στα διάφορα μουσικά ύψη που επιβάλλουν οι τονισμοί χωρίς να διακόπτεται η ηχητική της συνέχεια.

Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει να τονισθεί ότι ο αρχαίος Έλληνας έπρεπε να ομιλεί σε συγκεκριμένο εύρος στάθμης έντασης. Εάν ομιλούσε υψηλότερα απ' αυτό το εύρος, φαινόταν σαν να τραγουδούσε και εάν ομιλούσε χαμηλότερα απ' αυτό το εύρος, η ομιλία του έχανε τη μουσικότητά της.

Πληροφορίες για τον τρόπο επίδρασης των προσωδιών στην αρχαία ελληνική γλώσσα αντλούμε από διαφόρους συγγραφείς, αρχαίους και νεώτερους π.χ. τον *Αριστείδη Κοϊντιλιανό*, τον *Διονύσιο τον Θράκα*, τον *Διονύσιο τον Αλλικαρνασσέα*, τον *Γεώργιο τον Χοιροβοσκό*, τον *Αρκάδιο τον Γραμματικό* και άλλους.

ΠΕΡΙ ΤΟΝΟΥ

Τόνο ἐτὶν ἀπήχηι φωνῆ ἐναρμονίου, ἡ κατὰ ἀνάταιν ἐν τῇ
ὀξείᾳ, ἡ κατὰ ὁμαλιμὸν ἐν τῇ βαρείᾳ, ἡ κατὰ περίκλαιν ἐν τῇ περι-
πωμένῃ.

Διονύσιος ο Θραξ: *Γραμματική τέχνη,* Μέρος 1, Τόμος 1, Σελίς 6, Στίχοι 14-17.

Μεταξύ των λίγων ή πολλών συλλαβών, που σχηματίζουν τη λέξη, μια κατά κανόνα συλλαβή, που έφερνε τον οξύ τόνο, δηλαδή την *οξεία*, σημειωνότανε γενικά στη μουσική καταγραφή να *εκφωνηθεί* υψηλότερα από τις άλλες. Το μέγιστο διαστηματικό εύρος μεταξύ του χαμηλού και του υψηλού μουσικού ύψους στην εκφορά των λέξεων ο *Διονύσιος ο Αλλικαρνασσεύς* στο έργο του *Περί συνθέσεως ονομάτων* το προσδιορίζει στις δύο διαπέντε[2], δηλαδή σε έξι τόνους και δύο ημιτόνια ή με σύγχρονη μουσική ορολογία στις δύο πέμπτες καθαρές.

διαλέκτου μὲν οὖν μέλος ἑνὶ μετρεῖται διαστήματι
τῷ λεγομένῳ διὰ πέντε ὡς ἔγγιστα, καὶ οὔτε ἐπιτεί-
νεται πέρα τῶν τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου ἐπὶ τὸ ὀξὺ
οὔτ' ἀνίεται τοῦ χωρίου τούτου πλέον ἐπὶ τὸ βαρύ.
οὐ μὴν ἅπασα λέξις ἡ καθ' ἕν μόριον λόγου ταττο-
μένη ἐπὶ τῆς αὐτῆς λέγεται τάσεως, ἀλλ' ἣ μὲν ἐπὶ
τῆς ὀξείας, ἣ δ' ἐπὶ τῆς βαρείας, ἣ δ' ἐπ' ἀμφοῖν.

Διονύσιος ο Αλλικαρνασσεύς, *Περί συνθέσεως ονομάτων,* Κεφάλαιον 11 Στίχοι 73-79

[Η μελωδία της ομιλίας χρησιμοποιεί ένα διάστημα, που λέγεται διαπέντε και ούτε ανεβαίνει πέρα από τους τρεις τόνους κι ένα ημιτόνιο για την οξύτητα, ούτε υποχωρεί από τη θέση αυτή για την βαρύτητα του ήχου. Και βέβαια ο λόκληρη η φράση, που τοποθετείται κατά συλλαβή, δεν προφέρεται με το ίδιο μουσικό ύψος, αλλά άλλη συλλαβή τονίζεται με οξεία, άλλη με βαρεία και άλλη και με τα δύο....]

[2] Μουσικό διάστημα ίσο προς τρεις τόνους και ένα ημιτόνιο ή ίσο προς επτά ημιτόνια στο Αριστοξένειο συγκερασμένο σύστημα.

Εξ αυτής της δηλώσεως εμμέσως συνάγεται ότι στην οξυνόμενη συλλαβή η φωνή ανεβαίνει τόσο, ώστε να μην υπερβαίνει το διάστημα μιας διαπέντε, δηλαδή το διάστημα μιας πέμπτης καθαρής.

Η *βαρεία* ήταν ένας τόνος που η φωνή, σ' όποιο ύψος και αν ευρίσκετο, επέστρεφε στο χαμηλότερο μουσικό ύψος, δηλαδή στην *τονική*, εν είδει *τελικής καταλήξεως*.

Με την σύνθεση μιας οξείας και μιας βαρείας *ο Αριστοφάνης ο Βυζάντιος* κατέληξε να εφεύρει το σημείο της *περισπωμένης*, η οποία ετίθετο πάντοτε σε μακρό φωνήεν.

Σε μουσική σημειογραφία το μακρό περισπώμενο φωνήεν σημειωνότανε να τραγουδηθεί, να μελωδηθεί, με δύο νότες και σε καθοδική φορά. Η μία νότα ανέβαινε κατά τι πιο ψηλά από τις άλλες και αμέσως η φωνή *περιεσπάτο* δηλαδή επέστρεφε προς τα κάτω, στα χαμηλά μουσικά ύψη. Η διαδρομή αυτή απαιτούσε δύο χρόνους για να πραγματοποιηθεί. Γι' αυτό το φωνήεν της περισπώμενης συλλαβής έπρεπε να είναι μακρό.

περισπωμένη δὲ ἐπάνω βραχείας συλλαβῆς οὐ τίθεταί
ποτε.

Θεοδοσίου, *Γραμματική,* Σελίς 13 Στίχοι 16-17.

Εκτός από τη διάκριση σε ύψος υπήρχε στον αρχαίο ελληνικό λόγο και η διάκριση κατά *το μήκος των συλλαβών*, για το οποίο έγινε προηγουμένως υπαινιγμός με αφορμή την περισπωμένη.

Σχετικά με τη χρονική διάρκεια των φωνηέντων μερικές αναφορές περιγράφουν το μακρό φωνήεν σαν να έχει διπλάσια διάρκεια από το βραχύ. Η παράδοση αυτής της σχέσης φαίνεται ότι άρχισε με τους έλληνες μουσικούς συγγραφείς, για τους οποίους τα βραχέα φωνήεντα είχαν μία μονάδα χρόνου, που λεγόταν *χρόνος πρώτος*. Τα μακρά φωνήεντα είχαν διάρκεια δύο μονάδων χρόνου. Λειτουργικός ήταν και ο ρόλος των χρονικών διαρκειών των συμφώνων. Οι αρχαίοι ρυθμικοί, τους οποίους απασχολούσε το θέμα της μουσικής συγγένειας, υιοθέτησαν τη σύμβαση να εκχωρούν στο κάθε σύμφωνο τη μισή διάρκεια ενός βραχέος φωνήεντος.

Οἱ παλαιοὶ τοίνυν οὐχ ὁμοίως τὰ μακρὰ καὶ
τὰ βραχέα ἐξεφώνουν· ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῶν μακρῶν δι-
πλασίονα ὥραν ἐποίουν, ἐπὶ δὲ τῶν βραχέων ἐλάτ-
τονα. Καὶ ἄλλως τὰ δασέα ἐξεφώνουν καὶ ἄλλως τὰ
ψιλά.

Θεοδοσίου, *Γραμματική,* Σελίς 13 Στίχοι 17-21.

Έτσι, η χρονική διάρκεια της κάθε συλλαβής στις λέξεις προέκυπτε αθροίζοντας τις χρονικές διάρκειες των γραμμάτων, που την αποτελούσαν.

Από τη διάταξη των συλλαβών κατά τη χρονική διάρκεια προέκυπτε το *ρυθμικό σχήμα της λέξης.*

Αυτό το πλήρες μελωδικό και ρυθμικό σχήμα της λέξης ήταν κάτι που εδίδετο από τη λέξη στον ομιλητή και όχι από τον ομιλητή στη λέξη.

Όλη αυτή η μορφολογία για χρονικές διάρκειες και μουσικά ύψη της φωνής, για συναρμογή και αλληλεπίδραση μελωδικών και ρυθμικών στοιχείων, προβάλλει στην αντίληψη του μουσικού σαν ένα σύστημα σύνθεσης μιας ιδιότυπης μουσικής τεχνο-

τροπίας. Σε μια γλώσσα της οποίας τα πιο στοιχειώδη κύτταρα, οι συλλαβές και οι λέξεις, είχαν γνωρίσματα ενός μουσικού χαρακτήρα και έπαιρναν από μόνα τους σχήματα μουσικά και σ' έναν έντεχνο λόγο της γλώσσας αυτής, οργανωμένο με μελωδίες και ρυθμούς, που πρόβαλαν μέσα απ' αυτόν τον ίδιο, η μουσική έμοιαζε σαν να μην ερχόταν *απ' έξω* για να μελοποιήσει τον λόγο, αλλά μάλλον σαν να έβγαινε *μέσα* απ' αυτόν τόν ίδιο το λόγο.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι, όταν *ο Όμηρος, ο Αισχύλος, ο Σοφοκλής, ο Ευριπίδης, ο Αριστοφάνης* έγραφαν τα έργα τους, επέλεγαν τις λέξεις έτσι, ώστε να έχουν εκτός από το πρέπον νοηματικό περιεχόμενο και το απαραίτητο μουσικό φορτίο. Ήσαν δηλαδή οι ίδιοι τους και οι μουσικοσυνθέτες των έργων τους.

Δυστυχώς σήμερα πιστεύεται ότι αυτή η μουσικότητα των αρχαίων τραγωδιών και κωμωδιών χάθηκε. Αυτό, κατά την προσωπικήν μου άποψη, δεν είναι σωστό. Η μουσικότητα ζει και υπάρχει μέσα σ' αυτά καθ' αυτά τα κείμενα, στα κείμενα που είναι συγχρόνως και *λιμπρέτα*[3] και παρτιτούρες των αρχαίων λογοτεχνικών έργων. Μόνον που εμείς δεν φροντίσαμε όσο θα έπρεπε για ν' αποκτήσουμε τη γνώση, ώστε να ανακαλύψουμε και ν' ανασύρουμε στην επιφάνεια αυτήν τη μουσικότητα.

Εάν η όλη φιλοσοφία της ιδιότυπης αυτής μουσικής τεχνοτροπίας, που εν ολίγοις εξετέθη προηγουμένως, συμπεριληφθεί σε κατάλληλο λογισμικό για ηλεκτρονικό υπολογιστή, θα επιτευχθεί η καταγραφή της παρτιτούρας[4] του αρχαιο-ελληνικού μέλους του κάθε λογοτεχνικού έργου της αρχαιότητος σε σημερινή μουσική σημειογραφία και τότε θα είναι δυνατόν να παρουσιάζονται αυτά τα έργα στο πρέπον μουσικό εσωτερικό και εξωτερικό τους περιβάλλον.

---

[3] Λιμπρέτο (=βιβλιαράκι στα ιταλικά). Το κείμενο δηλαδή τα λόγια μιας όπερας ή ενός ορατορίου ή μιας καντάτας.

[4] H. C. Spyridis and S. Eystratiou, *A computer approach to the music of ancient greek speech*, ACUSTICA, vol. 69, pp 211-217, (1989).

Εισαγωγή

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός στην πραγματεία του «Αριθμητική Εισαγωγή» αναφέρει ότι χαρακτηριστικά γνωρίσματα των όντων είναι *το πλήθος* και *το μέγεθος.* Το ορισμένο πλήθος αποτελεί το ποσό και το ορισμένο μέγεθος είναι το πηλίκο. Με το πλήθος, δηλαδή τον απόλυτο αριθμό, ασχολείται η Αριθμητική, η πρώτη από τις τέσσερις αδελφές επιστήμες. Με το πηλίκον, δηλαδή τον σχετικό αριθμό, ασχολείται η Αρμονική (=Μουσική), η τέταρτη από τις τέσσερις αδελφές επιστήμες.
Ο Νικόμαχος, όπως και όλοι οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί, δεν θεωρούσαν το λόγο δύο μεγεθών ως αριθμό, διότι ως αριθμούς θεωρούσαν μόνον το *Φυσικόν χύμα*, δηλαδή μόνον τους θετικούς ακεραίους αριθμούς, με άλλα λόγια αυτό που σήμερα ονομάζουμε *σύνολο των φυσικών αριθμών.*
Θεωρούσαν τη μονάδα ως αρχή κάθε αριθμού (*αρχοειδής μονάς*), που αυξάνεται ανά μονάδα κατά μία διεύθυνση. Έτσι, διάστημα πρώτα συναντούμε στο 2, μετά στο 3 κ.ο.κ. , διότι διάστημα είναι αυτό που υπάρχει μεταξύ δύο αριθμών[1] «δυοίν αριθμών μεταξύτης».
Στην Αριθμητική

- την γραμμικότητα εκφράζει μια οποιαδήποτε αναλογία κατά ποσότητα, δηλαδή μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδος π.χ. το Φυσικόν χύμα ή αλλιώς η σειρά των φυσικών αριθμών (1, 2, 3, 4, ...). και
- τη λογαριθμηκότητα εκφράζει μια οποιαδήποτε αναλογία κατά ποιότητα, δηλαδή μια οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδος π.χ. η $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ ,\omega^{k-1}$, η οποία έχει πρώτον όρο τη μονάδα και λόγο τον ακέραιο αριθμό ω [2].

Στην αριθμητική πρόοδο το μεν διάστημα μεταξύ των διαδοχικών όρων είναι σταθερό $(2-1=1,\ 4-3=1\ \kappa.\lambda.\pi.)$[3], ο δε λόγος τους όχι $\left(\frac{2}{1}>\frac{4}{3}\ \kappa.\lambda.\pi.\right)$. Στη γεωμετρική πρόοδο το μεν διάστημα μεταξύ των διαδοχικών όρων είναι μη

---

[1] «Διάστημα γαρ εστι δυοίν όρων το μεταξύ θεωρούμενον». Αυτόθι, Βιβλίον β, §6.

[2] Η Αριθμητική των αρχαίων Ελλήνων στην πλειονότητά της είναι Αριθμητική των ακεραίων αριθμών.

[3] Εξού αναλογία κατά ποσότητα.

σταθερό $\left(\omega - 1 < \omega^3 - \omega^2 = \omega^2(\omega - 1)\ \kappa.\lambda.\pi.\right)$, ο δε λόγος τους είναι σταθερός $\left(\frac{\omega}{1} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega\ \kappa.\lambda.\pi.\right)$[4].

Από πολύ παλιά, πριν τον 6ον π.Χ. αιώνα κατά τον οποίον έζησε ο φιλόσοφος Πυθαγόρας, οι πρόγονοί μας είχαν αντιμετωπίσει το μουσικό διάστημα με γραμμικό τρόπο και ο Πυθαγόρας, έχοντας επισημάνει τις μεγάλες αδυναμίες αυτού του γραμμικού τρόπου αντιμετωπίσεως του μουσικού διαστήματος, όρισε το μουσικό διάστημα ως λόγο δύο ομοειδών μεγεθών, εισηγούμενος έτσι αυτό που σήμερα θα λέγαμε τον λογαριθμικό τρόπο αντιμετωπίσεως του μουσικού διαστήματος.

<u>Η έννοια «διάστημα» ως σχέσεως δύο αριθμών προς αλλήλους. (Λογαριθμική αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος).</u>

Κατά την Πυθαγόρειο άποψη το κάθε μουσικό διάστημα ορίζεται από δύο αριθμούς. Η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στη Πυθαγόρειο θεωρία της Μουσικής και σε αυτήν ακόμη την πραγματεία του Ευκλείδου με τίτλο «*Κατατομή Κανόνος*» εκαλείτο «*διάστημα*»[5].

Δύο σχόλια του Πορφυρίου στην περί της αρμονίας διδασκαλία του Πτολεμαίου άναφέρουν «καὶ τῶν κανονικῶν[6] δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων λέγουσιν» και «τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων τὸ διάστημα καλοῦσι» γεγονός που σημαίνει ότι στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία, η οποία θεμελιούται πειραματικά επί του μονοχόρδου, οι έννοιες «διάστημα (= διάσταση)» και «λόγος (= αριθμητική σχέση ή αναλογία)» είναι ταυτόσημες ή εναλλάσσονται ισοδυνάμως.

Αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι συμβαίνει και στην «*Κατατομή Κανόνος*» του Ευκλείδου, η οποία αναφέρεται επίσης σε μονόχορδο όργανο, τον κανόνα, δηλαδή αντί της λέξεως «λόγος (= αριθμητική σχέση ή αναλογία)» χρησιμοποιείται πάντοτε η λέξη «διάστημα (= διάσταση)». Ο Ευκλείδης, χρησιμοποιώντας τον μονόχορδο κανόνα, ασχολείται διεξοδικώτατα με τον δυϊσμό του μουσικού διαστήματος, δηλαδή αντιμετωπίζει το μουσικό διάστημα αφενός μεν ως μία σχέση δύο αριθμών προς αλλήλους, αφετέρου δε ως μία απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος.

Έχει καταστεί πλέον συνείδηση ότι η αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων με τους λόγους είναι περισσότερον «εύπλαστη» κατά τη μαθηματική της επεξεργασία και προτιμάται από τους Μαθηματικούς, ενώ η αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων με τις αποστάσεις μεταξύ σημείων είναι περισσότερον «κατανοητή» από τους μη κατέχοντες μαθηματικές γνώσεις μουσικούς εκτελεστές. Έτσι, Ο Ευκλείδης επιλέγει να αντιμετωπίσει

[4] Εξού αναλογία κατά ποιότητα.

[5] Αργότερα η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στην Αριθμητική και τη Γεωμετρία πήρε το όνομα «λόγος».

[6] Αυτοί που πειραματίζονται χρησιμοποιώντας τον κανόνα.

πρώτα[7] τα μουσικά διαστήματα ως σχέσεις αριθμητικών δυάδων. Στη συνέχεια, προκειμένου να δείξει την ισχύν του δυϊσμού των μουσικών διαστημάτων, αντιμετωπίζει τα ίδια μουσικά διαστήματα ως αποστάσεις μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος[8].

Οι θεωρητικοί της Μουσικής αυτής της περιόδου, όταν η μουσική καθίσταται πλέον πολυφωνική και τα όργανα αποκτούν πολλές χορδές, ενδιαφέροντο κυρίως για τα ονομαζόμενα σύμφωνα ή εύφωνα διαστήματα ή συμφωνίες εκ του ***συμφωνέω_ῶ, συμφωνία, σύμφωνος*** *(σὺν+φωνὴ) φωνῶ ὁμοῦ, ὁ συμφωνῶν κατὰ τὸν ἦχον, μουσικὴ συμφωνία (ἁρμονία).* Τώρα καθίσταται επιτακτική η ανάγκη έκφρασης των μουσικών διαστημάτων ως λόγων ακεραίων αριθμών.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα εύφωνα διαστήματα που αναγνώριζαν οι Πυθαγόρειοι

- όταν τα αντιμετώπιζαν γραμμικά, τα ονόμαζαν δια πασών, δια πέντε, δια τεσσάρων, διαπασών και διαπέντε και δις διαπασών,
- ενώ όταν τα αντιμετώπιζαν ως λόγους, τα ονόμαζαν διπλάσιον, ημιόλιον, επίτριτον, τριπλάσιον και τετραπλάσιον, αντίστοιχα[9].

Η έννοια «διάστημα» ως αποστάσεως δύο σημείων ή «ευθυγράμμου τμήματος».
(Γραμμική αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος).

Ο Αριστόξενος τον 4^{ον} αιώνα π.Χ. εναντιούμενος στη λογαριθμηκότητα των μουσικών διαστημάτων επιστρέφει στη γραμμικότητα αυτών. Καταργεί τις όποιες Πυθαγόρειες ανισότητες μεταξύ των συνωνύμων διαστημάτων, εισηγούμενος για πρώτη φορά στην ιστορία της Μουσικής τον ίσο συγκερασμό[10]. Γι’ αυτόν η διαπασών (=οκτάβα) διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος διαιρείται σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα. Σήμερα θα λέγαμε ότι ο Αριστόξενος εισηγήθηκε τον συγκερασμό στα 24, δηλαδή τον χωρισμό της οκτάβας σε 24 ίσα μεταξύ τους μουσικά διαστήματα. Η γραμμικότητα σε όλο της το μεγαλείο. Μια γραμμικότητα που φωλιάζει μόνο στη φαντασία του Αριστόξενου, διότι δεν συναντάται στη μουσική πρακτική.
Ο Αριστόξενος ονομάζει μουσικό διάστημα την **απόσταση** ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού μουσικού ύψους. Πρέπει να σημειωθεί ότι η έννοια φθόγγος είναι συνώνυμη και της θέσεως που πατάει στο μάνικο μουσικού οργάνου το δάκτυλο του μουσικού εκτελεστού, προκειμένου να παραχθεί ένας ήχος συγκεκριμένου μουσικού ύψους. Με άλλα λόγια το διάστημα παρουσιάζεται ως μια διαφορά μεταξύ δύο πατημάτων επί του μάνικου του

---

[7] Η αντιμετώπιση αυτή γίνεται στις Προτάσεις ς, ζ, η, θ.

[8] Η αντιμετώπιση αυτή γίνεται στις Προτάσεις ι, ια, 12, 13, 14, 15, 16.

[9] Τις οποίες εξέφραζαν με τις αριθμητικές σχέσεις $\left(\frac{2}{1}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{1}.\frac{3}{2}=\frac{3}{1}\right)$, και $\left(\frac{4}{1}\right)$, αντίστοιχα.

[10] Κακώς διδάσκεται ότι εισηγητής του ίσου συγκερασμού είναι ο J. S. Bach το 1722.

μουσικού οργάνου. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η διαφορά, δηλαδή η απόσταση αυτή των δύο πατημάτων επί του μάνικου του μουσικού οργάνου, τόσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα. Με το σκεπτικό αυτό ευθυγραμμίζεται ο W. Burkert, που αναφέρει με σύγχρονους όρους το εξής απλό μεν, αλλά πολύ σημαντικό: «Για μας, τους μουσικούς της Ευρωπαϊκής μουσικής, και λόγω της μουσικής σημειογραφίας και λόγω του πληκτρολογίου του πιάνου καθίσταται ιδιαίτερα καταληπτή η έννοια του μουσικού διαστήματος ως αποστάσεως, ως ευθυγράμμου τμήματος».

Κατά τον Κλεονίδη μουσικό διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικούς στο ύψος και στο βάθος.
Τον ίδιο ορισμό δίνει και ο Βακχείος.
Ο Ανώνυμος του Bellermann λέει ότι διάστημα είναι εκείνο που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους (ή περικλείεται από δύο φθόγγους) διαφορετικούς στο ύψος, από τους οποίους ο ένας είναι υψηλότερος και ο άλλος χαμηλότερος[11].
Σε ένα απόσπασμα χειρογράφου (Vincent Notices 234) βρίσκουμε τον εξής ορισμό για το διάστημα: Διάστημα είναι η έκταση της φωνής, που περιέχεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους[12].
Ο Νικόμαχος γράφει «διάστημα δ′ ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης», όπου με τον όρο μεταξύτης εννοεί «ό,τι περιέχεται ή ό,τι βρίσκεται ανάμεσα».
Σε όλους αυτούς τους ορισμούς, θεωρώντας την έννοια φθόγγος με τη σημασία «θέση πατήματος επί του μάνικου του μουσικού οργάνου», το διάστημα αποκτά τη σημασία ενός ευθυγράμμου τμήματος κατά μήκος της χορδής του μονοχόρδου μουσικού οργάνου.

Άρα, λοιπόν, η λέξη «διάστημα» στη μουσική θεωρία είχε διττή δημασία, διότι εσήμαινε «απόσταση μεταξύ δύο θέσεων πατήματος του δακτύλου του μουσικού εκτελεστού επί του μάνικου του μουσικού οργάνου[13]», αλλά και «λόγο δύο αριθμών (αριθμητική σχέση ή αναλογία)[14]».

---

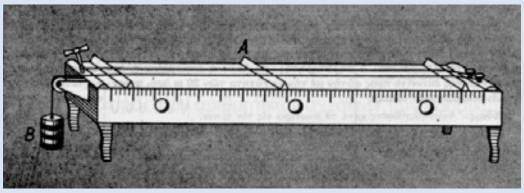
[11] Πράγματι, κρατώντας τον κανόνα κατακορύφως η σχετική θέση δύο τάστων (=φθόγγος) είναι η μία ψηλότερα του άλλου ή η μία χαμηλότερα του άλλου.

[12] Με τον όρο φθόγγος υπονοείται (i) η νότα, (ii) το τάστο (=μπερντές, fret), (iii) το μη ηχούν τμήμα της χορδής, (iv) το δονούμενο τμήμα της χορδής.
Εδώ γίνεται αντιληπτό ότι υπονοείται το τάστο ή πάτημα, διότι από το ένα πάτημα μέχρι το άλλο προσδιορίζεται το μουσικό διάστημα. Άρα, υπονοείται και το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ανάμεσα στα δύο πατήματα.

[13] Γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

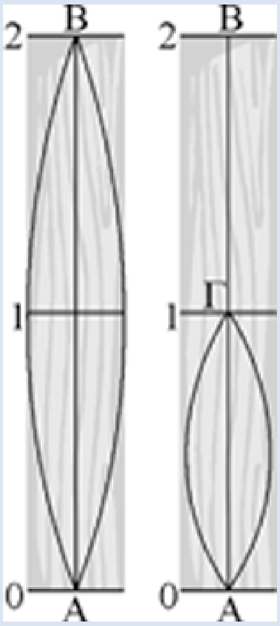
[14] Λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

Πυθαγόρειο πείραμα Ακουστικής κατά Γαυδέντιο.



Εικόνα 1: Σύγχρονο εργαστηριακό μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Ο Γαυδέντιος (4^{ος} αιώνας μ.Χ.) αναφέρει ένα πείραμα Ακουστικής, σωστό από άποψη Φυσικής, με το οποίο ο Πυθαγόρας εφηύρε τις αριθμητικές σχέσεις των μουσικών συμφωνιών. Κατεσκεύασε ένα μονόχορδο τεντώνοντας μια χορδή επί ενός κανόνος[15] (χάρακα) διηρημένου και αριθμημένου σε 2 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (2 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια το μισό μήκος αυτής (1 μονάδα μήκους) με τη βοήθεια ενός κινητού καβαλάρη, του υπαγωγέα, (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Απόδοση του διαστήματος της δια πασών επί του κανόνος.

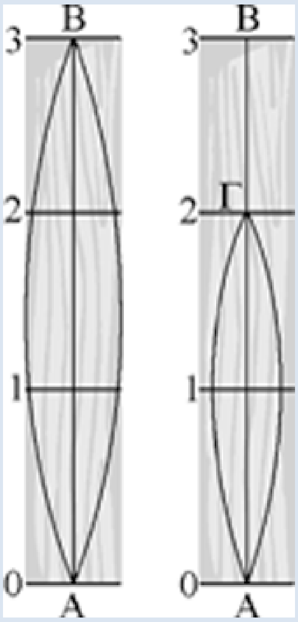
Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η διαπασών συμφωνία $\left(\frac{2}{1}\right)$.

---

[15] Υπάρχει η άποψη ότι ο πυθαγόρειος κανών και το μονόχορδο είναι κατοπινές εφευρέσεις και ότι μετρήσεις επί του κανόνος έγιναν κατά τη μετα-Αριστοξένεια εποχή, γύρω στο 300 π.Χ. Την άποψη αυτή στηρίζουν στο ότι (i) οι συγγραφείς του 5^{ου} και του 4^{ου} π.Χ. αιώνα (ii) τα ψευδο-αριστοτελικά μουσικά προβλήματα δεν αναφέρουν την ονομασία «*κανών*».

Εικόνα 3 Από το εξώφυλλο του βιβλίου του F. Gafurio «Theorica Musicae» (1492). Ξυλογραφία που παριστάνει πειράματα του Πυθαγόρα (το πείραμα στο Χαλκοτυπείο με τα σφυριά, πείραμα με καμπάνες, πείραμα με ηχητικούς σωλήνες, πείραμα με χορδές και αυλούς)

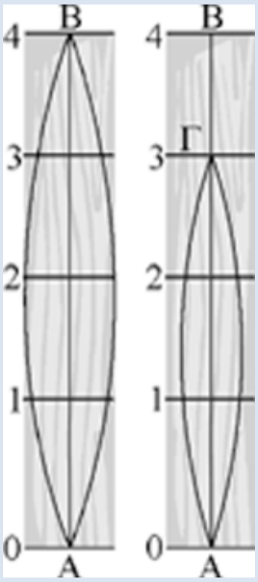
Κατόπιν διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος του κανόνος σε 3 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (3 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια τα $\frac{2}{3}$ του μήκους αυτής (2 μονάδες μήκους) (Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Απόδοση του διαστήματος δια πέντε επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η δια πέντε συμφωνία $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Τέλος, διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος του κανόνος σε 4 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (4 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια τα $\frac{3}{4}$ του μήκους αυτής (3 μονάδες μήκους) (Εικόνα 5).



Εικόνα 5: Απόδοση του διαστήματος δια τεσσάρων επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η δια τεσσάρων συμφωνία $\left(\frac{4}{3}\right)$.

Σ' αυτό το τριπλό πείραμα Π Α Ν Τ Ο Τ Ε ετίθετο σε ταλάντωση π ρ ώ τ α ο λ ό κ λ η ρ ο τ ο μ ή κ ο ς τ η ς χ ο ρ δ ή ς (Β Α) κ α ι σ τ η σ υ ν έ χ ε ι α έ ν α τ μ ή μ α α υ τ ή ς (Γ Α) . Αυτό σημαίνει ότι ένα τμήμα (=μόριον) (ΓΑ) της χορδής επάλλετο και παρήγε ήχο (***«ηχούν» τμήμα της χορδής***), ενώ το υπόλοιπο (ΒΓ) τμήμα (=μόριον) της ηρεμούσε και, ως εκ τούτου, παρέμενε «*βωβό*» (***«μη ηχούν» τμήμα της χορδής***).

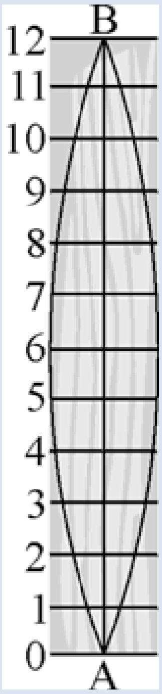
Το παραπάνω πείραμα αφενός μεν απαιτεί την ύπαρξη τριών διαφορετικού μήκους υποδιαιρέσεων του κανόνος $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, αφετέρου επιτρέπει μόνον την παραγωγή μεμονωμένων μουσικών συμφωνιών και όχι και των τριών πλην της τελευταίας περιπτώσεως, στην οποίαν με τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στις θέσεις 4 και 3 παράγεται η δια τεσσάρων συμφωνία, στις θέσεις 3 και 2 παράγεται η δια πέντε συμφωνία και στις θέσεις 4 και 2 παράγεται η δια πασών συμφωνία. Π ρ έ π ε ι ν α ε π ι σ η μ α ν θ ε ί ό τ ι μ ό ν ο ν μ ε α υ τ ή ν τ η ν α λ λ η λ ο υ χ ί α θ έ σ ε ω ν τ ο υ

κινητού καβαλάρη (υπαγωγέα) και με καμιά άλλη παράγονται οι τρεις μουσικές συμφωνίες.

Αξιοσημείωτο είναι ότι το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής καθορίζεται στην περίπτωση της δια πασών με τους αριθμούς 4 και 2 του κανόνος, στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας με τους αριθμούς 4 και 3 και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας με τους αριθμούς 3 και 2. Βλέπουμε ότι Γεωμετρικά στη συγκεκριμένη περίπτωση το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής στην περίπτωση της δια πασών συμφωνίας ισούται με το άθροισμα των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας, επαληθεύοντας τη ρήση του Φιλολάου ότι "ἁρμονίας (=διὰ πασῶν) δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν [16]".

Είναι πολύ πιθανόν με τέτοια πειράματα Ακουστικής επάνω σε αρχέγονο κανόνα υποδιηρημένο σε τέσσερα μόνο μέρη να δημιουργήθηκε η μυθική σημασία της ιεράς τετρακτύος των Πυθαγορείων.

Οι πηγές μας αναφέρουν τη διαίρεση του κανόνος σε 12 ίσα μέρη, όπου 12 είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών 2, 3 και 4 (Εικόνα 6).

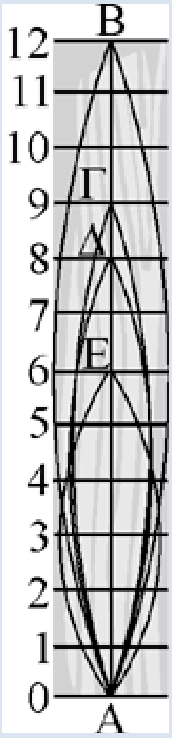


Εικόνα 6: Ο εις 12 ίσα μέρη διηρημένος και αριθμημένος κανών για την απόδοση των συμφωνιών δια πασών, δια πέντε και δια τεσσάρων.

[16] Από τη γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων συνεπάγεται ότι οι έννοιες «ἁρμονία (=διὰ πασῶν)», «συλλαβὰ» και «δι' ὀξειᾶ» σχετίζονται με μήκη μη ηχούντων τμημάτων χορδής. Από αυτήν τους τη συσχέτιση προκύπτουν και οι ονομασίες τους «δια πέντε» και «δια τεσσάρων», διότι αυτά τα μήκη των μη ηχούντων τμημάτων χορδής περιορίζοντο ανάμεσα σε πέντε και ανάμεσα σε τέσσερα τάστα (=πατήματα), αντίσοιχα.

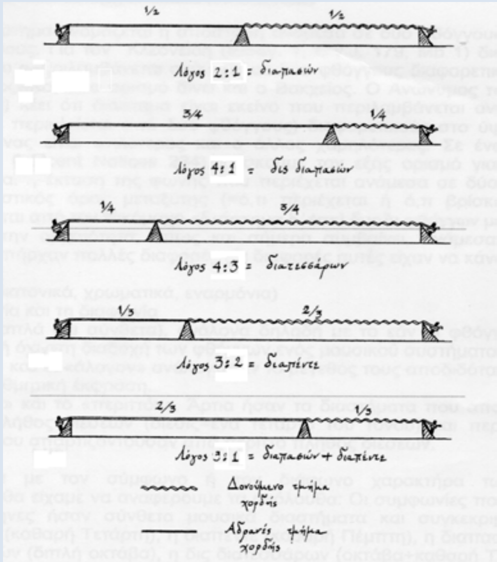
Με τον κανόνα διηρημένον στα 12 ίσα τμήματα είναι δυνατόν να παραχθούν και οι τρεις συμφωνίες δια πασών, δια τεσσάρων και δια πέντε θέτοντας τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στις θέσεις (12, 6), (12, 9) και (12, 8), αντίστοιχα. Από εδώ βλέπουμε ότι το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 9, στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 8, ενώ στην περίπτωση της διαπασών συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 6. Τούτο σημαίνει ότι η διαφορά των εν λόγω δύο μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 9 και 8[17] (Εικόνα 7).

Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι «διάστημα» ήταν αυτό καθαυτό το μουσικό διάστημα το σχηματιζόμενο από δύο φθόγγους προερχομένους από την ταλάντωση δύο διαφορετικού μήκους τμημάτων χορδής και το οποίο αφενός μεν μπορούσε να γίνει αντιληπτό και να καθορισθεί ακουστικά, αφετέρου δε να καταστεί και ορατό επάνω στον Κανόνα ως η διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής των εν λόγω δύο φθόγγων.



Εικόνα 7: Απόδοση των συμφωνιών δια πασών, δια τεσσάρων και δια πέντε επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

[17] Αυτό άλλωστε αναφέρει και το η θεώρημα της Κατατομής Κανόνος του Ευκλείδου: "Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον".



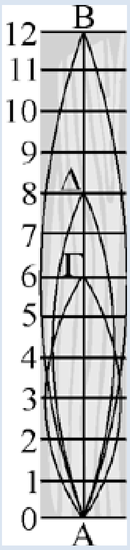
Σχήμα 1: Προσδιορισμός των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών συμφωνιών στο μονόχορδο.

<u>Πράξεις μεταξύ των διαστημάτων</u>

Εάν διασαφηνισθεί το πώς η έννοια «διάστημα» ήταν δυνατό να σημαίνει συγχρόνως «απόσταση μεταξύ δύο σημείων ή μεταξύ δύο φθόγγων», αλλά και «λόγο δύο αριθμών (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» θα έχουν ισχύ όλα όσα διδάσκονται στην Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων και ιδιαιτέρως ο ορισμός του μουσικού διαστήματος ως λόγου συχνοτήτων.

1. <u>Πρόσθεση δύο διαστημάτων.</u>

Έστω ότι μας δίδονται δύο σημεία, τα Α και Β. Τα σημεία αυτά μπορεί να θεωρηθούν ότι είναι τα πέρατα ενός ευθυγράμμου τμήματος, του ΑΒ και ότι με την απόστασή τους ορίζουν το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



Εικόνα 8: Πρόσθεση διαστημάτων επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Έστω ότι στον κανόνα της εικόνας 8, που είναι διηρημένος και αριθμημένος σε 12 ίσα τμήματα, θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ, που είναι 12 μονάδες μήκους. Στη συνέχεια τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΑΔ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια πέντε διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΔ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\mathrm{BA}}{\Delta\mathrm{A}}=\frac{12}{8}$.

Ακολούθως, εκτελώ ως προς αυτό ένα συνημμένο διάστημα δια τεσσάρων. Προς τούτοις με τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΔΑ της χορδής και μετά, αφού μετατοπίσω τον καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 6 του κανόνα), θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΓΑ της χορδής, που έχει μήκος 6 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΔΓ και έχει μήκος 2 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια τεσσάρων διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΔΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\Delta\mathrm{A}}{\Gamma\mathrm{A}}=\frac{8}{6}$.

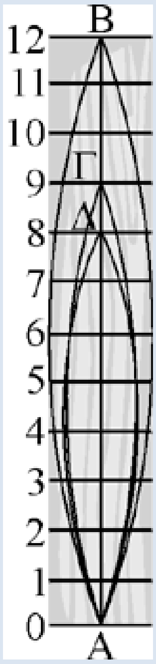
Τέλος, εκτελώ το διάστημα δια πασών θέτοντας σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ του κανόνα, μήκους 12 μονάδων και το τμήμα ΓΑ της χορδής, μήκους 6 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΒΓ και έχει μήκος 6 μονάδων μήκους. Αυτό το μουσικό διάστημα (δια πασών) ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\mathrm{BA}}{\Gamma\mathrm{A}}=\frac{12}{6}$.

Παρατηρώ ότι το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο διάστημα της δια πασών, δηλαδή ΒΓ=ΒΔ+ΔΓ. Πράγματι η δια πασών είναι το άθροισμα του δια πέντε και του δια τεσσάρων ή, όπως λέει ο Φιλόλαος "ἁρμονίας (=διὰ πασῶν) δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι᾽ ὀξειᾶν".

Εάν στη θέση των μηκών αυτών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα, τοποθετήσω τους αντιστοίχους λόγους των μηκών των ηχούντων τμημάτων χορδής, που επίσης αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα, οδηγούμαι στη διαδικασία της προσθέσεως των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών, δηλαδή $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Delta}\oplus\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A}\Gamma}$. Η σχέση αυτή για να υφίσταται ως αληθής, θα πρέπει η διαδικασία, η συμβολιζομένη με το

σύμβολο $\oplus$, να συμπίπτει με τη διαδικασία του γνωστού πολλαπλασιασμού[18] (Λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων).
Συμπερασματικά λέμε ότι:
α. για να προσθέσουμε συνημμένα διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με διαδοχικά μήκη μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, προσθέτουμε αυτά τα διαδοχικά μη ηχούντα τμήματα της χορδής, οπότε το άθροισμά τους δίδει το μηκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής για το ολικό διάστημα.
β. για να προσθέσουμε συνημμένα διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με λόγους ηχούντων τμημάτων της χορδής, πολλαπλασιάζουμε αυτούς τους λόγους των ηχούντων τμημάτων της χορδής και βρίσκουμε το λόγο των ηχούντων τμημάτων της χορδής για το ολικό διάστημα.

2. Αφαίρεση δύο διαστημάτων.



Εικόνα 9: Αφαίρεση διαστημάτων επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Έστω ότι στον κανόνα της εικόνας 9 που είναι διηρημένος και αριθμημένος σε 12 ίσα τμήματα θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ, που είναι 12 μονάδες μήκους. Στη συνέχεια τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΔΑ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος

---

[18] (12, 8)+(8, 6)=(12, 6) κατά τη γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.
$\frac{12}{6}=\frac{12}{8}\oplus\frac{8}{6}=\frac{12}{8}\cdot\frac{8}{6}$ κατά τη λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων. Το γεγονός ότι η δεύτερη σχέση προκύπτει αβίαστα από την πρώτη μπορεί να το επικαλεσθεί κανείς για να υποστηρίξει ότι ο γραμμικός τρόπος αντιμετωπίσεως των μουσικών διαστημάτων υπήρχε προτού ο Πυθαγόρας εισηγηθεί, ύστερα από πειραματισμούς επί του μονοχόρδου, την λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια πέντε διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΔ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\mathrm{BA}}{\Delta\mathrm{A}}=\frac{12}{8}$.

Στη συνέχεια θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ, που είναι 12 μονάδες μήκους. Μετά τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στη θέση Γ (υποδιαίρεση 9 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΓΑ, μήκους 9 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, μήκους 3 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια τεσσάρων διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\mathrm{BA}}{\Gamma\mathrm{A}}=\frac{12}{9}$.

Ακολούθως, θα εκτελέσω το επόγδοο διάστημα. Προς τούτοις με τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΔΑ της χορδής και μετά, αφού μετατοπίσω τον καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 9 του κανόνα), θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΓΑ της χορδής, που έχει μήκος 9 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ και έχει μήκος 1 μονάδα μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το επόγδοον διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΓΔ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{A}}=\frac{9}{8}$.

Παρατηρώ ότι η διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο επόγδοον διάστημα, δηλαδή ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ[19]. Πράγματι, όπως άλλωστε αναφέρει και το η θεώρημα της Κατατομής Κανόνος του Ευκλείδου: "Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον".

Εάν στη θέση των μηκών αυτών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα, τοποθετήσω τους αντιστοίχους λόγους των μηκών των ηχούντων τμημάτων χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα ίδια διαστήματα, οδηγούμαι στη διαδικασία της αφαιρέσεως των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών, δηλαδή $\frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{BA}}{\Delta\mathrm{A}}\,\Theta\,\frac{\mathrm{BA}}{\Gamma\mathrm{A}}$. Η σχέση αυτή για να υφίσταται ως αληθής, θα πρέπει η διαδικασία, η συμβολιζομένη με το σύμβολο Θ, να συμπίπτει με τη διαδικασία της γνωστής διαιρέσεως[20].

---

[19] Γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

[20] (12, 8)-(12, 9)=(9, 8) κατά τη γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

Συμπερασματικά λέμε ότι:
α. για να αφαιρέσουμε δύο διαστήματα που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με δύο μήκη μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που έχουν κοινή αρχή, αφαιρούμε αυτά τα δύο μη ηχούντα τμήματα της χορδής και βρίσκουμε το μη ηχούν τμήμα της χορδής του διαστήματος της διαφοράς.
β. για να αφαιρέσουμε δύο διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με λόγους ηχούντων τμημάτων της χορδής, διαιρούμε το λόγο του μειωτέου δια του λόγου του αφαιρετέου και βρίσκουμε το λόγο των ηχούντων τμημάτων της χορδής για το διάστημα της διαφοράς.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι επί παραδείγματι
οι σχέσεις 8:6 και 12:9 εκφράζουν τον επίτριτο λόγο (=λόγος μηκών ηχούντων τμημάτων χορδής) και ταυτοχρόνως εκφράζουν την δια τεσσάρων συμφωνία (=μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής).
Οι σχέσεις 9:6 και 12:8 εκφράζουν τον ημιόλιο λόγο (=λόγος μηκών ηχούντων τμημάτων χορδής) και ταυτοχρόνως εκφράζουν την δια πέντε συμφωνία (=μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής).
Συνεπώς ο όρος *λ ό γ ο ς* περιγράφεται με μια πολλαπλάσια ή επιμόρια κ.λπ. σχέση και εκφράζει *λόγο μηκών ηχούντων τμημάτων χορδής*.
Ο όρος συμφωνία περιγράφεται π.χ. ως δια τεσσάρων, δια πέντε, δια πασών κ.λπ. και εκφράζει *μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής*.
Λόγω, λοιπόν, του δυισμού του μουσικού διαστήματος, που προαναφέρθηκε, ένα και το αυτό μουσικό διάστημα, εν γένει, ονομάζεται με διαφορετικό όνομα, το οποίο προδίδει τόν τρόπο αντιμετωπίσεώς του, δηλαδή με βάση τα ηχούντα ή τα μη ηχούντα τμήματα χορδής.
Κι αντιστρόφως, ο τρόπος αντιμετωπίσεως ενός και του αυτού μουσικού διαστήματος, εν γένει, δηλαδή με βάση τα ηχούντα ή τα μη ηχούντα τμήματα χορδής, προσδίδει στο μουσικό διάστημα διαφορετικό όνομα (βλέπε Πίνακα Ι).

$\frac{9}{8} = \frac{12}{8} \Theta \frac{12}{9} = \frac{12}{8} : \frac{12}{9} = \frac{12}{8} \cdot \frac{9}{12}$ κατά τη λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων. Και εδώ, επίσης, το γεγονός ότι η δεύτερη σχέση προκύπτει αβίαστα από την πρώτη μπορεί να το επικαλεσθεί κανείς για να υποστηρίξει ότι ο γραμμικός τρόπος αντιμετωπίσεως των μουσικών διαστημάτων υπήρχε προτού ο Πυθαγόρας εισηγηθεί, ύστερα από πειραματισμούς επί του μονοχόρδου, την λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

Πίνακας Ι: Ονομασία των μουσικών διαστημάτων με βάση τον τρόπο αντιμετωπίσεώς τους, δηλαδή με βάση τα ηχούντα ή τα μη ηχούντα τμήματα χορδής.

Μουσικό Διάστημα	Αντιμετωπιζόμενο με βάση τα ηχούντα τμήματα χορδής παίρνει το όνομα:	Αντιμετωπιζόμενο με βάση τα μη ηχούντα τμήματα χορδής παίρνει το όνομα:
$\frac{4}{1}$	τετραπλάσιον	δὶς διὰ πασῶν
$\frac{2}{1}$	διπλάσιον	διὰ πασῶν
$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$	ἡμιόλιον	διὰ πέντε
$\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$	ἐπίτριτον	διὰ τεσσάρων
$\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8}$	ἐπόγδοον	τονιαῖον

Ο Ελικών

Μαρίας Χ. Παπαδοπούλου, Μαθηματικού, Μουσικολόγου, υποψηφίας διδάκτορος, Τμήμα Μουσικών Σπουδών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, Καθηγητού Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής, Εργαστήριο Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας, Τμήμα Μουσικών Σπουδών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη: Η παρούσα εργασία έχει σαν σκοπό να παρουσιάσει τον Ελικώνα, έναν από τους δύο γεωμετρικούς τρόπους κατατομής του κανόνος, δηλαδή τρόπους με τους οποίους οι αρχαίοι Έλληνες αρμονικοί υπολόγιζαν τα μήκη των ταλαντουμένων τμημάτων χορδής για την επίτευξη μουσικών συμφωνιών κατά την αρχαία ελληνική αρμονία.

Ο ένας τρόπος περιγράφεται από τον Ευκλείδη (3^{ος} αι π.Χ.) στην πραγματεία του *Κατατομή Κανόνος* και ο Ελικών περιγράφεται από τον Κλαύδιο Πτολεμαίο (2^{ος} αι μ.Χ.) στα *Αρμονικά* του (Βιβλίο ΙΙ Κεφάλαιο 2), τον Αριστείδη Κοϊντιλιανό (1^{ος}/3^{ος} αι μ.Χ.) στο σύγγραμμά του *Περί Μουσικής* (Βιβλίο ΙΙΙ κεφ.3), τον Πορφύριο (3^{ος} αι. μ.Χ.) στα *Σχόλιά του στα Αρμονικά του Πτολεμαίου* (Βιβλίο ΙΙ Κεφάλαιο 2) και τον Γεώργιο Παχυμέρη (13^{ος} - 14^{ος} αι. μ.Χ.) στην πραγματεία του *Περί αρμονικής* (κεφάλαιο ΙΖ').
Στην κατατομή κανόνος του Ευκλείδη προσδιορίζονται τα μήκη των χορδών για το τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων Ελλήνων και στον Ελικώνα οι συμφωνίες στο διατονικό γένος.
Ο Ελικών μας εκτίθεται με δύο γεωμετρικές παραλλαγές, τις οποίες αναλύουμε και συγκρίνουμε τα αποτελέσματά τους στην περιοχή της συχνότητας (frequency domain).

Maria Ch. Papadopoulou, Mathematician and Musicologist, research student, Department of Music Studies, University of Athens.

Haralambos C. Spyridis, Professor in Musical Acoustics, Informatics, Lab. of Musical Acustics & Technology, Department of Music Studies, University of Athens.

Abstract: This paper aims to present the Helicon, one of the two geometrical ways of dividing the canon, ways with which the Ancient Greek Kanonikoi used to measure the lengths of the vibrated sections of a string, to achieve musical consonances, according to the Ancient Greek Harmony.
One of these two ways is presented by Euclid (3rd cent. B.C.) in his treatise *Sectio Canonis* and descriptions of the Helicon are found in Claudius Ptolemaeus *Harmonics* (2nd cent. A.D.), in Aristides Quintilianus' De *Musica* (Book III, chapter 3), in Porphyry's (3rd cent. A.D.) *Commentary on Ptolemaeus' Harmonics* (Book II, chapter 2) and in the treatise of George Pachymeres, *Harmonics (Chapter XVII).*
In Euclidean *Sectio Canonis*, the lengths of the strings for the "Teleion Ametabolon" system of the Ancient Greeks are defined, while in the *Helicon*, the consonances in the diatonic genus are examined.
The Helicon is presented with the form of two geometrical variations. Our main goal is to analyse them and then, compare their results in the area of the frequency domain.

Η μουσική ήταν μία από τις υψηλότερες εκφράσεις του αρχαίου ελληνικού πνεύματος. Αποτελούσε αναπόσπαστο μέρος της θρησκευτικής και κοινωνικής ζωής των αρχαίων Ελλήνων, όπως και του αθλητικού ιδεώδους. Φυσικά, δεν απουσίαζε και από τις απλές καθημερινές εργασίες, καθώς οι αρχαίοι Έλληνες είχαν συνειδητοποιήσει την αξία της μουσικής ως αρωγού στην εργασία, στη σωματική άσκηση και ιδιαίτερα στην ενασχόληση εκείνη που η φύση της ήταν επαναληπτική ή ρυθμική (θερισμός, τρύγος, πάτημα σταφυλιών, οικοδομικές εργασίες) και γνώριζαν την δύναμή της στο να μεταβάλλει τη διάθεση των ανθρώπων (π.χ. διατήρηση της ακμαιότητας του ηθικού και της ενότητας του ρυθμού των ανδρών που προήλαυναν στη μάχη). Στον ιδιωτικό βίο, η μουσική διαπότιζε τα γεγονότα της

καθημερινής ζωής είτε χαρμόσυνα ήταν αυτά, είτε δυσάρεστα, όπως συμπόσια, νίκες αθλητών, γάμοι, κηδείες, κ.α. Κατά την αρχαιότητα, η μουσική, ως μία από τις τέσσερις αδελφές επιστήμες, Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική, Αστρονομία, βρισκόταν σε μεγάλη εξέλιξη και θεωρητικά και πρακτικά.

Οι πρωτογενείς πηγές – αρχαία κείμενα – της ελληνικής γραμματείας, η τέχνη, οι αγγειογραφίες, τα θραύσματα πραγματικών μουσικών οργάνων και οι άλλες μαρτυρίες που μας έδωσαν τα ευρήματα της αρχαιολογίας, μας βοήθησαν στο να μορφώσουμε γνώμη για το πλήθος και το είδος των μουσικών οργάνων (έγχορδα, πνευστά, κρουστά), που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες.

Ένα όργανο-εργαλείο, που χρησίμευε στη μέτρηση, τις δοκιμές και την απόδειξη των διαστημάτων με ποικίλους λόγους, δηλαδή αριθμητικές σχέσεις, ήταν το μονόχορδο. Ονομάζεται και "Πυθαγόρειος κανών", διότι η εφεύρεση του οργάνου αυτού αποδόθηκε στον μεγάλο φιλόσοφο του 6^{ου} αι π.Χ. Πυθαγόρα. Το μονόχορδο είχε μία μόνο χορδή που τανυόταν πάνω σε ένα βαθμονομημένο κανόνα και ένα κινούμενο υπαγωγέα δηλ. γέφυρα ή καβαλάρη, ο οποίος διαιρούσε το μήκος της χορδής, επιτρέποντας μόνο ένα τμήμα της να ταλαντώνεται και, κατά συνέπεια, μεταβαλλόταν το τονικό ύψος του παραγόμενου ήχου. Η μακρόχρονη και επίπονη ενασχόληση του Πυθαγόρα με τη μουσική και οι πειραματισμοί του στο μονόχορδο, έφεραν ως αποτέλεσμα την υποταγή του κατ' εξοχήν φευγαλέου και ασύλληπτου μουσικού ήχου στον άτεγκτο νόμο των αριθμών. Η ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ του μήκους του παλλόμενου τμήματος χορδής και του τονικού ύψους, που παράγεται από αυτό, οφείλεται στον Πυθαγόρα, ο οποίος, σύμφωνα με τον Παυσανία, ήθελε «τὴν οὐσίαν τοῦ παντὸς διὰ μουσικῆς συγκειμένην». Ο Πυθαγόρας γνώριζε εξάλλου ότι οι αριθμοί αποτελούν την αρχή «πάντων τῶν ὄντων» και επομένως, το χαώδες πλήθος των ήχων μπορεί να μεταβάλλεται σε μουσική, όταν του επιβάλλεται αναλογία, ρυθμός και μελωδία. Οι Πυθαγόρειοι επινόησαν την ιερά τετρακτύ και απέδιδαν σ' αυτήν πολλές ιδιότητες. Έτσι ο,τιδήποτε μουσικοθεωρητικό εξέφραζαν, το συνέδεαν με τους αριθμούς 1,2,3,4. Αυτός, άλλωστε, ήταν ο λόγος που ο Πυθαγόρειος κανών είχε 4 υποδιαιρέσεις. Αργότερα ο Πλάτων (4^{ος} αι. π.Χ.) πειραματίστηκε πάνω σε κανόνα με 12 υποδιαιρέσεις. Για τον υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων πάνω στον κανόνα εργάσθηκαν πολλοί θεωρητικοί, οι οποίοι έφεραν και την προσωνυμία «κανονικοί».

Ο Ευκλείδης (3^{ος} αι π.Χ.) στα δύο τελευταία θεωρήματα (ιθ και κ) της πραγματείας του «*Κατατομή Κανόνος*»[1], δίνει οδηγίες για τη διαίρεση του κανόνος με γεωμετρικό τρόπο έτσι, ώστε να κατασκευασθεί ένα διατονικό σύστημα εύρους μιας δις διαπασών.

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (2^{ος} αι μ.Χ.) στα Αρμονικά του (βιβλίο ΙΙ, κεφάλαιο 13), αναφέρει ότι ο Δίδυμος ο Αλεξανδρεύς (1^{ος} αι μ.Χ.) πειραματίστηκε πάνω στον κανόνα, χρησιμοποιώντας τα τμήματα εκατέρωθεν του υπαγωγέα, προκειμένου να πάρει τους λόγους του ενός τμήματος προς το άλλο και των δύο τμημάτων προς ολόκληρο το μήκος. Ο Πτολεμαίος θεωρούσε το μονόχορδο ανεπαρκές όργανο και ανέδειξε τις αδυναμίες του ως σολιστικό όργανο, προτείνοντας καλύτερους τρόπους κατασκευής του. Στο 2^{ο} βιβλίο των Αρμονικών του, κεφ. 2, παρουσιάζει τον επονομαζόμενο *Ελικώνα*, μια εφεύρεση – κατασκευή, γεωμετρικής φιλοσοφίας, που εχρησιμοποιείτο από ορισμένους θεωρητικούς. Ο Ελικών, ως μετεξελιγμένος μηχανισμός του μονοχόρδου, χρησιμοποιήθηκε για επίδειξη των αρμονικών σχέσεων των μουσικών συμφωνιών[2] και του τόνου. Ο Ελικών περιγράφεται επίσης από τον Αριστείδη Κοϊντιλιανό (1^{ος}/3^{ος} αι μ.Χ.) στο σύγγραμμά του *Περί Μουσικής* (Βιβλίο ΙΙΙ κεφ.3), τον Πορφύριο (3^{ος} αι. μ.Χ.) στα *Σχόλιά του στα Αρμονικά του Πτολεμαίου* (Βιβλίο ΙΙ κεφάλαιο 2) και τον Γεώργιο Παχυμέρη (13^{ος} -14^{ος} αι. μ.Χ.) στην πραγματεία του *Περί αρμονικής* (κεφάλαιο ΙΖ'). Το εργαλείο αυτό πήρε την ονομασία του από το ομώνυμο όρος των Θηβών, όπου κατοικούσαν οι Ελικωνιάδες Μούσες. «Ἑλικῶνα φασὶν ἀπ' ὄρους Ἑλικῶνος, ὅπου Μοῦσαι

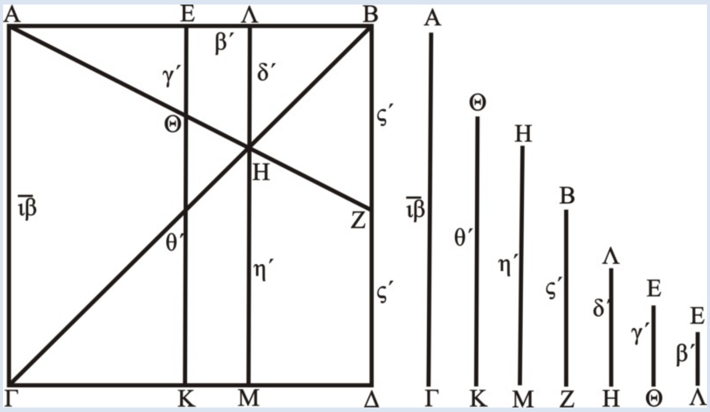
---

[1] Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Κατατομή Κανόνος*, Εκδόσεις Γεωργιάδης, Αθήναι 1998.

[2] Συμφωνία: το ταίριασμα δύο φθόγγων, συμφωνία (με την έννοια όχι της συνήχησης αλλά της αρμονικής σχέσης δύο φθόγγων),από το ρήμα συμφωνέω-ώ: φωνῶ ὁμοῦ, ενώνω τη φωνή μου με άλλη, είμαι ομόφωνος, ομόηχος, ομόφθογγος, μελωδώ συμφώνως, συνάδω. Οι συμφωνίες που αναγνώριζαν οι αρχαίοι Έλληνες ήταν η διά τεσσάρων (4:3), η διά πέντε (3:2), η διά πασών (2:1), η διά πασών και διά τεσσάρων (8:3), η διά πασών και διά πέντε (3:1) και η δις διά πασών (4:1). Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι όλες οι συμφωνίες εξεφράζοντο δια των αριθμών 1,2,3,4 της ιεράς τετρακτύος.

μυθεύονται χορεύειν" αναφέρει ο Πορφύριος (αυτόθι, κεφ.2). Επίσης, ο Παχυμέρης κάνει την ίδια αναφορά: «Ἑλικών ἐκλήθη ἀπὸ Ἑλικῶνος τοῦ ὅρους τῶν Μουσῶν» (αυτόθι, κεφ.ΙΖ').

Ο Ελικών ήταν μία γεωμετρική κατασκευή κατατομής κανόνος. Διέθετε 4 χορδές και μια διαγώνια γέφυρα. Τα ανάλογα μήκη για τις συμφωνίες κατασκευάζονταν με γεωμετρικές διαδικασίες επί δεδομένου τετραγώνου πλευράς ίσης με 12 μονάδες μήκους. Ο Πτολεμαίος παραθέτει αναλυτικά τον τρόπο κατασκευής του Ελικώνα ως εξής: στο τετράγωνο ΑΒΓΔ[3] (σχήμα 1) βρίσκουμε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΔ, Ε και Ζ, αντίστοιχα. Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΓ και από το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΓ, το Η, φέρουμε την ΛΜ παράλληλη προς την ΑΓ. Στη συνέχεια από το Ε φέρουμε την ΕΚ παράλληλη προς την ΑΓ. Δεχόμαστε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου ίσο με 12, επειδή διευκολύνει στη διαχείριση των μουσικών συμφωνιών. Από ομοιότητες κατάλληλων τριγώνων (ΑΒΖ και ΑΕΘ, ΓΒΔ και ΓΗΜ, ΑΒΖ και ΑΛΗ) προκύπτει ότι ΑΓ = 12, ΘΚ = 9, ΗΜ = 8, ΒΖ=ΖΔ=6, ΛΗ=4, ΕΘ =3, ΕΛ=2. [4]



Σχήμα 1. Ο Ελικών (1ος τρόπος, με σταθερή γέφυρα)

Όταν, λοιπόν, τοποθετηθούν τέσσερις ισότονες χορδές στις θέσεις των ΑΓ, ΕΚ, ΛΜ και ΒΔ ευθειών[5] με εφαρμοσμένο σ' αυτές κανόνιον (=γέφυρα) στη θέση της ΑΖ και εφαρμοσθούν οι αριθμοί, στην ΑΓ ο 12, στη ΘΚ ο 9, στη ΗΜ ο 8, σε κάθε μία από τις ΒΖ και ΖΔ ο 6, στη ΛΗ ο 4, στην ΕΘ ο 3, παράγονται όλες οι μουσικές συμφωνίες και ο τόνος. Υπογραμμίζεται ότι ως μήκη ηχούντων τμημάτων χορδών χρησιμοποιούνται όλα τα τμήματα εκατέρωθεν του υπαγωγέα.

Η διά τεσσάρων, σε επίτριτο λόγο,[6] συνίσταται από τις ΑΓ και ΘΚ, ΗΜ και ΖΔ, ΛΗ και ΕΘ. Η διά πέντε, σε λόγο ημιόλιο,[7] από τις ΑΓ και ΗΜ, ΘΚ και ΖΔ, ΒΖ και ΛΗ. Η διά πασών, σε διπλάσιο λόγο, από τις ΑΓ και ΖΔ, ΗΜ και ΛΗ, ΒΖ και ΕΘ. Η διά πασών και διά τεσσάρων σε διπλασιεπιδιμερή λόγο, από τις ΗΜ και ΕΘ. (Αξίζει να σημειωθεί ότι το διάστημα διά πασών και διά τεσσάρων, το οποίο εκφράζεται με την πολλαπλασιεπιμερή αριθμητική σχέση 8:3, για

---

[3] Έτσι ορίζει το τετράγωνο ο Πτολεμαίος.

[4] Εφόσον το Ζ είναι μέσον της ΒΔ, προκύπτει ότι ΑΓ = 2 ΒΖ =2ΖΔ $\Rightarrow$ ΒΖ = ΖΔ =6.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΘ είναι όμοια, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{AB}{EB} = \frac{BZ}{E\Theta} \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{6}{E\Theta} \Rightarrow E\Theta = 3$$. Επομένως ΘΚ=ΕΚ-ΘΚ=12-3=9

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι ΑΓ=2ΒΖ=4ΕΘ και ΑΓ=4/3 ΘΚ. Δηλαδή, η ΑΓ είναι τετραπλάσια της ΕΘ και επίτριτος της ΘΚ. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΓΒΔ και ΓΗΜ, ΑΒΖ και ΑΛΗ προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις: $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma M} = \frac{B\Delta}{HM}$ και $\frac{AB}{A\Lambda} = \frac{BZ}{\Lambda H}$.

Επειδή ΒΔ =2 ΒΖ (Ζ μέσον) προκύπτει ότι ΗΜ = 2 ΛΗ. Αφού ΛΗ + ΗΜ = 12 $\Rightarrow$ ΛΗ = 4 και ΗΜ = 8. Άρα ΑΓ είναι ημιόλια της ΗΜ και τριπλάσια της ΗΛ. Επίσης προκύπτει ότι ΕΛ=2.

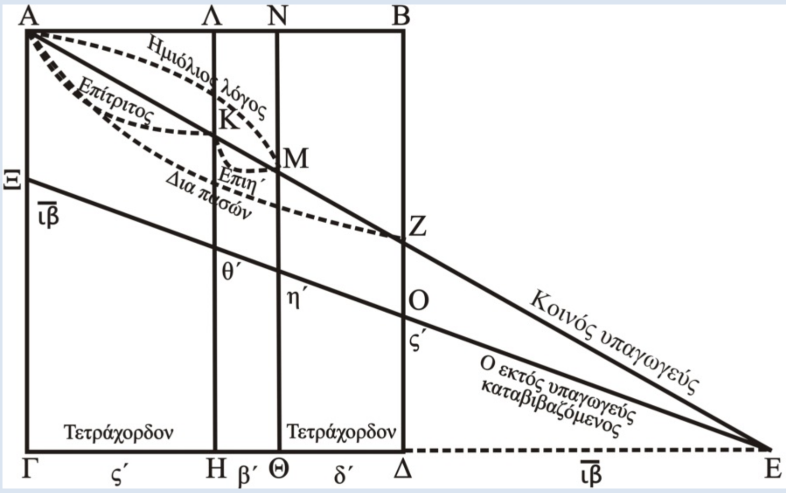
[5] Ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί τον όρο «ευθειών» αντί «ευθυγράμμων τμημάτων».

[6] Επίτριτος λόγος = 1+1/3 = (3+1)/3.

[7] Ημιόλιος λόγος= 1+1/2 = (2+1)/2.

τους Πυθαγόρειους θεωρείται διάφωνο[8].) Η διά πασών και διά πέντε, σε τριπλάσιο λόγο, από τις ΑΓ και ΛΗ, ΘΚ και ΕΘ. Η δις διά πασών, σε τετραπλάσιο λόγο, από τις ΑΓ και ΕΘ. Και, επιπλέον, ο τόνος σε επόγδοο λόγο[9], από τις ΘΚ και ΗΜ.

Ο Πτολεμαίος στη συνέχεια, μας δίνει μια παραλλαγή του Ελικώνα, παραθέτοντας το ίδιο τετράγωνο (σχήμα 2), στο οποίο προεκτείνοντας την ΓΔ, λαμβάνουμε ΓΔ=ΔΕ. Διαιρούμε την ΓΔ, όπως παραπάνω, σύμφωνα με τους γνωστούς λόγους των συμφωνιών και στα σημεία τομής πάνω στην ΓΔ τοποθετούμε ισότονες χορδές, ώστε να είναι παράλληλες προς την ΑΓ. Σε αυτές τις χορδές τοποθετούμε κοινό υπαγωγέα, τον ΑΖΕ, που ενώνει τα σημεία Ε, Α. Οι ΑΓ και ΖΔ ορίζουν δονούμενα μήκη τμημάτων χορδής που παράγουν τη συμφωνία μιας διά πασών, διότι ο λόγος τους είναι διπλάσιος. Αυτό προκύπτει από το ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΖΕΔ είναι όμοια.[10]



Σχήμα 2. Ο Ελικών (2[ος] τρόπος, με κινούμενη γέφυρα)

Ο Πτολεμαίος προτείνει να πάρουμε την ΓΗ κατά το ¼ της ΓΕ, την ΓΘ κατά το 1/3 αυτής και να ανυψώσουμε διά των σημείων Η και Θ, τις χορδές ΗΚΛ και ΘΜΝ, ισότονες προς τις πρώτες χορδές. Έτσι η ΑΓ γίνεται επίτριτος της ΚΗ και ημιόλια της ΜΘ, η ΜΘ επίτριτος της ΖΔ, η ΚΗ ημιόλια της ΖΔ και επιπλέον η ΚΗ επόγδοος της ΜΘ. Συνεπώς, ο θεμελιώδης ήχος[11] δίνεται από την ΑΓ, η διά τεσσάρων από την ΚΗ, η διά πέντε από την ΜΘ και η διά πασών από την ΖΔ.

Είναι δυνατόν να αντικατασταθεί το υποστήριγμα ΑΕ από ένα άλλο ΞΕ. Η νέα θέση του υπαγωγέα_(ΞΕ), θα συνεπάγεται ότι τα μήκη των χορδών που ηχούν θα γίνονται σταδιακά μικρότερα, καθώς η διαγώνια γέφυρα, περιστρεφόμενη γύρω από το σημείο Ε, θα κατεβαίνει από το σημείο Α προς το σημείο Ξ και οι προαναφερθέντες ήχοι θα μεταφερθούν σε μεγαλύτερα τονικά ύψη. Εάν ληφθεί το Ξ μέσον της ΑΓ και η γέφυρα φτάσει στη θέση ΕΞ, οι συμφωνίες εντός μιας δια πασών και ο επόγδοος, θα ηχούν μια οκτάβα ψηλότερα, αφού τα μήκη όλων των χορδών (που είναι αντιστρόφως ανάλογα των παραγομένων συχνοτήτων), θα έχουν υποδιπλασιαστεί.

Η δεύτερη αυτή κατασκευή του Ελικώνος, η οποία αποτελεί παραλλαγή της πρώτης, έχει τη δυνατότητα, λόγω του κινητού υπαγωγέα να καθιστά όλους τους φθόγγους ενός συστήματος

8 Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, *Ευκλείδου Κατατομή Κανόνος*, Εισαγωγή, στιχ. 23-24.

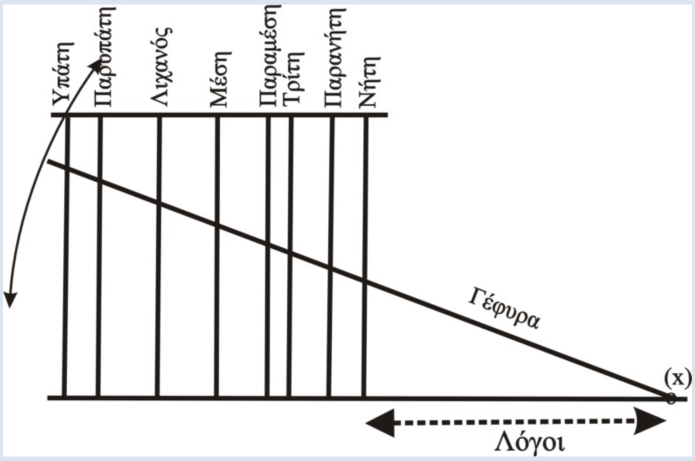
9 Επόγδοος = 1+1/8 = (8+1)/8.

10 Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΖΕΔ είναι όμοια, οπότε: $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{Z}\Delta} \Rightarrow \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{Z}\Delta} = 2$.

11 Δηλαδή ο ήχος που παράγεται από την ταλάντωση ολοκλήρου του μήκους της χορδής ΑΓ.

οξύτερους, ενώ διατηρείται η διαίρεση της διά πασών. Οι διαστηματικοί λόγοι διατηρούνται[12] κατά την οποιαδήποτε θέση της γέφυρας, διότι τα οριζόμενα δονούμενα τμήματα χορδών αποτελούν ανάλογες πλευρές ομοίων ορθογωνίων τριγώνων. Θεωρητικώς οι οριακές θέσεις της γέφυρας είναι: ΑΕ, οπότε η ΑΓ ισούται με το δονούμενο μήκος ολόκληρης της χορδής του οργάνου και ΓΕ χωρίς, όμως, πρακτικό ενδιαφέρον λόγω του μηδενικού μήκους των δονουμένων τμημάτων της χορδής. Μεταξύ αυτών των δύο θεωρητικών οριακών θέσεων της γέφυρας υπάρχει πληθώρα θέσεών της με πρακτικό ενδιαφέρον.

Ο Πτολεμαίος στη συνέχεια, προτείνει έναν ευφυή συνδυασμό της αρχής του Ελικώνος με τον οκτάχορδο κανόνα[13] (σχήμα 3).



Σχήμα 3. Η πτολεμαϊκή διασκευή του Ελικώνος

Αυτό το επιτυγχάνουμε με το να μοιράσουμε τις αποστάσεις ΓΗ και ΘΔ (σχήμα 4) και να παρεμβάλλουμε νέες χορδές, ώστε να έχουμε όλους τους λόγους ενός τετραχόρδου συγκεκριμένου γένους. Ο Ελικών δίνει τα μήκη των δονουμένων τμημάτων χορδών για τους εστώτες φθόγγους: υπάτη, μέση, παραμέση, νήτη. Αν θέλαμε, να παρεμβάλλουμε χορδές για τους κινούμενους φθόγγους των τετραχόρδων, παρυπάτη, λιχανό, τρίτη, παρανήτη, ώστε να δημιουργηθεί μια κλίμακα διά πασών π.χ. στο διατονικό γένος, τότε η ρύθμιση των αποστάσεων μεταξύ των χορδών γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε τα μήκη τους να σχηματίσουν τους επιθυμητούς εκ του ηρμοσμένου διαστηματικούς λόγους. Τα ταλαντούμενα μήκη ΑΓ της υπάτης και ΥΠ της παρυπάτης θα βρίσκονται σε λόγο 256:243, λόγος που εκφράζει το λείμμα.

Επίσης, τα ταλαντούμενα μήκη ΥΠ της παρυπάτης και ΡΦτης λιχανού θα βρίσκονται σε λόγο

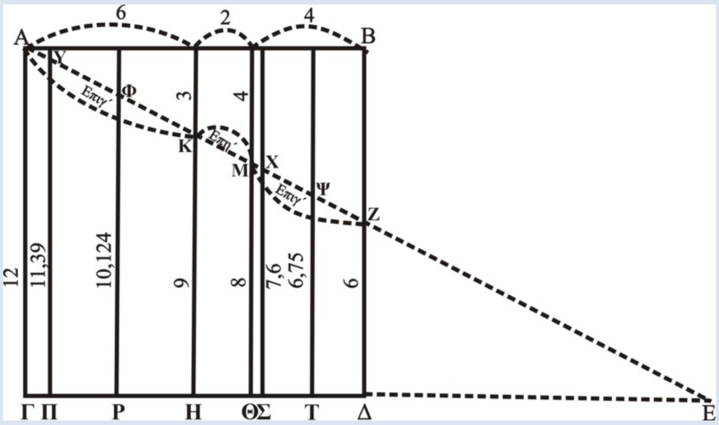
9:8, λόγος που εκφράζει τον τόνο. Λόγω των σχέσεων αυτών και δεδομένου ότι το μήκος της υπάτης είναι 12 μονάδες μήκους, προκύπτουν μήκη 11,39 και 10,124 για την παρυπάτη και την λιχανό αντίστοιχα.[14]

---

[12] Πράγματι, όπως η ΑΓ είναι προς την ΖΔ διπλάσια, έτσι είναι και η ΞΓ προς την ΟΔ και ομοίως συμβαίνει και με τις υπόλοιπες.

[13] Ο οκτάχορδος κανόνας στο διατονικό γένος είναι διηρημένος σε λείμμα, τόνο, τόνο, τόνο, λείμμα, τόνο, τόνο.

[14] $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{\mathrm{ΥΠ}} = \frac{256}{243} \Rightarrow \mathrm{ΥΠ} = \frac{243}{256}$ ΑΓ (1) $\frac{\mathrm{ΥΠ}}{\mathrm{ΦΡ}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \mathrm{ΦΡ} = \frac{8}{9}\mathrm{ΥΠ}$ (2) Επειδή θεωρήσαμε ότι ΑΓ $= 12$,τότε λόγω των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει ότι ΥΠ $= 11{,}39$ και ΦΡ $= 10{,}124$.



Σχήμα 4. Καθορισμός δονουμένων τμημάτων χορδής κινουμένων φθόγγων μιας διά πασών στο διατονικό γένος

Οι χορδές υπάτη και παρυπάτη στο όργανο του Ελικώνα, θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το διπλάσιο της διαφοράς των μηκών της παρυπάτης από την υπάτη, δηλαδή 2(ΑΓ - ΥΠ),[15] οι χορδές παρυπάτη και λιχανός θα απέχουν μήκος 2(ΥΠ -ΦΡ). Αυτό ισχύει και για τις υπόλοιπες χορδές. Ομοίως εργαζόμαστε για τα μήκη ΧΣ και ΨΤ των χορδών τρίτης και παρανήτης παίρνοντας ως αφετηρία το μήκος ΜΘ της παραμέσης το οποίο είναι 8 μονάδες μήκους.
Προκύπτει ότι ΧΣ=7,6 και ΨΤ= 6,75. Αυτό θα συνεπάγεται ότι τα ταλαντούμενα τμήματα των 8 χορδών θα έχουν μήκος, αντίστοιχα:

Υπάτη	Παρυπάτη	Λιχανός	Μέση	Παραμέση	Τρίτη	Παρανήτη	Νήτη	
12	11,39	10,124	9	8	7,6	6,75	6	(μονάδες μήκους)

Επίσης, προκύπτει ότι η ΓΕ θα είχε υποδιαιρεθεί στα κάτωθι ευθύγραμμα τμήματα με μήκη:
ΓΠ = 1,22 ΓΡ = 3,752 ΓΗ =6 ΓΘ = 8 ΓΣ = 8,8 ΓΤ = 10,5 ΓΔ = 12 (μονάδες μήκους)

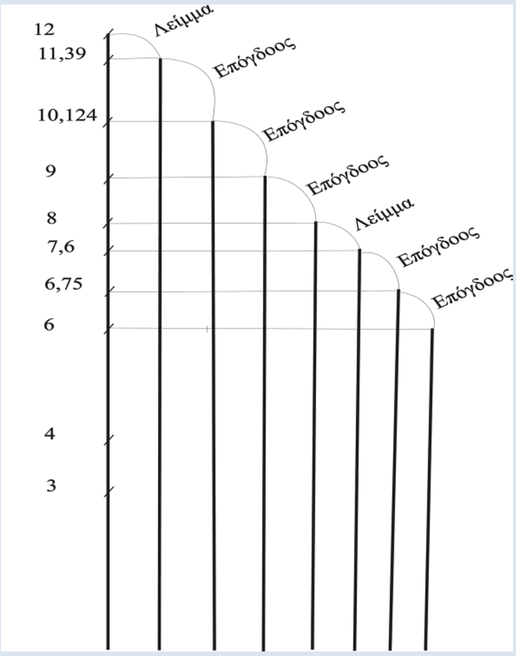
Με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε την ΓΕ ώστε να επιτύχουμε επιθυμητούς εκ του ηρμοσμένου λόγους που να αντιστοιχούν είτε στο χρωματικό, είτε στο εναρμόνιο γένος της αρχαίας ελληνικής μουσικής.

Σε μια τέτοια κατασκευή οποιοδήποτε σύνολο των λόγων θα πρέπει να ελέγχεται για την ακρίβειά του και να ταιριάζει με τις «προσδοκίες» του αυτιού. Ο Πτολεμαίος προτείνει να ελέγξουμε εμείς όλους τους λόγους οι οποίοι αποδίδονται στις διαιρέσεις των γενών (Βιβλίο Ι, κεφ. 15-16).

Μαρτυρίες σχετικά με την πανδουρίδα,[16] δείχνουν ότι επάνω στο μάνικο του οργάνου υπήρχε ταστιέρα για την ακριβή απόδοση συγκεκριμένων φθόγγων.[17] Σε τέτοιου είδους όργανα, ο Ελικών δίνει την δυνατότητα καθορισμού των θέσεων όπου θα έπρεπε να τοποθετηθούν οι δεσμοί επί του μάνικου, ώστε να παράγονται επιθυμητά μουσικά διαστήματα.
Στην πράξη, αυτό επιτυγχάνεται με την κατασκευή τετραγώνου, πλευράς ίσης με το ολικό μήκος της χορδής του οργάνου, δηλαδή το μήκος το οποίο ορίζεται από τη γέφυρα ως το σημείο πρόσδεσης της χορδής. Βρίσκοντας τα μήκη των τμημάτων του Ελικώνος, πραγματοποιείται με τη χρήση διαβήτη η προβολή των μηκών αυτών πάνω στη χορδή του οργάνου. Με αυτόν τον τρόπο καθορίζονται οι θέσεις όλων των δεσμών, ώστε να δημιουργηθεί, επί παραδείγματι, μια διά πασών στο διατονικό γένος (σχήμα 5). Με αυτό το γεωμετρικό εργαλείο, τον Ελικώνα, αφ' ενός μεν διεξάγονται ακουστικά πειράματα περί των

[15] ΓΠ= ΓΕ-ΠΕ $\Rightarrow$ ΓΠ=2ΑΓ-2ΥΠ $\Rightarrow$ ΓΠ=2(ΑΓ-ΥΠ).
[16] Αρχαίο έγχορδο μουσικό όργανο της οικογένειας του λαούτου, πρόγονος του ταμπουρά.
[17] Ο Νικόμαχος Γερασηνός ($2^{ος}$ αι.μ.Χ.) ταυτίζει την πανδουρίδα με το μονόχορδο του Πυθαγόρα, γεγονός που οδηγεί στη ιδέα ότι είχε υπόψη του μονόχορδα λαούτα.

συμφωνιών των ήχων, αφετέρου δε, καθίσταται εφικτή η ακριβής τοποθέτηση των δεσμών επί του μάνικου των εγχόρδων από εμπειροτέχνες κατασκευαστές οργάνων.



Σχήμα 5. Τοποθέτηση δεσμών με τη χρήση διαβήτη

Συνοψίζοντας τις παραλλαγές με τις οποίες μας δίδεται ο Ελικών, καταλήγουμε:

<u>1ος τρόπος</u>
Με ακίνητη γέφυρα: καθορισμός μηκών δονουμένων τμημάτων χορδής εστώτων φθόγγων εντός μιας δις διά πασών (υπάτη: σταθερού τονικού ύψους).

<u>2ος τρόπος</u>
Με κινούμενη γέφυρα καθορισμός μηκών δονουμένων τμημάτων χορδής εστώτων φθόγγων εντός μιας διά πασών (υπάτη: μεταβλητού τονικού ύψους).

<u>Συνδυασμός του 2ου τρόπου με τον οκτάχορδο κανόνα</u>
Με κινούμενη γέφυρα: καθορισμός μηκών δονουμένων τμημάτων χορδής εστώτων και κινουμένων φθόγγων εντός μιας διά πασών (υπάτη: μεταβλητού τονικού ύψους).

Πλάτωνος *Πολιτεία*
(ή περί δικαίου ή περί Πυθαγορείου Μουσικής)

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Διευθυντής Τομέως Τεχνολογίας Ήχου, Μουσικοπαιδαγωγικής
& Βυζαντινής Μουσικολογίας
Τμήμα Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφική Σχολή
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
hspyridis@music.uoa.gr

Προλεγόμενα
Το ενδιαφέρον μου για τον Πλατωνισμό ήτο κατ' αρχάς το ενδιαφέρον του επιστήμονος που ασχολείται με τον Πυθαγορισμό, στοχεύοντος στην κατανόηση του τρόπου μελέτης υπό των πυθαγορείων των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί σειράν αιώνων κατ' αυτόν ή εκείνον τον τρόπο στην ανθρωπίνη αίσθηση.
Τοιουτοτρόπως, ο άνθρωπος από της αρχαιότητος μέχρι την σημερινήν εποχή δεν κάνει τίποτα άλλο από το να προσπαθεί να ανακαλύψει και διατυπώσει με την επιστημονική γνώση, την οποία εκάστοτε διαθέτει, την φύση και την μορφή αυτών των φαινομένων κατά την Πλατωνική φιλοσοφική και επιστημονικήν άποψη «σώζειν τα φαινόμενα».
Στην προσπάθειά μου αυτήν εντυπωσιάσθηκα τα μάλα από τον μυστικισμό, ο οποίος διέκρινε την μετάδοση της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμυημένων οπαδών του Πυθαγορισμού, αλλά συντόμως διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό.
Οι Αιγύπτιοι ιερείς, οι διδάσκαλοι του Πυθαγόρου, δεν απεκάλυπταν τις αρχές της επιστήμης άνευ ενδελεχούς ελέγχου, παρά μόνον κατόπιν φοβερών δοκιμασιών και όρκων σε άτομα, τα οποία ήσαν άξια να τις κατέχουν. Έτσι εξηγείται η μακρά σιωπή, την οποίαν επέβαλε ο Πυθαγόρας εις τους μαθητές του (ακουσματικοί) και το πέπλον μυστηρίου, το οποίο υποχρεωτικώς εχρησιμοποίουν οι Πυθαγόρειοι κατά τις διδασκαλίες των.
Σχετικώς αναφέρεται και ο Ιάμβλιχος (*Περί του Πυθαγορικού Βίου*, 23, 103, 1 -105, 9)
«*Ἀναγκαιότατος δὲ παρ' αὐτῷ τρόπος διδασκαλίας ὑπῆρχε καὶ ὁ διὰ τῶν συμβόλων. ὁ γὰρ χαρακτὴρ οὗτος καὶ παρ' Ἕλλησι μὲν σχεδὸν ἅπασιν ἅτε παλαιότροπος ὢν ἐσπουδάζετο.*»
Επειδή, λοιπόν, δεν απεκαλύπτοντο οι αρχές οιασδήποτε επιστήμης εις τους κοινούς θνητούς παρά μόνον στους μεμυημένους, δια ταύτα και οι αρχές, στις οποίες εβασίζετο η μουσική επιστήμη, δηλαδή το μουσικό σύστημα των αρχαίων εθνών, παρέμειναν κρυφές και αρρήκτως συνδεδεμένες με σημεία, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά, τα οποία, εν εναντία περιπτώσει, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρέβλωση.

Να μην λησμονούμε εμείς οι σύγχρονοι ότι η μουσική δεν είναι απλώς και μόνον η τέχνη του συνδυασμού των φθόγγων ή το ταλέντο της αναπαραγωγής των με έναν ευχάριστο για τα αυτιά μας τρόπο. Η μουσική, από διανοητικής απόψεως, όπως την εννοούσαν οι Αρχαίοι, ήτο η γνώση της τάξεως όλων των πραγμάτων, η επιστήμη των αρμονικών σχέσεων του Σύμπαντος, την οποίαν εθεμελίωναν επάνω σε σταθερές και αναλλοίωτες αρχές, ρυθμιζόμενες μόνον από τις ανάλογες αρμονίες των αριθμών.
Η μουσική εθεωρείτο ένα μέσον (medium) ικανό να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνον που ο μελετητής θα έπρεπε να ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.
Κατά τον Πλάτωνα, δύο εντελώς αντίθετες οντότητες είναι αδύνατον να συνδεθούν μεταξύ των χωρίς την παρεμβολή μιας τρίτης, τουλάχιστον, οντότητος. Αυτή η τρίτη οντότης είναι ο δεσμός, η μεσότης μεταξύ των δύο ακραίων οντοτήτων.
«*τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν*» (Πλάτωνος *Τίμαιος*).
Μεταξύ των αντιθέτων οντοτήτων «κατανοητό – ακατανόητο» ως δεσμός παρεμβάλλεται η πνευματική και ουράνια μουσική, η οποία είχε φθάσει στο υψηλότερο σημείον τελειότητος. Ήτο μια πνευματική γλώσσα, η οποία εφηρμόζετο σε μεταφυσικές έννοιες, αποκαλύπτοντας μέσα από αυτές τους αρμονικούς νόμους.
Οι «παλαιοὶ»[1] Έλληνες φιλόσοφοι, τραγικοί και ποιητές εδίδασκον κρυφίως «μύθῳ φιλοσοφοῦντες» κάποιες απόκρυφες διδασκαλίες, κεκαλυμμένες με αριστοτεχνικόν φιλοσοφικόν τρόπο.
«*Οἱ γὰρ παλιαοὶ τὰ ποιήματα αὐτῶν πρῶτον ἐν προοιμίοις καὶ αἰνίγμασιν γεγράφασιν. ὕστερον δὲ καὶ καθόλου φανερῷ ἐχρῶντο τῷ λόγῳ*» (*Σχόλια εις τον Προμηθέα Δεσμώτην του Αισχύλου*, 610, 3).
Όπως έχει ήδη λεχθεί, η απόκρυφη γνώση δεν επετρέπετο «ἐπὶ ποινῇ θανάτου» να κοινολογηθεί υπό των μεμυημένων εις τους κοινούς θνητούς, διότι «*οὐ τὰ πάντα τοῖς πᾶσι ρητὰ*».
Κατά τον Αριστοτέλη «*ὁ μύθος σύγκειται ἐκ θαυμασίων*».
Τα «θαυμάσια» αυτά δύνανται ακόμη να ισοσταθμίσουν, σε κάποιον βαθμό, το απίστευτον του μύθου.
Το επιφανειακό νόημα των αλληγορικών κειμένων, αυτό το οποίο εμπεριέχουν οι γραμμές, οι «αράδες» των κειμένων, το κατανοούμε με την βοήθεια της Γραμματικής και του Συντακτικού (υποκείμενο – ρήμα - αντικείμενο). Η αλληγορία, δηλαδή το κωδικοποιημένο μήνυμα, το οποίον απευθύνεται προς τους μεμυημένους, ευρίσκεται «ανάμεσα» ή «πίσω» από τις γραμμές των κειμένων.
Για την εξόρυξη αυτής της εκάστοτε αλληγορίας, πιστεύω ότι απαιτείτο η γνώση των Πυθαγορείων Μαθηματικών, Αριθμητικής, Γεωμετρίας – Στερεομετρίας, Σφαιρικής (Αστρονομίας) και της Πυθαγορείου Αρμονικής (Μουσικής), της κορωνίδος της Πυθαγορείου Μαθηματικής Επιστήμης.

---

[1] οἱ παλαιοὶ πολλοῖς αἰνίγμασιν ἐχρῶντο καὶ μάλιστα πρὸς τοὺς ἱερεῖς,
Plutarchus, Αίτια Ρωμαϊκά και Ελληνικά, 281, A10-B1.

Οἱ γὰρ παλιαοὶ ταὰ ποιήματα αὐτῶν πρῶτον ἐν προοιμίοις καὶ αἰνίγμασιν γεγράφασιν. ὕστερον δὲ καὶ καθόλου φανερῷ ἐχρῶντο τῷ λόγῳ.
Σχόλια εις τον Προμηθέα Δεσμώτην του Αισχύλου, 610, 3.

Όμως, η απόκρυφη γνώση, μολονότι δεν επετρέπετο να κοινολογηθεί από τους κατέχοντας αυτήν εις τους κοινούς θνητούς, εντούτοις ενίοτε εκοινολογείτο τεχνιέντως.
Ο Αισχύλος, ο τραγικός ποιητής, επολέμησε με μεγάλο θάρρος στην μάχη του Μαραθώνος, την ναυμαχία της Σαλαμίνος και πιθανόν στην μάχη των Πλαταιών. Στην μάχη του Μαραθώνος μάλιστα επληγώθη. Συμφώνως προς τον Κλήμεντα τον Αλεξανδρέα, ο Αισχύλος εκατηγορήθη ενώπιον του Αρείου Πάγου για ασέβεια καί εκινδύνευσε η ζωή του, διότι στις τραγωδίες του «Ευμενίδες» και «Προμηθεύς Δεσμώτης» απεκάλυπτε εμμέσως πλην σαφώς πληροφορίες των Ελευσινίων Μυστηρίων. Εσώθη μόνον και μόνον επειδή ετύγχανε Μαραθονομάχος και Σαλαμινομάχος. Αυτή η καταγεγραμμένη πληροφορία, καθιστά λογική και βάσιμη την υπόθεση ότι η επισταμένη μελέτη των τραγωδιών του πιθανότατα να δώσει σημαντικά στοιχεία για την αληθή φύση των εν λόγω μυστηρίων.
Ο Επίχαρμος, ο υιός του Ελοθαλούς, φέρεται ως ο κύριος κωμικός ποιητής μεταξύ των Δωριέων κατά την καταγωγήν, ως ο εφευρέτης της κωμωδίας, την οποίαν ο Αριστοτέλης περιγράφει με τις λέξεις «*τὸ μύθους ποιεῖν*» και ο Πλάτων παρατηρεί «*οἱ ἄκροι τῆς ποιήσεως ἑκατέρας, κωμωδίας μὲν Ἐπίχαρμος, τραγωδίας δὲ Ὅμηρος*». Κατά τους Διογένη Λαέρτιον, Πλούταρχον και Suida υπήρξεν μαθητής του μεγάλου φιλοσόφου Πυθαγόρου. Ο Επίχαρμος κατεχώρισε σε ποιήματά του διδασκαλίες του Πυθαγόρου, τις οποίες μετέδιδε κρυφίως, κεκαλυμμένες με αστεϊσμούς (Ιάμβλιχος, Βί. Πυθ. 266).
Ο Ίππασος, ο Μεταποντίνος, υπήρξε από τους σημαντικοτέρους πρωίμους Πυθαγορείους. Συμφώνως προς τον Ιάμβλιχο (Βίος Πυθαγόρου 88, 246-247) επρόδωσε το απαράβατον πυθαγορικόν δόγμα περί εχεμυθείας και απεκάλυψε την κατασκευήν του εγγεγραμμένου εις σφαίραν πενταγωνικού δωδεκαέδρου ή το μυστικό των ρητών και των αρρήτων αριθμών, με αποτέλεσμα να εκδιωχθεί από την πυθαγορική κοινότητα και να τον τιμωρήσει και ο θεός, πνίγοντάς τον στην θάλασσα.
Ο Πλάτων και εγνώριζε και κατείχε πυθαγόρειες απόκρυφες διδασκαλίες. Μερικές εξ αυτών των αποκρύφων διδασκαλιών τις κατεχώρισε σε διαλόγους του, διαλόγους μεταξύ συζητητών ήδη τεθνεώτων –δια παν ενδεχόμενον-, τις οποίες μετέδιδε κεκαλυμμένες με αριστοτεχνικό φιλοσοφικό τρόπο.
Μελετώντας την πορεία των μουσικών ιδεών από τον Πυθαγόρα στον Πλάτωνα, σύντομα αντελήφθηκα ότι ο πλατωνισμός αντιμετωπίζει τη μουσική με μια νέα οπτική. Μια οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνο που ο μελετητής θα πρέπει ν' ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.
Κατάλαβα ότι ο μελετητής θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τον Πλάτωνα ως την πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για να μπορέσει να εισχωρήσει στην περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών αφενός και αφετέρου να συσχετίσει την τότε με τη σημερινή επιστημονική ορολογία.
Με την *Πολιτεία*, το σημαντικότερο ίσως έργο της Πλατωνικής γραμματολογίας ξεκίνησα ν' ασχολούμαι από τοπικιστικά κίνητρα και μόνον και συνέχισα με την προτροπήν του γεραρού κοσμήτορος κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκη.
Τυγχάνω ως προς την καταγωγήν Θραξ εκ Θρακός πατρός και Θράσσης μητρός.
Ο εν λόγω Πλατωνικός διάλογος αναφέρεται στη συμμετοχή των πρωταγωνιστών στην εορτή των Βενδιδείων, προς τιμήν της Βενδίδος ή Βένδιδος, μιας Θρακικής σεληνιακής θεότητος, η οποία εταυτίσθη προς την Εκάτη ή την Άρτεμι ή και την Περσεφόνη. Στη Θράκη τα Βενδίδεια ήσαν εορταί με οργιαστικόν χαρακτήρα και διεδόθησαν στο

Βυζάντιο, στις ελληνικές αποικίες επί της θρακικής χερσονήσου, στη Λήμνο, στην Αμφίπολη και δια των Θρακών εμπόρων στον Πειραιά.

Πυθαγορεια αριθμολογια και δικαιο

Όπως έχω ήδη αναφέρει, οι αλληγορικές πλατωνικές περικοπές με μαθηματικές εκφράσεις, όπως η συγκεκριμένη, αντιμετωπίζονται σήμερα με μια νέα οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση. Η οπτική αυτή δεν πρόκειται να κερδίσει την άμεση αποδοχή και υποστήριξη των θεολόγων, των φιλοσόφων, των φιλολόγων, των μαθηματικών και των άλλων επιστημόνων, οι οποίοι έχουν καταστεί εξαιρετικά ειδικοί εις το να βλέπουν το σύνολο παρά τη λεπτομέρεια. Επίσης δεν θα κερδίσει ούτε τους μουσικούς, οι οποίοι θεωρούν τη μουσική σαν έναν κλάδο διασκεδάσεως, ούτε και τους μουσικολόγους, οι οποίοι εξ ενστίκτου φοβούνται τους αριθμούς.

Διαβάζοντας πλατωνικά χωρία που περιλαμβάνουν είτε αριθμούς, είτε μαθηματικούς όρους, οι μεν φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνση σ' αυτά «*απλουστεύοντες το κείμενο*», οι δε μαθηματικοί τα αντιμετωπίζουν επιδερμικώς θεωρώντας τα ως διατυπώσεις «*ποιητικῇ ἀδείᾳ*».

Με την έννοια δίκαιο οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν την παροχή αμοιβαίων υπηρεσιών, δηλαδή την κατ' αμοιβαιότητα δικαιοσύνη, η οποία ασκείται εκουσίως από όλα τα μέλη της κοινωνίας και κατ' αυτόν τον τρόπο συνέχεται η πολιτική Κοινωνία.

Το πολίτευμα των Πυθαγορείων προέβλεπε την ύπαρξη ισορροπίας μεταξύ των διακριτών εξουσιών του κράτους. Όπως μας αναφέρουν οι Πολύβιος, Κικέρων και Πλούταρχος, το διακριτό είχε την αρχή του στη Λυκούργειο νομοθεσία και στο Σπαρτιατικό πολίτευμα.

Για τους Πυθαγορείους η έννοια της δικαιοσύνης καθορίζεται ως η δύναμη της διανομής του ίσου, που ανήκει στον καθένα. Αυτό είναι το λεγόμενο «*αναλογούν δίκαιον*». Το «*αναλογούν δίκαιον*» για τους φυσικούς αριθμούς της δεκάδος είναι ο μέσος όρος αυτών, δηλαδή

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{i} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Για τους Πυθαγορείους το θεμέλιο και η φύση της δικαιοσύνης εμφανίζονται σε όλα τα τετράγωνα των αριθμών (*αριθμοί ισάκις ίσοι*), διότι είναι το γινόμενο δύο ίσων αριθμών, αλλά ιδιαιτέρως η φύση της δικαιοσύνης αποκαλύπτεται στα τετράγωνα των περιττών αριθμών, επειδή έχουν ένα μέσον.

$$3^2 = 9 = 4 + 1 + 4$$

$$5^2 = 25 = 12 + 1 + 12$$

$$7^2 = 49 = 24 + 1 + 24$$

....

....

$$27^2 = 729 = 364 + 1 + 364$$

Ο Αρχύτας, ο Πυθαγόρειος, (Μαθηματικός, Μηχανικός, Στρατηγός και Πολιτικός ηγέτης του Τάραντος) μας αναφέρει ότι το Σύνταγμα ενός Κράτους μπορεί να καθορισθεί κατά τρεις διαφορετικούς τύπους του πολιτικού δικαίου.
Ο κάθε τύπος περιγράφεται από συγκεκριμένη μαθηματική αναλογία τέτοιας, ώστε μεταξύ των αριθμών της να αναφέρονται ωρισμένες σχέσεις βάσει των οποίων το Σύνταγμα κατανέμει εξουσίες και δικαιώματα στις πολιτικές υπηρεσίες και ανάμεσα στις τάξεις των πολιτών.
Έτσι, λοιπόν, το Ολιγαρχικό Δίκαιο και το Τυραννικό Δίκαιο θεμελιούνται επάνω στην αριθμητική αναλογία (1, 2, 3), η οποία εγκαθιστά μια μεγάλη ανισότητα μεταξύ του λόγου των μικρών σε σχέση με το λόγο των μεγάλων όρων της $\left(\frac{2}{1} > \frac{3}{2}\right)$, αφού ο διπλάσιος λόγος είναι μεγαλύτερος του ημιολίου.
Στο Ολιγαρχικό Δίκαιο οι λίγοι και στο Τυραννικό Δίκαιο ο ένας κυβερνούν την πολιτεία, επιδιώκοντας το δικό τους καλό και όχι αυτό της πολιτείας.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Αριθμητική	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N}$, τότε ισχύει: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$	3, 2, 1 $\left(\frac{2}{1} > \frac{3}{2}\right)$

Το Δημοκρατικό Δίκαιο θεμελιούται επάνω στην γεωμετρική αναλογία (1, 2, 4), η οποία εγκαθιστά ισότητα σχέσεων μεταξύ των λόγων των μεγάλων και των μικρών όρων της $\left(\frac{2}{1} = \frac{4}{2}\right)$ (αναλογία κατά ποιότητα).
Στο Δημοκρατικό Δίκαιο τόσο ο φτωχός, όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση της Πολιτείας.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Γεωμετρική	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N}$, τότε ισχύει: $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$	4, 2, 1 $\left(\frac{2}{1} = \frac{4}{2}\right)$

Η αναλογία, την οποία ο Αρχύτας ονομάζει Αρμονική (3, 4, 6), χρησιμεύει ως το υπόδειγμα για το Αριστοκρατικό και το Βασιλικό Δίκαιο και τούτο διότι αυτή εγκαθιστά μια μικρή ανισότητα μεταξύ των λόγων των μικρών σε σχέση με το λόγο των μεγάλων όρων της, αφού ο επίτριτος λόγος είναι μικρότερος του ημιολίου. Για το λόγο αυτό η αρμονική πρόοδος ονομάζεται *υπεναντία* της αριθμητικής προόδου.
Το δίκαιο της αριστοκρατίας αναγνωρίζει στους άξιους πολίτες περισσότερα δικαιώματα απ' ό,τι αναγνωρίζει το δίκαιο της ολιγαρχίας. Το δίκαιο της δημοκρατίας, όπως προανεφέρθη, δεν κάμνει καμμία διάκριση ανάμεσα στους πολίτες.
Κατά τον Στοβαίο (Στοβαίος IV.1. 131) το αριστοκρατικό δίκαιο είναι από ιδεολογικής απόψεως το καλύτερο, διότι μιμείται το δίκαιο της φύσεως, το οποίο κατ' αναλογία παρέχει στον καθέναν ό,τι του αξίζει.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Αρμονική ή Υπενάντιος	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N}$, τότε ισχύει: $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$	6, 4, 3 $\left(\frac{4}{3} < \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\right)$

Περί της Τετρακτύος
Ο Λουκιανός εις το έργον του Πράσις Βίων (βλέπε κατωτέρω) αναφέρει ότι η τετρακτύς, ήτοι η τετράς των πρώτων τεσσάρων ακεραίων αριθμών 1, 2, 3, 4, γεωμετρικώς εκφράζεται δια του «τελείου τριγώνου» -του ισοσκελούς-, διότι αριθμητικώς εκφράζεται δια του «τριγωνικού» αριθμού 10=1+2+3+4 (4 κατά δύναμιν, ήτοι οι τέσσερις πρώτοι φυσικοί αριθμοί και 10 κατ' αριθμόν, ήτοι το άθροισμα των μονάδων αυτών των πρώτων τεσσάρων φυσικών αριθμών, όπως αναφέρει στην Μαθηματική του Εισαγωγή ο Νικόμαχος ο Γερασηνός). Η τετρακτύς εμπεριέχει όλες τις μουσικές συμφωνίες. Πράγματι, 4:1 είναι ο τετραπλάσιος λόγος και εκφράζει τη συμφωνία (το εύφωνο μουσικό διάστημα) της δις διαπασών, 3:2 είναι ο ημιόλιος λόγος και εκφράζει τη διαπέντε συμφωνία ή διοξεία, ο 4:3 είναι ο επίτριτος λόγος και εκφράζει τη διατεσσάρων συμφωνία ή συλλαβά, 2:1 είναι ο διπλάσιος λόγος και εκφράζει τη διαπασών συμφωνία.

Σχήμα 1: Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος.

Υπό την έννοιαν «τετρακτύς» οι αρχαιοέλληνες σοφοί εθεώρουν αφενός τα τέσσερα στοιχεία, τα τέσσερα μέρη του κόσμου, τα τέσσερα πνεύματα, τους τέσσερις χυμούς, τις τέσσερις εποχές του έτους, αφετέρου τα τέσσερα μέρη της Ψυχής, ήτοι τον Νουν, την Επιστήμην, την Δόξαν και την Αίσθησιν.
Οι σύγχρονοί μας σοφοί υπό την έννοιαν «τετρακτύς» θεωρούν τις τέσσερις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχειωδών ή θεμελιωδών σωματιδίων της ύλης, ήτοι των φερμιονίων - τα έξι κουάρκ και τα έξι λεπτόνια-, των οποίων η ύπαρξη έχει πειραματικώς επιβεβαιωθεί άμεσα ή έμμεσα. Την σύγχρονον τετρακτύν αποτελούν οι ηλεκτρομαγνητική, η ισχυρή πυρηνική, η ασθενής πυρηνική και η βαρυτική αλληλεπιδράσεις.

Η τετρακτύς κατά τον Πλούταρχον είναι ο αριθμός 36, το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αρτίων και των τεσσάρων πρώτων περιττών αριθμών της δεκάδος (2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7).

ἡ δὲ καλουμένη τετρακτύς, τὰ ἓξ καὶ τριάκοντα, μέγιστος ἦν ὅρκος, ὡς τεθρύληται, καὶ κόσμος ὠνόμασται, τεσσάρων μὲν ἀρτίων τῶν πρώτων, τεσσάρων δὲ τῶν περισσῶν εἰς ταὐτὸ συντιθεμένων ἀποτελούμενος.
Πλούταρχος, Stephanus, *Περί Ίσιδος και Οσίριδος*, 381F, 6 – 382A, 4.

Τέλος, υπάρχει και η τετρακτύς του Πλάτωνος, την οποία απαρτίζουν οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27 και, όπως παρετήρησαν αρχαίοι σχολιαστές με πρώτον τον Κράντορα, δομείται από την συνένωση της γεωμετρικής σειράς 1, 2, 4, 8 με πρώτον όρον την μονάδα και γενήτορα το 2 και της γεωμετρικής σειράς 1, 3, 9, 27 με πρώτον όρον την μονάδα και γενήτορα το 3.
Η τετρακτύς 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27 χρησιμοποιείται υπό του Πλάτωνος ως πολύμορφο μαθηματικό εργαλείο για την επίλυση φιλοσοφικών – μαθηματικών - μουσικών προβλημάτων.
Συγκεκριμένως, ο Πλάτων χρησιμοποιών και τους επτά όρους αυτής της τετρακτύος, δημιουργεί την Ψυχήν του Κόσμου[2] εις τον διάλογόν του *Τίμαιος* (35a1-36b6) καταλή-

[2] Βλέπε Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, 2006 και
Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεσις Ψυχής Κόσμου (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις), Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, 2008.

γων εις μίαν αλληλουχίαν μουσικών φθόγγων συχνοτικού εύρους τεσσάρων διαπασών, ενός δια πέντε και ενός επογδόου τόνου.

Το ίδιο μαθηματικό εργαλείο, την τετρακτύν του, υπό άλλην μορφήν και ολιγοτέρους και συγκεκριμένους όρους, χρησιμοποιεί ο Πλάτων στο Η' Βιβλίον της Πολιτείας προκειμένου να παραγάγει την συνάρτηση του ειδώλου ηδονής, το οποίον συγκατοικεί με έκαστον πολιτικόν άνδρα.

Συγκεκριμένως, ο Πλάτων μετασχηματίζει την τετρακτύν του προσδίδων εις αυτήν την μορφήν $(1\cdot x)^1$, $(2\cdot x)$, $(3\cdot x)$, $(2\cdot x)^2$, $(9\cdot x)$, $(8\cdot x)$, $(3\cdot x)^3$ και εκφράζει τα σχετικά είδωλα ηδονής, τα συγκατοικούντα με έκαστον πολιτικόν άνδρα με τους όρους $(1\cdot x)^1$, $(2\cdot x)^2$, $(3\cdot x)^3$.

Δια των όρων αυτών, όπως θα εκτεθεί κατωτέρω, καταλήγει προσδίδων εις τους πολιτικούς άνδρες «Βασιλικός», «Αριστοκρατικός», «Ολιγαρχικός», «Δημοκρατικός», «Τύραννος» ως απόλυτα είδωλα ηδονής τις τιμές 1, 2, 3, 36 και 729, αντιστοίχως.

Πλατωνική Πολιτειολογία

Στην Πλατωνική γραμματολογία η *Πολιτεία* θεωρείται το σημαντικότερο ίσως έργο. Σ' αυτό λέγεται ότι ο Πλάτων προσπαθεί να μας δώσει την εικόνα του τελείου πολιτεύματος.

Στην ιδανική Πολιτεία του Πλάτωνος ο κάθε πολίτης, αναλόγως των φυσικών του προδιαθέσεων και ικανοτήτων, αναλαμβάνει έναν συγκεκριμένο και αυστηρά καθορισμένο ρόλο, ο οποίος συνεπάγεται και έναν αντίστοιχο τρόπο ζωής.

Τα δικαιώματα και οι υποχρεώσεις του κάθε πολίτη, αναλόγως της τάξεώς του, οριοθετούνται βάσει δύο γνωμόνων: την ευνομία και την ενότητα της Πολιτείας.

Άρα το κύριο μέλημα είναι να καθορισθεί η μορφή της πολιτειακής οργανώσεως που θα εξασφαλίζει σε μια πόλη αυτές τις δύο αρχές.

Ο Πλάτων στην *Πολιτεία* του δίδει το ακόλουθο πενταμερές πολιτειακό σχήμα:

1. **Πλατωνική πολιτεία**, **αριστοκρατία** (κυβερνούν περισσότερα του ενός πρόσωπα, που ανήκουν στην τάξη των αρίστων).
2. **Κρητικολακωνική**, **τιμοκρατία** ή **φιλαρχία** (Η λέξη τιμή σημαίνει δόξα, διάκριση, αξίωμα).
3. **Ολιγαρχία** (κυβερνούν οι πλούσιοι, ενώ οι φτωχοί δεν έχουν μερίδιο στην εξουσία).
4. **Δημοκρατία** (το ανώτατο όργανο είναι το σύνολο των πολιτών).
5. **Τυραννίδα**, το «έσχατον νόσημα της πόλεως».

Στην παρούσα εισήγηση με ενδιαφέρει η πυθαγόρειος συμπεριφορά του Πλάτωνος. Συγκεκριμένα, ασπαζόμενος ο Πλάτων την πυθαγόρειον ρήση «τα πάντα κατ' αριθμόν γίγνονται», συμπεριφέρεται ως πυθαγόρειος (Οἱ Πυθαγορικοὶ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων, Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10), χρησιμοποιεί αριθμούς, προκειμένου να αισθητοποιήσει τα λεγόμενά του και δηλώνει ότι ο τύραννος είναι 729 φορές χειρότερος από τον βασιλέα (Stephanus 587 b11 - 588 a2).

Η συγκεκριμένη περικοπή περιλαμβάνει έναν διάλογο μεταξύ του Σωκράτους και του φίλου του Γλαύκωνος, αδελφού του Πλάτωνος, και έχει εις νεοελληνικήν απόδοση κατά τους Α. Παπαθεοδώρου και Φ. Παππά (ΠΑΠΥΡΟΣ. 1939) ως ακολούθως:

- Ξέρεις, λοιπόν, είπα, πόσο αηδέστερα ζη ο τύραννος από το βασιλιά;
- Αν μου το ειπής, απήντησε, θα το μάθω.
- Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, η μία γνήσια και οι άλλες δύο νόθες. Ο τύραννος ξεπερνώντας και το τελευταίο ακόμα σύνορο των νόθων ηδονών, και ξεφεύγοντας πολύ μακρυά από το νόμο και τον ορθό λόγο, ζη πάντοτε με κάτι δουλικές ηδονές, που τις χρησιμοποιεί σαν δορυφόρους, και δεν είναι καθόλου εύκολο να ορίση κανείς πόσο είναι κατώτερος από το βασιλιά, παρά μόνο, ίσως, κατά τον ακόλουθο τρόπο.
- Πώς; είπε.
- Ας πάρουμε τον ολιγαρχικό σαν αφετηρία, ο τύραννος νομίζω πως είναι τρίτος στη σειρά, γιατί ανάμεσά τους στέκει ο δημοκρατικός.
- Ναι.
- Αν λοιπόν αυτά που είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής, που συγκατοικεί με τον τύραννο, δεν θάναι κατά τρεις φορές μακρύτερα από την αλήθεια, από όσο είναι το είδωλο που συγκατοικεί με τον ολιγαρχικό;
- Έτσι είναι.
- Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ταυτίσουμε τον αριστοκρατικό και το βασιλικό.
- Ασφαλώς τρίτος.
- Ώστε ο τύραννος, είπα εγώ, απέχει από την αληθινή ηδονή, για να εκφρασθώ με αριθμό, το τριπλάσιο του τριπλασίου.
- Φαίνεται.
- Καθώς φαίνεται λοιπόν, είπα, θα μπορούσε το είδωλο της ηδονής του τυράννου, ως προς το μήκος, ίσως να παρασταθή με ένα επίπεδο αριθμό.
- Βεβαιότατα.
- Αν τον αριθμό αυτό τον υψώσουμε στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο, θα δείξη καθαρά την απόσταση που χωρίζει τον τύραννο από το βασιλιά.
- Αυτό είναι φανερό, είπε, σε ένα άνθρωπο που ξαίρει λογιστικά.
- Εάν λοιπόν κανείς αναστρέφοντας την αναλογία θελήση να δείξη πόσο αληθινώτερη είναι η ηδονή του βασιλιά από την ηδονή του τυράννου, θα βρη άμα κάμη όλους τους πολλαπλασιασμούς, ότι αυτός ζη επτακόσιες είκοσι εννέα φορές ευχαριστότερα, ενώ ο τύραννος ζη δυστυχέστερα άλλες τόσες.
- Τι καταπληκτικό αριθμό, εφώναξε, μας έρριξες κατακέφαλα, για να μας δείξης τη διαφορά των δύο ανθρωπίνων τύπων, του δικαίου και του αδίκου, ως προς την ηδονή και τη λύπη.

Η Μουσικολογική αλληγορία της περικοπής

Λόγω των υπαρχόντων χρονικών περιορισμών θα αναφερθώ εις τα κυριότερα σημεία του διαλόγου εξ επόψεως αλληγορίας.

1. *«Ο τύραννος ξεπερνώντας και το τελευταίο ακόμα σύνορο των νόθων ηδονών, και ξεφεύγοντας πολύ μακρυά από το νόμο και τον ορθό λόγο, ζη πάντοτε με κάτι δουλικές ηδονές, που τις χρησιμοποιεί σαν δορυφόρους, και δεν είναι καθόλου εύκολο να ορίση κανείς πόσο είναι κατώτερος από το βασιλιά, παρά μόνο, ίσως, κατά τον ακόλουθο τρόπο. Πώς; είπε».*

Η ηδονή που δοκιμάζει ο βασιλικός άνδρας είναι η μόνη γνήσια. Οι ηδονές που δοκιμάζουν ο τιμοκρατικός και ο ολιγαρχικός είναι οι δύο νόθες. Η ηδονή που απολαμβάνει ο τύραννος είναι πιο νόθα και απ' αυτήν του ολιγαρχικού. Η υπέρτατη ηδονή για έναν φιλόσοφο είναι το Αγαθό, που είναι Ιδέα και μάλιστα η Υψίστη Ιδέα. Το Αγαθό ταυτίζεται με τη γνώση.
Όλη η δομή της Πολιτείας του Σωκράτους, όπως περιγράφεται στο διάλογο, προσομοιάζει με το Αριστοκρατικό πολίτευμα.
Όλες οι ποιοτικές εκφράσεις, που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο απόσπασμα, με κάποιον αλγόριθμο, τον οποίον ο Πλάτων θα εκθέσει με τον τρόπο του παρακάτω και ο οποίος αναμένεται εναγωνίως, θα ποσοτικοποιηθούν.

2. *«Ας πάρουμε τον ολιγαρχικό σαν αφετηρία, ο τύραννος νομίζω πως είναι τρίτος στη σειρά, γιατί ανάμεσά τους στέκει ο δημοκρατικός».*
«Αν λοιπόν αυτά που είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής, που συγκατοικεί με τον τύραννο, δεν θάναι κατά τρεις φορές μακρύτερα από την αλήθεια, από όσο είναι το είδωλο που συγκατοικεί με τον ολιγαρχικό;»

Επειδή όλοι θεωρούν ότι με αλχημείες ο Πλάτων παρήγαγε τον αριθμό 729, θεωρώ ότι πρέπει να ευρεθεί ο αναλυτικός αλγόριθμος, που χρησιμοποιεί.
Η τριάδα των ανθρώπων των πολιτευμάτων με αναφορά στον ολιγαρχικό είναι:

1	Ολιγαρχικός
2	Δημοκρατικός
3	Τύραννος

Θεωρώ προς στιγμήν ότι η απόσταση του ολιγαρχικού από μια απόλυτη αφετηρία είναι x.
Τότε, των επομένων δύο οι αποστάσεις από αυτήν την απόλυτη αφετηρία θα είναι 2x και 3x, αντιστοίχως.
Για να προχωρήσει σωστά το μοντέλο, θα πρέπει η έννοια «είδωλο ηδονής» να εκφράζεται μαθηματικά με δύναμη η οποία έχει ως βάση την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από την απόλυτη αφετηρία και εκθέτη την τάξη του τύπου πολιτικού ανθρώπου.
Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι η απόσταση από μια απόλυτη αφετηρία για τον Πλάτωνα εκφράζει ένα πυθαγόρειο μουσικό διάστημα και το σχετικό είδωλο ηδονής εκφράζει το πυθαγόρειο γινόμενο ενός ακεραίου αριθμού, που ταυτίζεται με την τάξη του τύπου πολιτικού ανθρώπου, επί ένα μουσικό διάστημα, που εκφράζει την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από μια απόλυτη αφετηρία. (Ιδιότητα εκ της Αλγέβρας των Πυθαγορείων διαστημάτων).

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση από μια απόλυτη αφετηρία	Σχετικό είδωλο ηδονής
Ολιγαρχικός	$y_1 = x$	$y_1^1 = (x)^1$
Δημοκρατικός	$y_2 = 2x$	$y_2^2 = (2x)^2$
Τύραννος	$y_3 = 3x$	$y_3^3 = (3x)^3$

3. *«Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ταυτίσουμε τον αριστοκρατικό και το βασιλικό».*

Με τη νέα τριάδα πολιτικών τύπων ανθρώπου προσδιορίζει την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από την απόλυτη αφετηρία, που δεν είναι άλλη από τον βασιλικό, τον οποίο στη συνέχεια τον ταυτίζει με τον αριστοκρατικό.
Τοποθετεί, λοιπόν, για την απόλυτη αφετηρία τον μικρότερο φυσικό αριθμό, το ένα (1), οπότε αβίαστα προκύπτουν τα ακόλουθα:

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση
Βασιλικός	$y_1 = x = 1$
Αριστοκρατικός	$y_2 = 2x = 2$
Ολιγαρχικός	$y_3 = 3x = 3$

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση	Σχετικό είδωλο ηδονής	Απόλυτο είδωλο ηδονής
Ολιγαρχικός	$z_1 = y_3$	$z_1^1 = (y_3)^1$	$3^1 = 3$
Δημοκρατικός	$z_2 = 2y_3$	$z_2^2 = (2y_3)^2$	$(2\cdot 3)^2 = 6^2 = 36$
Τύραννος	$z_3 = 3y_3$	$z_3^3 = (3y_3)^3$	$(3\cdot 3)^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729$

Με τον όρο απόλυτο είδωλο ηδονής ορίζει επακριβώς το μήκος του ταλαντουμένου τμήματος χορδής δια του οποίου παράγεται εκάστη νότα της Ψυχής Κόσμου επί του μονοχόρδου.

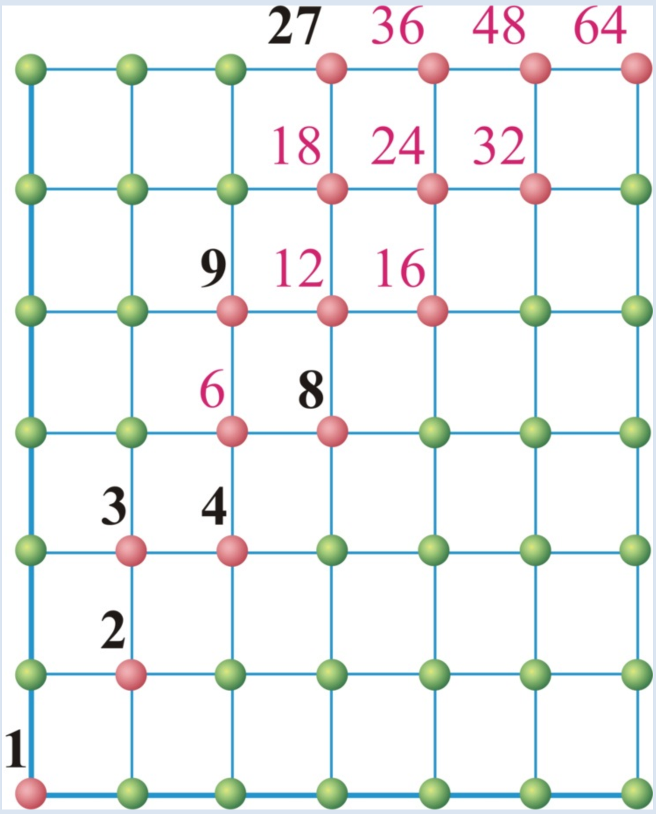
4. *«Ασφαλώς τρίτος.*
Ώστε ο τύραννος, είπα εγώ, απέχει από την αληθινή ηδονή, για να εκφρασθώ με αριθμό, το τριπλάσιο του τριπλασίου.
Φαίνεται.
Καθώς φαίνεται λοιπόν, είπα, θα μπορούσε το είδωλο της ηδονής του τυράννου, ως προς το μήκος, ίσως να παρασταθή με ένα επίπεδο αριθμό.

Βεβαιότατα.
Αν τον αριθμό αυτό τον υψώσουμε στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο, θα δείξη καθαρά την απόσταση που χωρίζει τον τύραννο από το βασιλιά.
Αυτό είναι φανερό, είπε, σε ένα άνθρωπο που ξαίρει λογιστικά.
Εάν λοιπόν κανείς αναστρέφοντας την αναλογία θελήση να δείξη πόσο αληθινώτερη είναι η ηδονή του βασιλιά από την ηδονή του τυράννου, θα βρη άμα κάμη όλους τους πολλαπλασιασμούς, ότι αυτός ζη επτακόσιες είκοσι εννέα φορές ευχαριστότερα, ενώ ο τύραννος ζη δυστυχέστερα άλλες τόσες.
Τι καταπληκτικό αριθμό, εφώναξε, μας έρριξες κατακέφαλα, για να μας δείξης τη διαφορά των δύο ανθρωπίνων τύπων, του δικαίου και του αδίκου, ως προς την ηδονή και τη λύπη».

Αναφορικώς με τον αριθμό 729, τον οποίον επέλεξε και αναφέρει ο Πλάτων. Αυτός ο αριθμός από τη σκοπιά της μουσικής ως προς ένα μοναδιαίο μήκος ταλαντουμένης χορδής αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα:

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(2^3\right)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

το οποίο είναι ένα πυθαγόρειο τρίτονο συν εννέα διαπασών.
Το πυθαγόρειο τρίτονο ήτο το πλέον διάφωνο μουσικό διάστημα του μουσικού συστήματος, το οποίο εγνώριζε ο Πλάτων. Εξακολουθεί και σήμερα να φέρει τον ίδιο οικτρώς διάφωνο χαρακτήρα (*diabolo in musica*) στο δυτικό τονικό σύστημα 2.500 χρόνια μετά απ' αυτόν.
Αυτό το οποίο ο Πλάτων εξετίμησε με τον αριθμό 729 ήτο η σχέση μεταξύ του βασιλέως και του τυράννου και τη σχέση αυτή τη θεωρεί ως τη μεγίστη δυνατή ένταση μέσα σε ένα πολιτισμένο σύστημα.
Όπως έχω ήδη αναφέρει, μπορούμε να συμμερισθούμε την αμηχανία, την οποία αισθάνεται κάποιος μη μουσικός αντικρύζοντας τέτοιους αριθμούς. Για να αντιληφθεί κανείς το ενυπάρχον ανάλογο, πρέπει να καταλάβει (όπως ο Πλάτων το είχε ως δεδομένο) ότι στην αρχαιότητα ο μουσικός συμβολισμός εγίνετο άμεσα καταληπτός από όλους τους μεμυημένους και γι' αυτό ο Πλάτων τον χρησιμοποιεί συχνά. Όταν κατά τον ρούν της Ιστορίας ο ρόλος της μουσικής από πνευματική ή ψυχική δύναμη εθυσιάσθη εις τον βωμό της ατομικής εκφράσεως και απολαύσεως, η ερμηνεία των άλλοτε ξεκάθαρων κειμένων κατέστη δύσκολη και ακατόρθωτη.



Σχήμα 2: Η Ψυχή του Κόσμου κατά την λαβδοειδή λύση της.

Με τον εκθετικό χαρακτήρα των εννοιών σχετικό και απόλυτο είδωλο ηδονής εις τον αλγόριθμό του ο Πλάτων προσπαθεί να μας καθοδηγήσει να κατασκευάσουμε σωστά την Ψυχήν του Κόσμου κατά την λαβδοειδή λύση της.

Το απόλυτο είδωλο ηδονής του Δημοκρατικού πολιτικού ανδρός είναι κατά Πλάτωνα ο αριθμός 36 ήτοι:

$$36=(2\cdot 3)^2=2^2\cdot 3^2=\sigma(x,y)=2\ \text{διαπασών}+2(\text{διαπασών και διαπέντε})=$$
$$=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^6$$

Οι τιμές αυτές των απολύτων ειδώλων ηδονής, αντιμετωπιζόμενες ως μήκη ταλαντουμένων τμημάτων χορδής σε σχέση με ένα μοναδιαίο μήκος αναφοράς δημιουργούν κατιόντα[3] μουσικά διαστήματα. Αναγόμενα τα εν λόγω διαστήματα εντός του ενός διαπασών[4], παρέχουν φθόγγους απέχοντες από τον φθόγγον αναφοράς, δηλαδή τον 1,

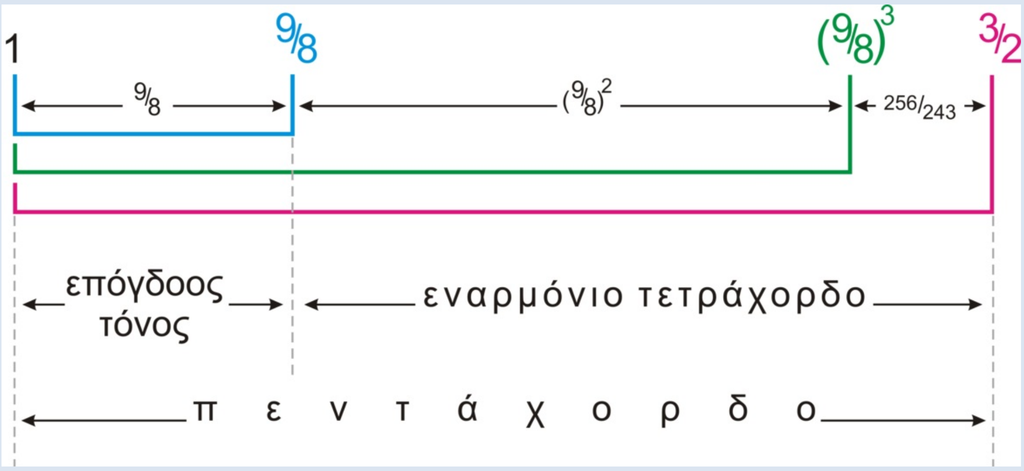
[3] Μεγάλο μήκος ταλαντουμένου τμήματος χορδής συνεπάγεται μικρή ακουομένη συχνότητα.

[4] Το μουσικό διάστημα 3 ισούται με 1 διαπασών, 0 επογδόους τόνους και 1 διαπέντε. Αρα, αναγόμενο εντός του ενός διαπασών, ισούται με 1 διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)$.

κατά τα εξής μουσικά διαστήματα $\left[1, \frac{9}{8}, \left(\frac{9}{8}\right)^3, \frac{3}{2}\right]$ (επόγδοος τόνος, πυθαγόρειον τρίτονον, δια πέντε). Τα μεταξύ των φθόγγων αυτών σχηματιζόμενα διαδοχικά μουσικά διαστήματα είναι $\left[\frac{9}{8}, \left(\frac{9}{8}\right)^2, \frac{256}{243}\right]$ (επόγδοος τόνος, πυθαγόρειον δίτονον, λείμμα) και δομούν ένα πεντάχορδο.

Τα ανωτέρω σημαίνουν ότι το εν λόγω κατιόν πεντάχορδο δομείται από έναν επόγδοο τόνο $\left(\frac{9}{8}\right)$ συν ένα τετράχορδο $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2, \frac{256}{243}\right]$.

Το τετράχορδο αυτό δομείται από ένα ασύνθετο δίτονο και από πυκνόν μεγέθους λείμματος. Άρα πρόκειται για την δομή ενός εναρμονίου τετραχόρδου, για το οποίον ήθελε, κατά τη γνώμη μου, να ομιλήσει αλληγορικώς ο Πλάτων (Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Οι τιμές των απολύτων ειδώλων ηδονής, αναγόμενες εντός του ενός διαπασών με αρχήν τον φθόγγον αναφοράς, δηλαδή τον 1, σχηματίζουν μουσικά διαστήματα, τα οποία δομούν ένα εναρμόνιον πεντάχορδον.

Το δίτονον[5] είναι το χαρακτηριστικό μουσικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το υπόλοιπο διάστημα του εναρμονίου τετραχόρδου, το ονομα-

---

Το μουσικό διάστημα 36 ισούται με 5 διαπασών και 1 επόγδοον τόνο. Άρα, αναγόμενο εντός του ενός διαπασών, ισούται με 1 επόγδοον τόνο $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Το μουσικό διάστημα 729 ισούται με 9 διαπασών και 3 επογδόους τόνους. Άρα, αναγόμενο εντός του ενός διαπασών, ισούται με 3 επογδόους τόνους ή με 1 πυθαγόρειον τρίτονο $\left(\frac{9}{8}\right)^3$.

[5] Το δίτονον είναι το χαρακτηριστικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το δίτονο εμφανίζεται μεταξύ του λιχανού και του φθόγγου κορυφής του τετραχόρδου π.χ. μεταξύ λιχανού μέσων και της μέσης. Βλέπε και 7 Αριστοξ. Στοιχ. Αρμον. 22.27-23.22, 50.22-25. Στον Αρχύτα 1.21 και Πτολ. Αρμον. 30.9ff αναφέρεται αντί διτόνου (9:8)Χ(9:8)=81:64, το διάστημα 80:64=5:4, το οποίο είναι κατά (81:64):(80:64)=(81:80) –ένα κόμμα- μικρότερο του διτόνου.

ζόμενον πυκνόν, ήτοι το διάστημα λιχανός-υπάτη, έχει μέγεθος ενός λείμματος (256:243). Για την διαίρεση αυτού του διαστήματος, του πυκνού, δεν μας αναφέρει τίποτα ο Πλάτων, αλλά, ως Πυθαγόρειος, θα ασπάζεται, εικάζω, τα όσα αναφέρονται εις την ιη Πρόταση της μουσικής πραγματείας *Κατατομή Κανόνος* του Ευκλείδου, δηλαδή « Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα». Με άλλα λόγια το πυκνόν διαιρείται από τις παρυπάτες στα τετράχορδα υπατών και μέσων και από τις τρίτες στα τετράχορδα συνημμένων, διεζευγμένων και υπερβολαίων σε δύο διαστήματα. Στην Πυθαγόρειον θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι άνισα, αλλ’ εις την Αριστοξένειον θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Ίσως λόγω αυτού του συγκερασμού ο Αριστόξενος (Αρμονικά 1.22-26) ασχολείται διεξοδικώς με τις θέσεις των λιχανών και των παρανητών σε σχέση με αυτό που κάνει για τις θέσεις των παρυπατών και των τριτών (Αρμονικά 1. 26-27).

Θα καταλήξω την εισήγησή μου σχολιάζων τα λεγόμενα του κοσμήτορος κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκη, ο οποίος λέγει:

Η εκτροπή των πολιτευμάτων προχωρεί ολοένα προς κατώτερα διαζώματα. Συγκεκριμένα από την τιμοκρατία προχωρεί σε νοσηρότερες μορφές και φθάνει με κατακόρυφη καθοδική πορεία στην τυραννίδα. Οι μεταβάσεις είναι μονοσήμαντες. Κάθε μεταβολή γίνεται προς συγκεκριμένο πολιτειακό τύπο, που είναι υποδεέστερος, και η κατάληξη είναι η τυραννίς. Η **τυραννίς** προέρχεται **μόνον** από τη **δημοκρατία**. Το χειρότερο με την τυραννίδα είναι ότι περιερχόμεθα σε αδιέξοδο, σε απορία. Κατά τον Πλάτωνα ο τύραννος είναι όχι απλώς δούλος, αλλά ο δουλικώτερος πάντων.

Το μουσικολογικό περιεχόμενο των λεγομένων τουκαθηγητού κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκη, είναι το εξής. Η δυσαρμονία προχωρεί από το σύμφωνο διάστημα της ταυτοφωνίας και του διαπασών προς όλο και περισσότερο διάφωνα μουσικά διαστήματα και φθάνει με κατακόρυφη καθοδική πορεία στην αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο

$$\boxed{\left(\frac{9}{8}\right)^3}$$

Η αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, προέρχεται μόνον από τον επόγδοο τόνο

$$\boxed{\left(\frac{9}{8}\right)}$$

αφού δομείται αποκλειστικώς από τρεις επογδόους τόνους. Το χειρότερο με την αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, είναι ότι αισθανόμεθα στ’ αυτιά μας τον οικτρώς διάφωνο χαρακτήρα του (*diabolo in musica*). Κατά τον Πλάτωνα η αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, δεν είναι απλώς διάφωνο διάστημα, αλλά το διαφωνέστερο πάντων των διαστημάτων.

Η μουσικολογική αλληγορία της Πλατωνικής Πολιτειολογίας κρίνεται ως εξαιρετικώς ενδιαφέρουσα και αποκαλυπτική για τις γνώσεις του Πλάτωνος –και των μουσικών της εποχής του- όσον αφορά εις το αρμονικόν περιεχόμενον των μουσικών διαστημάτων. Πράγματι, αξιολογεί και κατατάσσει τα μουσικά διαστήματα της ταυτοφωνίας, του διαπασών, του διαπέντε, του επογδόου και του τριτόνου με βάση τη δυσαρμονία (παραφωνία), την οποία προκαλούν κατά την ακρόασή τους.
Πρέπει να σημειωθεί, επίσης, ότι μέχρι στιγμής μόνον οι Προτάσεις ιζ και ιη της Ευκλειδείου πραγματείας Κατατομή κανόνος εγνωρίζαμε ότι αναφέρονται εις το εναρμόνιον γένος των αρχαίων Ελλήνων. Το αποκαλυφθέν πλέον εναρμόνιον πεντάχορδον εκ της μουσικολογικής αλληγορίας της Πλατωνικής Πολιτειολογίας αποτελεί σχετικήν αναφοράν αρχαιοτέρα των δύο προμνημονευθεισών Ευκλειδείων προτάσεων κατά δύο περίπου αιώνες και αυτό είναι εξαιρετικώς σπουδαία και πρωτότυπη μουσικολογική πληροφορία.
Η δομή του εν λόγω εναρμονίου τετραχόρδου κατά την κατιούσα διαδοχή πρέπει να έχει πυκνόν εντός ενός λείμματος 256/243. Κατά την ιη Πρόταση της μουσικής πραγματείας *Κατατομή Κανόνος* του Ευκλείδου θα πρέπει το λείμμα να συντίθεται εκ δύο ανίσων μουσικών διαστημάτων. Ανθυφαιρετικώς προκύπτει ότι πράγματι το λείμμα χωρίζεται εις ένα μικρόν μουσικόν διάστημα, το Πυθαγόρειον κόμμα 531441/524288 και σε ένα μεγαλύτερο κατά 2,845 φορές, το όνομα του οποίου δεν μας κατέστη ουδεπώποτε γνωστόν και αυτό δίδεται υπό της αριθμητικής σχέσεως 134217728/129140163.
Τούτο αποτελεί εξαιρετικώς σπουδαία και πρωτότυπη μουσικολογική πληροφορία, την οποίαν για πρώτη φορά αποκαλύπτω, όσον αφορά εις την Μουσικήν παρά Πλάτωνι.

Ο ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΑΒΑΞ ΤΟΥ ΛΑΥΡΙΟΥ
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ,
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
email: hspyridis@music.uoa.gr
tel/fax: 210-72.77.832

Οἱ Πυθαγορικοὶ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων,
τὴν μουσικήν φασιν ἐναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν
πολλῶν ἕνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν·
Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10-12.

<u>Αριθμοί και Αλληγορία</u>

Ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγον αυτόν τα ιερά κείμενά τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με σημεία, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά που, διαφορετικά, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρεύλωση.

Υπάρχουν κρίσιμες περικοπές ιερών κειμένων και κειμένων της παγκοσμίου λογοτεχνίας -Βέδδες, Αιγυπτιακό βιβλίο των Νεκρών, Βίβλος, Πλάτων- που πραγματεύονται αριθμούς. Επί πλέον η επανάληψη ταυτοσήμων και ομοίων αριθμών στη Βαβυλώνα, την Αίγυπτο, την Ελλάδα και την Παλαιστίνη επιβεβαιώνουν τις κάποτε αναπτυχθείσες θεωρήσεις, οι οποίες είχαν ιστορική συνέχεια και προσανατολισμό μιας βασικής πνευματικής παραδόσεως.

Οι περικοπές αυτές αντιμετωπίζονται με μια νέα οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση. Η οπτική αυτή προέκυψε λαμβάνοντας κατά λέξη τον Πλάτωνα, ο οποίος μας κληροδότησε ένα απόθεμα αριθμολογίας και συσχέτισε μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες. Πιστεύεται ότι ο Πλάτων είναι η πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για την περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών.

Επί παραδείγματι, ο Πλάτων δηλώνει ότι ο τύραννος είναι 729 φορές χειρότερος από τον χειρότερο βασιλέα (Stephanus 587, d, 12 - e, 4). Τί άραγε εννοεί;

Οι φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνση «*απλουστεύοντας το κείμενο*» και οι μαθηματικοί το αντιμετωπίζουν «*ποιητική αδεία*». Ο πεπαιδευμένος μουσικός, όμως, γνωρίζει ότι κάθε φθόγγος χαρακτηρίζεται από μια ποσότητα (αριθμητική σχέση) και από μία ποιότητα. Μόνη της, είτε η ποσότητα, είτε η ποιότητα χαρακτηρίζει τον φθόγγο μονοπλεύρως, δεδομένου ότι αμφότερες αποτελούν τις δύο όψεις του αυτού νομίσματος και αμοιβαίως η μία φωτίζει την άλλη.

Αναφορικά με τον αριθμό 729, που επέλεξε ο Πλάτων. Αυτός ο αριθμός από τη σκοπιά της μουσικής ως προς μια μοναδιαία συχνότητα ή ως προς ένα μοναδιαίο μήκος ταλαντουμένης χορδής αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα:

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(2^3\right)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

το οποίο είναι ένα τρίτονο συν εννέα οκτάβες.

Το τρίτονο είναι το πλέον διάφωνο μουσικό διάστημα του μουσικού συστήματος που ήτο γνωστό στον Πλάτωνα. Εξακολουθεί και σήμερα να φέρει τον ίδιο διάφωνο χαρακτήρα (diabolus in musica) στο δυτικό τονικό σύστημα 2.500 χρόνια μετά απ' αυτόν. Αυτό που ο Πλάτων εξετίμησε με τον αριθμό 729 ήτο η σχέση μεταξύ δύο πολιτειακών συστημάτων και τη θεωρεί ως τη μεγίστη δυνατή ένταση μέσα σε ένα πολιτισμένο σύστημα.

Στην αρχαιότητα ο μουσικός συμβολισμός εγίνετο άμεσα κατανοητός από τους μεμυημένους και γι' αυτό ο Πλάτων τον χρησιμοποιεί συχνά. Όταν κατά τον ρούν της Ιστορίας ο ρόλος της μουσικής από πνευματική ή ψυχική δύναμη εθυσιάσθη στον βωμό της ατομικής εκφράσεως και απολαύσεως, η ερμηνεία των άλλοτε ξεκάθαρων κειμένων κατέστη δύσκολη και καμιά φορά ακατόρθωτη.

Στα κείμενα των Βεδδών, που εγράφησαν το 4000 π.Χ. περίπου, υπάρχει θεμελιωμένη μια πρωτοεπιστήμη αριθμών και φθόγγων. Ο άνθρωπος του καιρού εκείνου φρόντισε με τους αριθμούς να προσδιορίσει εναλλακτικά χορδίσματα ή εναλλακτικές δομές της διαπασών. Οι ύμνοι περιγράφουν ποιητικά τους αριθμούς, καθορίζοντας σύνολα κλάσεων θεών και δαιμόνων, και παριστούν τονικές και αριθμητικές σχέσεις με σεξουαλικές παραστάσεις.

Και οι Ινδοί και οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι και οι Έλληνες (Πυθαγόρειοι) στη μουσική αντιμετωπίζουν μια ιεραρχία αριθμών. Συγκεκριμένα όλοι οι άρτιοι αριθμοί, θεωρούνται θηλυκοί αριθμοί, ενώ οι περιττοί αριθμοί θεωρούνται αρσενικοί αριθμοί. Ο Πλάτων λ.χ. στη *Γένεση Ψυχής Κόσμου* (35a1-5) στο έργο του *Τίμαιος* αναφέρει την συνένωση του *ταυτού*, δηλαδή της μονάδος που εκπροσωπεί το άρρεν στοιχείο, ως περιττός αριθμός, μετά του *θατέρου*, δηλαδή της δυάδος που εκπροσωπεί το θηλυκό στοιχείο, ως άρτιος αριθμός, προκειμένου να προκύψει η *ουσία*, δηλαδή η οντότης τρία, η οποία είναι η αρχή των πυθαγορείων αριθμών.

Ο δυϊσμός της εννοίας «μουσικό διάστημα»

Στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία η σχέση, δηλαδή ο λόγος, μεταξύ δύο αριθμών εκαλείτο «*διάστημα*». Γι' αυτό ο Νικόμαχος ο Γερασηνός αποκαλεί την Πυθαγόρειο μουσική «*θεωρία των λόγων*».

Έχει καταστεί πλέον συνείδηση ότι αυτή η «*θεωρία των λόγων*» εμπεριέχει έναν λογαριθμικό χαρακτήρα, διότι κατ' αυτήν η πρόσθεση των μουσικών διαστημάτων γίνεται με πολλαπλασιασμό και η αφαίρεσή τους γίνεται με διαίρεση. Αυτά δεν τα κατανοεί ο κοινός νους. Παρ' όλα ταύτα η «*θεωρία των λόγων*» χαρακτηρίζεται από μια «πλαστικότητα» κατά τη μαθηματική της επεξεργασία και γι' αυτό προτιμάται από τους Μαθηματικούς.

Ο Αριστόξενος ο Ταραντίνος (4^{ος} αιών π.Χ.), εναντιούμενος στον λογαριθμικό χαρακτήρα των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων, εισάγει την γραμμικότητα στα μουσικά διαστήματα ορίζοντας ως μουσικό διάστημα την απόσταση μεταξύ δύο φθόγγων διαφορετικού μουσικού ύψους «διάστημα δ' ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης» (Νικόμαχος). Κατ' αυτόν τον τρόπο η πρόσθεση των αριστοξενείων μουσικών διαστημάτων γίνεται με πρόσθεση και η αφαίρεσή τους γίνεται με αφαίρεση, γεγονός που χωρεί στον κοινό νουν.

Ο Αριστόξενος κατήργησε τις όποιες Πυθαγόρειες ανισότητες μεταξύ των συνωνύμων μουσικών διαστημάτων, εισηγούμενος -για πρώτη φορά στην ιστορία της Μουσικής- τον ίσο συγκερασμό. Για τον Αριστόξενο η διαπασών διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος διαιρείται σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα ή διέσεις.

Η γραμμικότητα σε όλο της το μεγαλείο! Μια γραμμικότητα που φωλιάζει μόνο στη φαντασία του Αριστοξένου, διότι δεν συναντάται στη μουσική πρακτική.

Μέγεθος μουσικού διαστήματος

Η παράσταση του μουσικού διαστήματος ως λόγου, είτε δύο συχνοτήτων, είτε δύο μηκών ταλαντουμένων τμημάτων χορδής -*που επιβάλλει αντί προσθέσεως να κάνουμε πολλαπλασιασμό και αντί αφαιρέσεως να κάνουμε διαίρεση*- οδήγησε τους μελετητές στον ορισμό ενός λογαριθμικού μεγέθους, του λεγομένου ***μεγέθους του μουσικού διαστήματος*** ως εξής:

$$d_k(\delta) = d_k(f_2 / f_1) = k \cdot \log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = k \cdot \frac{\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}{0{,}301029}$$

όπου η σταθερά k εκφράζει τα ίσα μουσικά διαστήματα, στα οποία θεωρούμε ότι είναι χωρισμένη η διαπασών.

Στον χώρο της Βυζαντινής Μουσικής το k=72, αφού η διαπασών διαιρείται σε 72 ηχομόρια ή γραμμές και, συνεπώς, ο μείζων τόνος $\left(\frac{9}{8}\right)$ θα έχει μέγεθος

$$d_{72}(9/8) = 72 \cdot \log_2\left(\frac{9}{8}\right) = 72 \cdot \frac{\log\left(\frac{9}{8}\right)}{0{,}301029} = 72 \cdot \frac{0{,}051152}{0{,}301029} = 12{,}2346001... \cong 12$$ ηχομόρια ή γραμμές.

Με την εισαγωγή της συναρτήσεως του λογαρίθμου προσεδόθη χαρακτήρας γραμμικός στη λογαριθμικότητα του Πυθαγορείου μουσικού διαστήματος με αποτέλεσμα τα μεγέθη των μουσικών διαστημάτων να προστίθενται με πρόσθεση και ν' αφαιρούνται με αφαίρεση.

Πυθαγόρειες Θεωρίες

Οι πυθαγόρειοι ανεκάλυψαν τις βασικές αρχές της παγκοσμίου αρμονίας, των οποίων έκφραση και απείκασμα είναι οι μουσικοί λόγοι. Ο Ιάμβλιχος αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που πραγματοποίησε πειράματα Ακουστικής με τα οποία ανεκάλυψε τους αριθμητικούς λόγους για το ημιόλιο, το επίτριτο, το επόγδοο και το διαπασών διάστημα και στη συνέχεια προχώρησε στην κατασκευή της ομωνύμου μουσικής κλίμακος.

Η αλληλοδιαδοχή ποικίλων μουσικών λόγων εντός της διαπασών γεννά αλληλουχία ποικίλων μουσικών διαστημάτων και φθόγγων. Για τον λόγο αυτόν οι παλαιοί μαθηματικοί και μουσικοί αποκαλούσαν τη διαπασών «*αρμονίαν*», δηλαδή συναρμολόγηση, σύνδεση, εκ του ρήματος *αραρίσκω*, που σημαίνει συνάπτω, ενώνω, συναρμόζω, βάλλω μαζί, προσαρμόζω τι προς τι, συναρμολογώ τι με τι.

Κατά τον Φιλόλαο (*Θραύσμα 10, γρ. 2-3*)
ἔστι γὰρ ἁρμονία πολυμιγέων ἕνωσις
Πολυμιγής σημαίνει σύμμικτος, μεμιγμένος από πολλά και διάφορα είδη, πολυσύνθετος, πολυποίκιλος. Μας λέει, λοιπόν, ο Φιλόλαος ότι η διαπασών είναι μια ένωση πολυποικίλων μουσικών φθόγγων, τον ρόλο της οποίας προσδιορίζει με το επόμενο μισό της ρήσεώς του:
καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις.

Η αρμονία, άρα, αφορά στο πλήθος των εναντιοτήτων και αντιθέσεων, δηλαδή αυτών που φρονούν ενάντια, αντίθετα.

Ο Αριστοτέλης στα *Μετά τα Φυσικά* (Bekker, 956a, 23-26) αναφέρει τις κάτωθι αντιθέσεις, οι οποίες δομούν ολόκληρον τον κόσμο:

πέρας [καὶ] ἄπειρον,
περιττὸν [καὶ] ἄρτιον,
έν [καὶ] πλῆθος,
δεξιὸν [καὶ] ἀριστερόν,
ἄρρεν [καὶ] θῆλυ,
ἠρεμοῦν [καὶ] κινούμενον,
εὐθὺ [καὶ] καμπύλον,
φῶς [καὶ] σκότος,
ἀγαθὸν [καὶ] κακόν,
τετράγωνον [καὶ] ἑτερόμηκες·

Ο Πρόκλος (*Σχόλια στον Πλατωνικόν Τίμαιον 1, 176, 28*) τονίζει:
καὶ εἶς ἀποτελεῖται κόσμος ἐξ ἐναντίων ἡρμοσμένος

ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (*Αριθμητική Εισαγωγή, 1, 6, 3, 1-2*) αναφέρει:
πᾶν
δὲ ἡρμοσμένον ἐξ ἐναντίων πάντως ἥρμοσται

Ο Αριστοτέλης (*De mundo, Bekker, Σελ. 396b, Γρ. 7-12 και 15-17*) επισημαίνει
Ἴσως δὲ τῶν ἐναντίων ἡ φύσις γλίχεται
καὶ ἐκ τούτων ἀποτελεῖ τὸ σύμφωνον…
Ἔοικε δὲ καὶ ἡ
τέχνη τὴν φύσιν μιμουμένη τοῦτο ποιεῖν.

μουσικὴ δὲ ὀξεῖς ἅμα καὶ βαρεῖς, μα-
κρούς τε καὶ βραχεῖς, φθόγγους μίξασα ἐν διαφόροις φω-
ναῖς μίαν ἀπετέλεσεν ἁρμονίαν,

και ο Πλούταρχος (*De amicorum multitudine, Stephanus, Σελ. 96, Παρ. Ε Γρ. 7-8*), συμφωνών με όλους τους προηγουμένους, γράφει:
ἁρμονία
δι' ἀντιφώνων ἔχει τὸ σύμφωνον

Όλα τα ανωτέρω σημαίνουν ότι η αρμονία αφορά στο πλήθος των εναντίων, δηλαδή των εναντιοτήτων και των αντιθέσεων, οι οποίες δομούν ολόκληρον τον κόσμο. Μία των αντιθέσεων, η *φιλότης* και το *νείκος*, είναι αυτή που διέπει τα πάντα στον κόσμο, με την έννοια ότι, *επερχομένη η φιλότης στα δίχα φρονέοντα και αντιτιθέμενα, γεννάται ο δεσμός της αρμονίας ή της φιλότητος και κατά κάποιον τρόπο αυτά ομονοούν και ηρεμούν.*

Τα πολυμιγέα και δίχα φρονέοντα εκφράζονται δι' αριθμών, διότι, όπως τονίζει ο Πρόκλος (*Πλάτωνος «Αλκιβιάδη i", τμήμα 259 γραμμή 13-14*).
«και ο Πυθαγόρας των μεν όντων
πάντων σοφώτατον έλεγεν είναι τον αριθμόν»

Οι αριθμοί της δεκάδος, λόγω της αφηρημένης φύσεώς των, αποτελούν τα θεία πρότυπα της κοσμικής και μουσικής αρμονίας, απεικονίζοντας τις θείες ιδέες. Ανα-

τρέχοντες στο μουσικό σύστημά μας, από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρις των ημερών μας, εντοπίζουμε όλες τις προαναφερθείσες θεμελειώδεις αρχές της αρμονικής.

Όλο το πλήθος των «*πολυμιγέων*» ανομοιογενών και ανίσων μουσικών διαστημάτων παρίσταται με αριθμητικούς όρους που ο ένας είναι άρρην (περιττός) και ο άλλος θήλυς (άρτιος) (επιμόριες σχέσεις) και αντιστρόφως:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{28}{27}, \frac{32}{27}, \frac{256}{243}, \frac{2187}{2048}, \ldots$$

Έκαστον των «*πολυμιγέων*» ανομοιογενών και ανίσων μουσικών διαστημάτων δεν μπορεί να είναι αυτοτελές και ανεξάρτητο, χωρίς δηλαδή να έχει σχέση και αρμοσία με άλλο ή άλλα διαστήματα από τα οποία παρήχθη και με τα οποία δομεί άλλα μουσικά διαστήματα.

Τούτο είναι απόρροια, βάσει υπάρχοντος αρχαίου τεκμηρίου, της πολυπλόκου πυθαγορείου εννοίας και διαδικασίας της καλουμένης *ανθυφαιρέσεως* ή *ανταναιρέσεως*. Το αρχαίο τεκμήριο είναι το έκτο απόσπασμα του Φιλολάου του Ταραντίνου, το οποίο αναφέρει:

ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ
δὲ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόωι…
ἁ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ
δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον. οὕτως ἁρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσιες, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία
ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ δὲ δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις.

Vgl. BOETHIUS Inst. mus. III 8 p. 278, 11 Friedl. Philolaus igitur
haec atque his minora spatia talibus definitionibus includit: diesis, inquit,
est spatium quo maior est sesquitertia proportio duobus tonis.
comma vero est spatium, quo maior est sesquioctava proportio
duabas diesibus, id est duobus semitoniis minoribus. schisma
est dimidium commatis, diaschisma vero dimidium dieseos,
id est semitonii minoris.

Νεοελληνική απόδοση: *[Της διαπασών το μέγεθος ισούται με το διατεσσάρων και το διαπέντε. Το μέγεθος του διαπέντε είναι μεγαλύτερο του διατεσσάρων κατά έναν επόγδοο τόνο…*

Το διατεσσάρων είναι σχέση επίτριτος, το διαπέντε είναι σχέση ημιόλιος, το διαπασών είναι σχέση διπλασία. Έτσι, το διαπασών ισούται με πέντε επογδόους τόνους και δύο διέσεις (λείμματα, ελάσσονα ημιτόνια), το διαπέντε ισούται με τρεις επογδόους τόνους και δίεση (λείμμα, έλασσον ημιτόνιο), το διατεσσάρων δε ισούται με δύο επογδόους τόνους και δίεση (λείμμα, έλασσον ημιτόνιο).

Vgl. BOETHIUS Inst. mus. III 8 p. 278, 11 Friedl. Ο Φιλόλαος, λοιπόν, αυτά τα ελάσσονα διαστήματα με αυτούς τους ορισμούς τα συμπεριλαμβάνει: δίεση (λείμμα, έλασσον ημιτόνιο), λέει, είναι το διάστημα κατά το οποίο υπερέχει η επίτριτος αναλογία (το διατεσσάρων) του διτόνου. Κόμμα είναι το διάστημα κατά το οποίο υπερέχει ο επόγδοος τόνος των δύο διέσεων, δηλαδή των δύο ελασσόνων ημιτονίων (λειμμάτων). Σχίσμα είναι το ήμισυ του κόμματος. Διάσχισμα είναι το ήμισυ της διέσεως, δηλαδή του ελάσσονος ημιτονίου (λείμματος)].

Οι *δίχα φρονέοντες* και *αλόγως ηχούντες* φθόγγοι αποτελούν δυσαρμονίαν (*νείκος*). Όταν κατά κάποιον λόγο συμφρονήσουν και συνφωνήσουν (*φιλότης*), γεννάται ο δεσμός της φιλότητος και της αρμονίας. Τούτο επιτυγχάνεται αφενός μεν με την Πυθαγόρειο διαδικασία των μεσοτήτων (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική), αφετέρου δε με την Πλατωνική διαδικασία της Στερεομετρίας.

Πυθαγόρειος διαδικασία των μεσοτήτων (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική)

Το δις διατεσσάρων $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ *αφαιρούμενο από το διαπασών* $\left(\frac{12}{6}\right)$ *γεννά τον μείζονα τόνο (επόγδοον)* $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Πρόκειται για τη λεγομένη μουσική αναλογία.

Η αναλογία αυτή, τριχή διαστατή, είναι η μόνη που εμπεριέχει συγχρόνως και την αριθμητική και την αρμονική και τη γεωμετρική αναλογία (εμπλέγδην).

$$\begin{array}{cccc} 6 & 8 & 9 & 12 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

$$a_4 - a_3 = a_3 - a_1 \Rightarrow 2a_3 = a_1 + a_4$$

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

$$\frac{a_4 - a_2}{a_2 - a_1} = \frac{a_4}{a_1} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_4 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \alpha_4 - \alpha_1 \cdot \alpha_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_4 = 2(\alpha_1 + \alpha_4)$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ (ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ)

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_3}{a_1}$$

Σχήμα 1: Το δις διατεσσάρων $(4^2 : 3^2)$αφαιρούμενο από το διαπασών $(12:6)$ προκύπτει ο μείζων τόνος (επόγδοος) $(9:8)$.

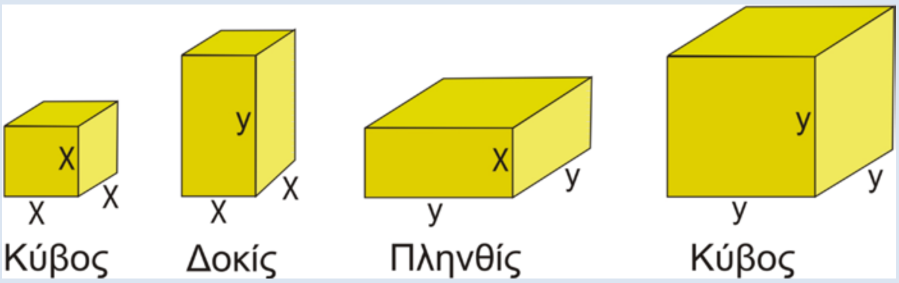
Όροι $12:6$, σε σχέση διπλάσια (διαπασών)

Πρόοδος $9:6,\ 12:8$ σε σχέση ημιόλιο

Υπόλοιπα $8:6,\ 12:9$ σε σχέση επίτριτο

Πλατωνική διαδικασία της Στερεομετρίας

Ιδιαιτέρα σημασία έχει η παρεμβολή των δύο μέσων μεταξύ των δύο δοθέντων κύβων με τη συνδρομή της Στερεομετρίας, όπως αναφέρει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός. Γι’ αυτό ο Πλάτων θεωρεί την Στερεομετρία ως ιδιότητα εξαγνίζουσα τον άνθρωπο και την τοποθετεί μετά την Γεωμετρία και πριν από τη Μουσική.



Σχήμα 2: $\dfrac{\text{ΔΟΚΙΣ}}{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΙΚΡΟΣ}} = \dfrac{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΕΓΑΛΟΣ}}{\text{ΠΛΗΝΘΙΣ}}$

Η διαδικασία έχει ως εξής: Δοθέντων δύο κύβων, ενός μικρού και ενός μεγάλου παρατίθενται ανάμεσά τους ώστε να σχηματίζουν αναλογία μία δοκίς, η οποία έχει τη βάση του μικρού κύβου και του ύψος του μεγάλου κύβου και μια πληνθίς, η οποία έχει τη βάση του μεγάλου κύβου και το ύψος του μικρού.

Στην περίπτωση κατά την οποίαν ο μικρός κύβος έχει πλευρά ίση με τη μονάδα (1X1X1=1) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευρά ίση με 2 (2X2X2=8), δοκίς είναι ο α-ριθμός 2 (1X1X2=2) και πληνθίς είναι ο αριθμός 4 (2X2X1=4). Τα προηγούμενα με μουσικούς όρους διατυπούνται ως εξής:

Όταν το δις διαπασών $\left(\dfrac{2}{1}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $\left(\dfrac{2}{1}\right)^3$, γεννάται το διαπασών $\left(\dfrac{2}{1}\right)$.

Σχήμα 3: Όταν το δις διαπασών $\left(2^2:1^2\right)$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $\left(2^3:1^3\right)$, γεννάται το δια-πασών $(2:1)$.

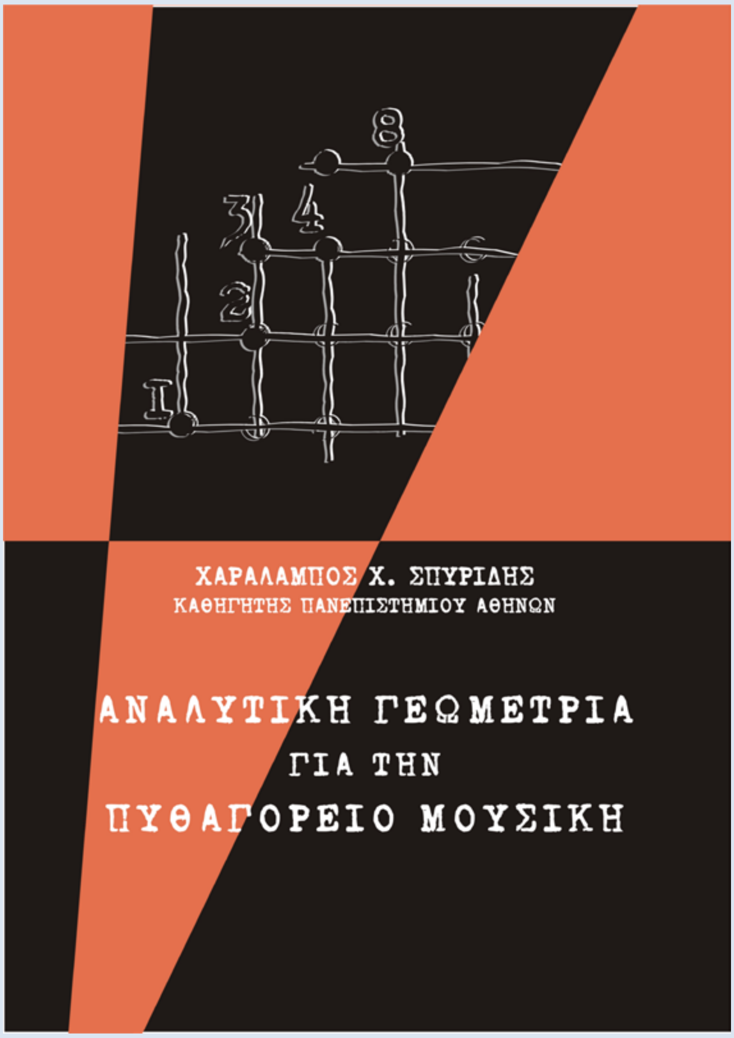
Όροι $8:1$, σε σχέση οκταπλασία
Πρόοδος $4:1,\ 8:2$, σε σχέση τετραπλασία
Υπόλοιπα $2:1,\ 8:4$, σε σχέση διπλασία
Διαφοραί
$1:4:8 \Rightarrow (4-1):(8-4) \Rightarrow 3:4$ σε σχέση επίτριτο

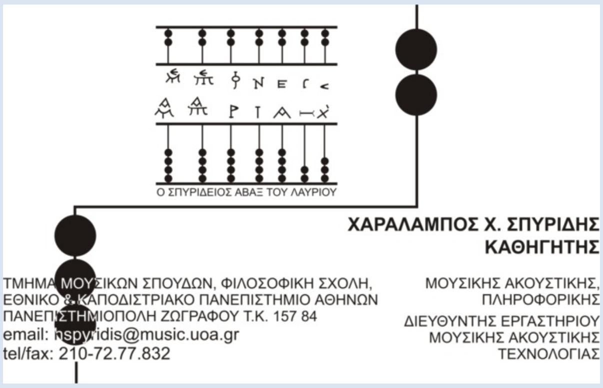
$$1:2:8 \Rightarrow (2-1):(8-2) \Rightarrow 1:6 \text{ σε σχέση εξαπλασία}$$

Επί όλων των θεμάτων, τα οποία εθίγησαν εις την εισήγησή μου, ο αναγνώστης μπορεί να ενημερωθεί πλήρως και αναλυτικώς από τα βιβλία:

1. Σίμωνος Ι. Καρά,
«***Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής***»
το οποίο θα κυκλοφορήσει οσονούπω.

2. Χαραλάμπου Χ. Σπυρίδη,
«***Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική***»





ΕΝΩΣΗ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ
11^{Ο} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ

«ΟΙ ΝΕΟΙ ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΣΤΟΝ ΑΙΩΝΑ ΜΑΣ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ, ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

30-31 ΜΑΡΤΙΟΥ, 1-2 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2006-02-25 ΛΑΡΙΣΑ, HOTEL DIVANI PALACE

Σπυρίδειος εκδοχή περί γενέσεως της Πυθαγορείου κλίμακος με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή συμφώνως προς την αρχαιοελληνική μαθηματική διαδικασία.

Περίληψη

Ο Πυθαγόρας κατασκεύασε την πρώτη οκτάφθογγη μουσική κλίμακα. Δυστυχώς μέχρι σήμερα δεν έχομε πληροφρίες από πηγές για το πώς ακριβώς και με ποιά μαθηματική διαδικασία ωδηγήθη στην κατασκευή αυτής της μουσικής κλίμακος, που φέρει το όνομά του. Λέγεται ότι δεν μας έχουν διασωθεί γραπτά του Πυθαγόρου, διότι άλλοι υποστηρίζουν ότι ο ίδιος δεν έγραψε κάποιο έργο –σαν τον Σωκράτη- και άλλοι ισχυρίζονται πως έγραψε μεν, αλλά δεν μας διεσώθησαν. Ο Ηράκλειτος λ.χ. ο μέγας φιλόσοφος του 500 π.Χ., σύγχρονος του Πυθαγόρου, ρητώς αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας έγραψε τα εξής τρία συγγράμματα: παιδευτικόν, πολιτικόν, φυσικόν και επί πλέον τον Ιερόν λόγον.
Διάφοροι ερευνητές, υποθέτοντες, προτείνουν διάφορα σκεπτικά, στηριζόμενα στην ημιόλιο σχέσις (3/2), για τον τρόπο που ο Πυθαγόρας εδόμησε την ομώνυμη μουσική κλίμακα.
Το σκεπτικό, το οποίο θα αναπτυχθεί στην εισήγηση, βασίζεται αποκλειστικά στον αλγόριθμο του μουσικού χωρίου του Πλατωνικού Τιμαίου (35a1-36b6) δια του οποίου ο Θεός εδόμησε την Ψυχήν του Κόσμου. Θα μπορούσε να υποθέσει κανείς για ευλογοφανείς λόγους –που αναφέρονται- ότι έτσι ενήργησε ο Πυθαγόρας και εδόμησε την μουσική κλίμακά του, εύρους ενός διαπασών, την οποία –ξανά δυστυχώς- οι μη γνωρίζοντες την αρχαιοελληνική φιλοσοφία και θεωρία της μουσικής- θεμελιωτές της ευρωπαϊκής μουσικής -εκόντες άκοντες κατέστρεψαν και ως δομή και ως ήθος ακούσματος.

Ο Μέγας Σάμιος Φιλόσοφος, Μύστης, Πειραματικός, Φυσικός, Μαθηματικός, Αστρονόμος, Μουσικός, Ιατρός, αλλά και Αναμορφωτής και Ρυθμιστής κοινωνιών Πυθαγόρας (586-490 π.Χ.) κατεσκεύασε μία μουσική κλίμακα, η οποία μέχρι σήμερα φέρει το όνομά του.
Δεν έχομε πληροφρίες από πηγές για το πώς ακριβώς και με ποιά μαθηματική διαδικασία ο Πυθαγόρας ωδηγήθη στην κατασκευή αυτής της μουσικής κλίμακος. Διάφοροι ερευνητές, υποθέτοντες, προτείνουν διάφορα σκεπτικά για τον τρόπο που ο Πυθαγόρας εδόμησε την ομώνυμη μουσική κλίμακα, τα οποία βασίζονται στην ημιόλιο σχέσις (3/2), δηλαδή στο «δια πέντε» διάστημα, με τη φιλοσοφία του κύκλου των πεμπτών της συγχρόνου ευρωπαϊκής μουσικής.

Έχομε τη ρήση του Νικομάχου (*Εγχειρίδιον*, 5): «ὅτι τῇ ἑπταχόρδῳ λύρᾳ τήν ὀγδόην ὁ Πυθαγόρας προσθεὶς τὴν διὰ πασῶν συνεστήσατο ἁρμονίας». Δηλαδή ο Πυθαγόρας δια προσθέσεως της ογδόης χορδής (=φθόγγου) στην επτάχορδο λύρα, συνέστησε την αρμονία, που έτσι την εποχή του Πυθαγόρου ωνομάζετο το διαπασών ή η οκτάβα, κατά τη σημερινή ορολογία. Πηγές αναφέρουν ότι τούτο επέτυχε ο Πυθαγόρας συνδέων δύο τετράχορδα με μία ενδιάμεση διάζευξη ενός επογδόου τόνου (9/8) (Σχήμα 1).

Σχήμα 1: Δύο διεζευγμένα τετράχορδα, τα οποία δομούν το διάστημα ενός διαπασών.

Στόχος της εισηγήσεως είναι να προταθεί μια μαθηματική, Πυθαγόρειος στον χαρακτήρα, διαδικασία δια της οποίας να δομείται η Πυθαγόρειος κλίμακα. Ο εισηγητής, μελετητής του «μουσικού χωρίου» εκ του Πλατωνικού Τιμαίου, θεωρεί ότι ο Πυθαγορείου χαρακτήρος Πλατωνικός αλγόριθμος «*Περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου*» (35a1-36b6) μπορεί, τροποποιούμενος, να οδηγήσει στη δομή της Πυθαγορείου μουσικής κλίμακος.

Ο εισηγητής κάνει τις εξής δύο υποθέσεις:

1) Ο Πλατωνικός αλγόριθμος είναι πράγματι προϊόν σκέψεως του χωρίς αμφιβολία μεγάλου μαθηματικού Πλάτωνος. Ο αλγόριθμος αυτός οδηγεί στη γένεση της Ψυχής του Κόσμου, δηλαδή στη δόμηση μιας αλληλουχίας νοτών -Δωρίου χαρακτήρος- που καλύπτουν ένα μουσικό εύρος δύο δις διαπασών, ενός δια πέντε και ενός επογδόου, δηλαδή με όρους της συγχρόνου ευρωπαϊκής μουσικής εύρος τεσσάρων οκτάβων, μιας πέμπτης και ενός τόνου. Ο αλγόριθμος αυτός, τροποποιούμενος, οδηγεί κάλλιστα στην κατασκευή της Πυθαγορείου κλίμακος.
2) Ο Πλατωνικός αλγόριθμος πιθανόν να είναι προϊόν σκέψεως του Πυθαγόρου, δια του οποίου ο Πυθαγόρας κατεσκεύασε την ομώνυμη μουσική κλίμακα και, 150 έτη αργότερα, ο Πλάτων, τροποποιώντας τον, να ωδηγήθη στη γένεση της Ψυχής του Κόσμου, επιτυγχάνοντας δι' αυτού να διδάξει στους ακοατές του Μαθηματικά και συγκεκριμένως, όπως αναφέρει ο Πρόκλος (*Πρόκλου εις τον Τίμαιον* Γ 174D 23- 175D 5), τους πολλαπλασίους λόγους, τις μεσότητες ανάμεσά τους, τους επιτρίτους και τους ημιολίους λόγους, που εμφανίζονται ανάμεσα σε αυτές τις μεσότητες και τον τρόπο που αυτοί οι λόγοι συμπληρούνται με επόγδοα διαστήματα και λείμματα,

Η πρώτη υπόθεσίς μου δεν θίγει κανέναν. Δέχομαι τον αλγόριθμο ως νοητικό δημιούργημα του Πλάτωνος, τον τροποποιώ καταλλήλως και δομώ την Πυθαγόρειο κλίμακα.
Η δεύτερη υπόθεσίς μου θίγει τον Μέγα Φιλόσοφο και Μαθηματικό Πλάτωνα, αφού του αφαιρεί την πατρότητα της λογικής του αλγορίθμου και την αποδίδει στον Πυθαγόρα. Δηλαδή δεν τον θεωρώ ευρετή του αλγορίθμου, αλλά μεταβολέα του αλγορίθμου. Απολογούμενος, θα έλεγα ότι αυτή μου η ενέργεια δεν είναι εντελώς αυθαίρετη, αλλά εδράζεται επί γραπτών αρχαίων πληροφοριών ή, κατ' άλλους, επί γραπτών αρχαίων «κακοβούλων» φημών.

Κυρίες και Κύριοι σύνεδροι, μέχρι σήμερα είναι γνωστό ότι δεν μας έχουν διασωθεί γραπτά του Πυθαγόρου. ΄Αλλοι υποστηρίζουν ότι ο ίδιος δεν έγραψε κάποιο έργο και άλλοι ισχυρίζονται πως έγραψε μεν, αλλά δεν μας διεσώθη.
Όσον αφορά στα υποτιθέμενα γραπτά έργα του Πυθαγόρου, με μεγάλη αμηχανία αντιμετωπίζονται οι πολλές και αντιφατικές μαρτυρίες τόσο, ώστε δεν μπορεί να αποφανθεί κανείς μετά βεβαιότητος υπέρ της μιας ή της άλλης εκδοχής.

Ο Γαληνός, ο Φλάβιος Ιώσηπος, ο Κλαυδιανός Μαμέρτιος, ο Λουκιανός, ο Αρκεσίλαος και ο Καρνεάδης (*Περί της Αλεξ. τύχης* Ι, 4, 328) υποστηρίζουν ότι ο Πυθαγόρας δεν άφησε κανένα γραπτό κείμενο. Μάλιστα ο Πλούταρχος τον παρομοιάζει με τον Σωκράτη, που κι αυτός δεν άφησε κανένα γραπτό κείμενο.

Αντιθέτως, ο μέγας προσωκρατικός φιλόσοφος Ηράκλειτος (540-480 π.Χ.), σύγχρονος του Πυθαγόρου, λέγεται ότι αναφέρει τον Πυθαγόρα ως συγγραφέα των τριών συγγραμμάτων **παιδευτικού**, **πολιτικού, φυσικού** και επί πλέον του **Ιερού λόγου**.
Επίσης, ο Αλέξανδρος Πολυΐστωρ, τον οποίο παραθέτει εκτενώς ο Διογένης Λαέρτιος *(Βίοι VIII, 2533)*, ισχυρίζεται ότι ο Πυθαγόρας άφησε **Πυθαγορικά Υπομνήματα** (σημειώσεις σκελετού μαθημάτων).
Ο Διογένης Λαέρτιος χρησιμοποιεί τον Ηράκλειτο, προκειμένου να ανασκευάσει τους ισχυρισμούς κάποιων ότι ο Πυθαγόρας δεν άφησε γραπτά έργα *(Βίοι VIII, 6-7).* Συμφώνως προς τον Διογένη Λαέρτιο (ΙΙΙ, 9)[1] ο Σάτυρος εβεβαίωνε ότι ο Φιλόλαος είχε υπό την φύλαξή του τα τρία «πυθαγορικά βιβλία» και με την διαμεσο-

[1] Λέγουσι δέ τινες, ὧν ἐστι καὶ Σάτυρος (FHG iii. `163 sq.),
ὅτι Δίωνι ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν ὠνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικὰ παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν.
Διογένης Λαέρτιος, 3, 9, 1-3.

Φιλόλαος Κροτωνιάτης Πυθαγορικός. παρὰ τούτου Πλάτων ὠνήσασθαι τὰ βιβλία τὰ Πυθαγορικὰ Δίωνι γράφει.
Διογένης Λαέρτιος, 8, 84, 9-10.

DIOG. VIII 84. 85 Φιλόλαος Κροτωνιάτης Πυθαγορικός. παρὰ τούτου Πλάτων ὠνήσασθαι τὰ βιβλία τὰ Πυθαγορικὰ Δίωνι γράφει
Φιλόλαος, *Testimonia*, θραύσμα 1, 1-2.

Diog. III 9 λέγουσι δέ τινες, ὧν ἐστι καὶ Σάτυρος [fr. 16 FHG III 163], ὅτι Δίωνι ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν ὠνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικὰ παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν. EUSEBIUS adv. Hierocl. p. 64 (`380, 8 Kayser) καὶ μὴν οὐδ' ὁ περιβόητος Πλάτων πάντων γε μᾶλλον τῆς Πυθαγόρου κεκοινωνηκὼς φιλοσοφίας οὔτ' Ἀρχύτας οὔτ' αὐτὸς ἐκεῖνος ὁ τὰς Πυθαγόρου γραφῇ παραδοὺς ὁμιλίας Φιλόλαος.
Φιλόλαος, *Testimonia*, θραύσμα 8, 9-14.

Diog. L. III, 9, de Platone: Λέγουσι δέ τινες (ὧν ἐστι καὶ Σάτυροσ) ὅτι Δίωνι ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν, ὠνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικὰ παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν.
Σάτυρος βιογρ., *Θραύσματα*, θραύσμα 16, 1-4.

λάβηση του Δίωνος, του γυναικαδέλφου του τυράννου της πόλεως των Συρακουσών του Διονυσίου του Α΄, τα αγόρασε αντί του μυθικού ποσού των 100 μνων.

Ο Πλάτων, ως γνωστόν, ήτο Πυθαγόρειος. Μάλιστα εμαθήτευσε κοντά στον περίφημο Πυθαγόρειο Αρχύτα τον Ταραντίνο επί διετίαν, όταν επεσκέφθη την Σικελία. Συνεπώς, κατείχε την Πυθαγόρειο γνώση. Εάν ισχύει, επί πλέον και η πληροφορία του Διογένους του Λαερτίου και του Σατύρου, «Πλάτων, Δίωνι ὠνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικὰ παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν», τότε ο Πλάτων, ως κάτοχος και των Πυθαγορείων χειρογράφων, ήτο κάτοχος της Πυθαγορείου γνώσεως με έναν αμεσότατο και μοναδικό τρόπο!

Είτε ισχύει η πρώτη μου υπόθεσις, είτε ισχύει η δεύτερη –δεν χρειάζεται να λάβω θέση- το σκεπτικό, το οποίο θα αναπτυχθεί παρακάτω για την κατασκευή της Πυθαγορείου μουσικής κλίμακος, βασίζεται αποκλειστικώς στον αλγόριθμο του μουσικού χωρίου του Πλατωνικού *Τιμαίου* (35a1-36b6), ο οποίος λειτουργεί με βάση το **ταυτόν**, το **θάτερον** και την **ουσίαν** δηλαδή βασίζεται αφενός στους γεννήτορες αριθμούς **1**, **2** και **3** της πυθαγορείου αριθμοσοφίας[2] και αφετέρου στους **αρμονικό μέσο**, **αριθμητικό μέσο** και **γεωμετρικό μέσο** της Πυθαγορείου θεωρίας περί των αναλογιών, αντιστοίχως.
Ο αλγόριθμος για τη δόμηση της Πυθαγορείου μουσικής κλίμακος θα μπορούσε να έχει διατυπωθεί σε Πλατωνικό ύφος γραφής ως ακολούθως:

τῆς ἀμερίστου
καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταὐτοῦ φύσεως [αὖ πέρι] καὶ τῆς τοῦ
ἑτέρου, καὶ κατὰ ταὐτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· καὶ τρία λαβὼν
αὐτὰ ὄντα συνεκεράσατο εἰς μίαν πάντα ἰδέαν, τὴν θατέρου
φύσιν δύσμεικτον οὖσαν εἰς ταὐτὸν συναρμόττων βίᾳ.
μειγνὺς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἕν,
πάλιν ὅλον τοῦτο μοίρας ὅσας προσῆκεν διένειμεν, ἑκάστην
δὲ ἔκ τε ταὐτοῦ καὶ θατέρου καὶ τῆς οὐσίας μεμειγμένην.
ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς
μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης.
μετὰ δὲ ταῦτα συνε-
πληροῦτο τὸ διπλάσιον διάστημα, μοίρας
ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτου, ὥστε
ἐν τῷ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ
μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν

[2] Όλα τα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα εκφράζονται ως γινόμενο δυνάμεων των αριθμών 2 και 3, είτε με θετικούς, είτε με αρνητικούς εκθέτες. Κατά τα γνωστά, οι αριθμοί 1, 2, 3, 4 δομούσαν την ιερά τετρακτύ των Πυθαγορείων, ενώ οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 δομούσαν τη μείζονα τετρακτύ του Πλάτωνος. Όλα συμμετέχουν σε μια θεολογία. Μια θεολογία που γοητεύεται να ανακαλύπτει τη θεία πρόνοια στους λόγους των ακεραίων αριθμών που διέπουν, κατά την αντίληψή της, τα φαινόμενα. Οι Πυθαγόρειοι ήσαν κυρίως θεολόγοι. Οι επιστημονικοί τομείς των Πυθαγορείων είναι όψεις ενός θεολογικού συστήματος. Δεν εφαρμόζουν τα μαθηματικά στη μουσική. Χρησιμοποιούν τη μουσική κλίμακα για να τεκμηριώσουν τη μυστική τους αριθμοσοφία. Αναζητούν την επαλήθευση της θείας πρόνοιας στην παγκόσμιο αρμονία, την οποία επιδιώκουν να εκφράσουν με τους ίδιους λόγους ακεραίων αριθμών, που χρησιμοποιούν για τον καθορισμό των μουσικών διαστημάτων στο μονόχορδο. Και το σπουδαιότερο, αυτή η κάπως απλοϊκή, αλλά γοητευτική για τον θρησκευόμενο θεώρηση του κόσμου, στηρίζεται σε μια θεολογία μονοθεϊστική.

δὲ ἴσῳ μὲν κατ᾽ ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.
ἐπιτρίτων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπογδόου γενο-
μένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν,
τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα συνεπληροῦτο,
λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης δια-
στάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς
ὅρους εξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ
τετταράκοντα καὶ διακόσια. καὶ δὴ καὶ τὸ μειχθέν, ἐξ
οὗ ταῦτα κατέτεμνεν, οὕτως ἤδη πᾶν κατανηλώκει.

«Από την αδιαίρετη και πάντοτε αμετάβλητη Ουσία (το ταυτόν) και από τη διαιρετή και μεταβαλλόμενη στα φυσικά σώματα Ουσία (το θάτερον) συνέθεσε ένα τρίτο είδος Ουσίας, ενδιάμεσο, αποτελούμενο και από τις δύο. Στην περίπτωση πάλι της Ταυτότητας και της Διαφοράς, ακολουθώντας την ίδια αρχή, συνέθεσε ενδιάμεσα μείγματα, που αποτελούνται από το αδιαίρετο και από το διαιρετό στα σώματα τμήμα τους. Παίρνοντας έπειτα τα τρία αυτά συστατικά τα συνέπτυξε σε μια μορφή, αναγκάζοντας τη Διαφορά, που είναι από τη φύση της δύσμεικτη, να ενωθεί με την Ταυτότητα και, στη συνέχεια, το μείγμα των δύο να ενωθεί με την Ουσία.
Έχοντας φτιάξει, λοιπόν, ένα μείγμα από τρία συστατικά, το διένειμε ξανά σε δύο κομμάτια –το καθένα από αυτά τα κομμάτια απετελείτο και από την Ταυτότητα και από τη Διαφορά και από την Ουσία-. Από τα δύο κομμάτια το δεύτερο κομμάτι ήταν διπλάσιο [2] από το πρώτο [1].
Έπειτα συμπλήρωσε αυτό το διπλάσιο διάστημα κόβοντας και άλλα κομμάτια από το αρχικό μείγμα και τοποθετώντας τα ανάμεσα στα δύο κομμάτια της πρώτης διαιρέσεως, με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχουν δύο μέσοι σε αυτό το διάστημα. Ο πρώτος [αρμονικός μέσος] χωρίζει το διάστημα σε δύο μέρη, τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο με τον λόγο των δύο ακραίων αριθμών του διαστήματος, και ο δεύτερος [αριθμητικός μέσος] απέχει εξ ίσου από τους δύο ακραίους αριθμούς. Αυτοί οι δεσμοί εδημιούργησαν δύο τμήματα 4/3 (επίτριτα) και ένα τμήμα 9/8 (επόγδοο) με τα δύο αρχικά κομμάτια. Συμπλήρωσε όλα τα επίτριτα διαστήματα (4/3) με επόγδοα διαστήματα (9/8), αφήνοντας υπόλοιπο ένα τμήμα, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί με το κλάσμα 256/243 (λείμμα ή έλασσον ημιτόνιο). Έτσι εξαντλήθηκε όλο το αρχικό μείγμα από το οποίο είχε αρχίσει να κόβει τα κομμάτια αυτά».

Ας ξεκινήσουμε με την εις βάθος μελέτη αυτού του αλγορίθμου.
Κατ' εμέ, ο επινοήσας τον αλγόριθμο Μαθηματικός –όποιος κι αν είναι αυτός- ρητά αναφέρει:

τῆς ἀμερίστου
καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταὐτοῦ φύσεως [αὖ πέρι] καὶ τῆς τοῦ
ἑτέρου,
(Στίχοι 1 - 5)

[Από την αδιαίρετη και πάντοτε αμετάβλητη Ουσία και από τη διαιρετή και μεταβαλλόμενη στα φυσικά σώματα Ουσία συνέθεσε ένα τρίτο είδος Ουσίας, ενδιάμεσο, αποτελούμενο και από τις δύο].

καὶ κατὰ ταὐτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· καὶ τρία λαβὼν
αὐτὰ ὄντα συνεκεράσατο εἰς μίαν πάντα ἰδέαν, τὴν θατέρου
φύσιν δύσμεικτον οὖσαν εἰς ταὐτὸν συναρμόττων βίᾳ.
μειγνὺς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἕν
(Στίχοι 5 - 9)

[Στην περίπτωση πάλι της Ταυτότητος και της Διαφοράς, ακολουθώντας την ίδια αρχή, συνέθεσε ενδιάμεσα μείγματα, που αποτελούνται από το αδιαίρετο και από το διαιρετό στα σώματα τμήμα τους. Παίρνοντας έπειτα τα τρία αυτά συστατικά τα συνέπτυξε σε μια μορφή, αναγκάζοντας τη Διαφορά, που είναι από τη φύση της δύσμεικτη, να ενωθεί με την Ταυτότητα και, στη συνέχεια, το μείγμα των δύο να ενωθεί με την Ουσία].

Τα λόγια αυτά του Πλάτωνος –διότι από τον διάλογό του Τίμαιος έχουν ληφθεί- ωδήγησαν τους ερμηνευτές του σε πάρα πολλές διαφορετικές ερμηνευτικές εκδοχές. Εκείνο που εγώ επισημαίνω είναι ότι στα αποσπάσματα του ανωτέρω χωρίου (στίχοι 1-5) και (στίχοι 5 - 9) παρουσιάζονται δύο πανομοιότυπες διαδικασίες αναμείξεως δύο πραγμάτων, προκειμένου να προκύψει κάποιο τρίτο. Γιατί;

Μελετώντας την Αριθμητική των Πυθαγορείων βρίσκουμε στην Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού το εξής απόσπασμα:

Πάλιν δὲ ἐξ ἀρχῆς, ἐπεὶ τοῦ ποσοῦ τὸ
μὲν ὁρᾶται καθ' ἑαυτό, μηδεμίαν πρὸς ἄλλο σχέσιν
ἔχον, οἷον ἄρτιον, περιττόν, τέλειον, τὰ ἐοικότα, τὸ
δὲ πρὸς ἄλλο πως ἤδη ἔχον καὶ σὺν τῇ πρὸς ἕτερον
σχέσει ἐπινοούμενον, οἷον διπλάσιον, μεῖζον, ἔλαττον,
ἥμισυ, ἡμιόλιον, ἐπίτριτον, τὰ ἐοικότα, δῆλον ὅτι
ἄρα δύο μέθοδοι ἐπιλήψονται ἐπιστημονικαὶ καὶ
διευκρινήσουσι πᾶν τὸ περὶ τοῦ ποσοῦ σκέμμα, ἀριθμητικὴ μὲν τὸ περὶ τοῦ καθ' ἑαυτό, μουσικὴ δὲ τὸ
περὶ τοῦ πρὸς ἄλλο.
Νικομάχου του Γερασηνού, Αριθμητική εισαγωγή, 1, 3, 1, 1-9 και 1, 3, 2, 1.

[Πάλι για να ξεκινήσουμε από την αρχή, επειδή του ποσού το μεν ένα μέρος παρατηρείται καθεαυτό και δεν έχει καμία σχέση με το άλλο, όπως άρτιο[3], περιττό[4], τέλειο και τα όμοια, το δε άλλο μέρος είναι σχετικό με κάτι και νοείται μαζί με τη σχέση του με κάποιο άλλο πράγμα, όπως διπλάσιο, μεγαλύτερο, μικρότερο, μισό, ημιόλιο (3/2), επίτριτο (4/3) και τα όμοια, είναι φανερό ότι δύο επιστημονικές μέθοδοι θα επιληφθούν και θα διευκρινίσουν με όλη την έρευνα σχετικά με το ποσόν. Η αριθμητική μεν για το απόλυτο ποσόν και η μουσική για το σχετικό].
Ευάγγελος Σπανδάγος, *Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Εκδόσεις Αίθρα, σελ. 172.

Βασιζόμενος στο απόσπασμα αυτό, δέχομαι ότι η μία ανάμειξη αφορά στην Αριθμητική και η άλλη στη Μουσική, την επιστήμη των λόγων.

---

[3] Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.
Ευκλείδου, *Στοιχείων ζ.*

[4] Περισσὸς ἀριθμός ἐστιν ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.
Αυτόθι.

Όσον αφορά στην Αριθμητική, από τους Πυθαγορείους γνωρίζουμε ότι:
1. Αριθμός[5] είναι η οντότης της οποίας το γινόμενον με τον εαυτόν της δίδει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του αθροίσματος με τον εαυτόν της, δηλαδή
$x \cdot x > x + x \Rightarrow x^2 > 2x$.

2. Ο Θέων ο Σμυρναίος στο έργο του «*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*» αναφέρει: *«Η μονάδα είναι η αρχή όλων των πραγμάτων και κυρίαρχη όλων… Από αυτήν όλα εκπορεύονται και η ίδια δεν απορρέει από τίποτα. Είναι αδιαίρετη και είναι σε πλήρη ισχύ. Είναι αναλλοίωτη και δεν εξέρχεται ποτέ από την καθαρή φύση της με πολλαπλασιασμό,* δηλαδή 1x1=1».
Η μονάς είναι γεννήτωρ των περιττών αριθμών. Στη Γεωμετρία η μονάς εκφράζει το σημείο και στη Φιλοσοφία αντιστοιχεί στο «**ταυτόν**» (αμερές, αμετάβλητο), δηλαδή την ομοιότητα – ταυτότητα[6].

Η **δυάς** είναι το μέσον ανάμεσα στο **πλήθος,** δηλαδή τον αριθμό και στη **μονάδα,** διότι, είτε πολλαπλασιαζομένη επί τον εαυτόν της, είτε προστιθεμένη εις αυτόν, παράγει ίδια ποσότητα, δηλαδή 2 x 2 = 2 + 2.
Για τους Πυθαγορείους η δυάς είναι αιτία της ανομοιότητος, στερείται μορφής, γι' αυτό και χαρακτηρίζεται «*δυάς απροσδιόριστος*». Είναι γεννήτωρ των αρτίων αριθμών. Στη Γεωμετρία η δυάς είναι η φύση της ευθείας (ή πλευράς), η αρχή του μήκους. Στη Φιλοσοφία εκφράζει το «**θάτερον**» (μεριστό) δηλ. την ετερότητα, διαφορετικότητα[7].

Η **τριάς** είναι για τους Πυθαγορείους ο πρώτος αριθμός, επειδή 3 x 3 > 3 + 3.
Ο Θέων γράφει: *«Είναι ο πρώτος αριθμός που έχει αρχή, μέση και τέλος… και στον οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε τη λέξη πλήθος».* Η τριάς είναι επίσης ο πρώτος εν ενεργεία περιττός αριθμός και προκαλεί τη δύναμη της μονάδος να προχωρήσει σε ενέργεια και επέκταση.
Στη Γεωμετρία η τριάς εκφράζει τη φύση του επιπέδου, αφού τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο και το τρίγωνο είναι η αρχή όλων των σχημάτων. Στον *Τίμαιο* η τριάς αντιστοιχεί στην «**ουσία**», την ανάμειξη δηλαδή του «**ταυτού**» με το «**θάτερον**».

Με αυτήν την ανάμειξη του ταυτού, του θατέρου και της ουσίας, δηλαδή της μονάδος, της δυάδος και της τριάδος ο Πλάτων κατασκευάζει τα κύρια εργαλεία για τη δημιουργία της Ψυχής του Κόσμου, που είναι οι αριθμοί[8], οι εκφραστές της ποσότητος.

---

[5] Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.
Αυτόθι.

[6] Νικόμαχος ο Γερασηνός «*Αριθμητική Εισαγωγή*», σελ. 267 (μτφ) και Πλούταρχος «*Περί της εν Τιμαίω ψυχογονίας*» 1024D, σελ. 147 (μτφ)].

[7] ἑτερότητος γὰρ πρωτίστη ἔννοια ἐν δυάδι·
Νικομάχου, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής* 21, 22

[8] Αρίστανδρος και Νουμήνιος (ανάμειξη του 1, ως αμερίστου, και του 2, ως μεριστής, προέκυψε ο αριθμός, το 3, κ.λπ.)

ὅ γα μὰν ἀριθμὸς ἔχει δύο
μὲν ἴδια εἴδη, περισσὸν καὶ ἄρτιον, τρίτον δὲ ἀπ' ἀμ-

Τῶν δὲ μεσοτήτων τριῶν οὐσῶν ἡ μὲν γεωμετρικὴ τὸ οὐσιῶδές πως συνδεῖ τῶν ψυχῶν, ἡ δὲ ἁρμονικὴ τὴν ταὐτότητα, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τὴν ἑτερότητα

Μιχαήλ Ψελλός, Γεωργίου του Κεδρηνού Σύνοψις Ιστοριών, τόμος XI, έτος 1058.

Η άλλη ανάμειξη υποστηρίζω, στηριζόμενος στα γραφόμενα υπό του Μιχαήλ Ψελλού, αναφέρεται στη μουσική, την επιστήμη των λόγων, με την έννοια των αναλογιών, δια της οποίας ο τεχνικός Νους, κατά τον Πλάτωνα, θα συσχετίσει μεταξύ τους τα μέρη του συνόλου και θα εγκαταστήσει εις αυτό μαθηματική τάξη δια των αναλογιών, μειώνοντας την εντροπία του κατά την ακόλουθο ρήση των Πυθαγορείων:

«Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος
καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὴν συμμετρίαν
καὶ συμμετρία ἦν ὁ λόγος»

Αυτή η ανάμειξη γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

…τῆς ἀμερίστου
καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταὐτοῦ φύσεως [αὖ πέρι] καὶ τῆς τοῦ
ἑτέρου, καὶ κατὰ ταὐτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ
(Στίχοι 1 - 6)

Κατά το απόσπασμα (στίχοι 1 - 6) ανέμειξε την ουσία του ταυτού, (αμερούς, αμεταβλήτου) με την ουσία του θατέρου (μεριστού, μεταβλητού) και εδημιούργησε τρίτη ουσία ανάμεσά τους.

$$\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} \Rightarrow \text{ΤΑΥΤΟΝ} < \text{ΟΥΣΙΑ} < \text{ΘΑΤΕΡΟΝ}$$

Επειδή στα *Θεολογούμενα της Αριθμητικής* του Ιαμβλίχου με την έννοια **σύνθεσις** υπονοείται η πράξη της προσθέσεως και με την έννοια **ανάμειξις** υπονοείται η πράξη του πολλαπλασιασμού, πολλαπλασιάζοντας, λοιπόν, ο θεός την ουσία του ταυτού, δηλαδή τον αρμονικό μέσο, επί την ουσίαν του θατέρου, δηλαδή τον αριθμητικόν μέσο, εδημιούργησε την τρίτη ουσία, η οποία τιθεμένη ανάμεσα στις δύο προηγούμενες ουσίες, δομεί μία συνεχή αναλογία ως ακολούθως:

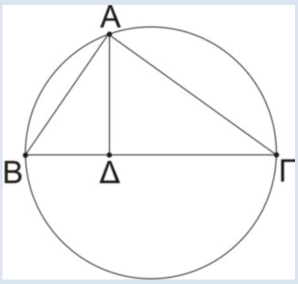
φοτέρων μειχθέντων ἀρτιοπέριττον· ἑκατέρω δὲ τῶ
εἴδεος πολλαὶ μορφαί, ἃς ἕκαστον αὐταυτὸ σημαίνει.
Φιλόλαος, *Σπαράγματα*, Σπάραγμα 5, 1-4.

$$\frac{2xy}{x+y}\cdot\frac{x+y}{2}=xy=\left(\sqrt{xy}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{2xy}{x+y}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{αρμονικός μέσος}}{\text{γεωμετρικός μέσος}}=\frac{\text{γεωμετρικός μέσος}}{\text{αριθμητικός μέσος}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ}}{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}}=\frac{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}}{\text{ΕΤΕΡΟΤΗΤΑ}}$$

Ποιά είναι η τρίτη ουσία και τί σημαίνει η ανωτέρω μαθηματική διαδικασία; Η τρίτη ουσία είναι ο γεωμετρικός μέσος $\left(\sqrt{xy}\right)$ κατά τον Μιχαήλ Ψελλό. Ο γεωμετρικός μέσος είναι υψωμένος εις το τετράγωνο και μπορεί να υπολογισθεί γεωμετρικώς – ακόμη κι αν είναι ασύμμετρος αριθμός- με τη βοήθεια των ομοίων τριγώνων (Βλέπε σχήμα 2). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Δ είναι η προβολή της κορυφής Α επί της υποτεινούσης ΒΓ, ισχύει η σχέση $(\mathrm{A\Delta})^2=(\mathrm{B\Delta})\cdot(\Delta\Gamma)$. Εάν, λοιπόν, ληφθεί το μήκος ΒΔ ίσο προς τον αρμονικό μέσο (ταυτόν) των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, το μήκος ΔΓ ίσο προς τον αριθμητικό μέσο (θάτερον) αυτών, τότε το μήκος ΑΔ θα είναι ίσο προς τον γεωμετρικό μέσο (ουσία) τους. Κατόπιν όλων αυτών είναι δυνατόν σε μία διαδικασία κατατομής κανόνος επί του μάνικου εγχόρδου οργάνου να τεθούν τάστα στις πρέπουσες θέσεις και για το ταυτόν και για το θάτερον και για την ουσία.



Σχήμα 2: Γεωμετρικός τρόπος υπολογισμού του μεγέθους της ουσίας δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, γνωστών όντων του ταυτού και του θατέρου αυτών.

Τώρα ο Πυθαγόρας ή ο Πλάτων, 25 αιώνες πριν από τον Peano, διαθέτει ένα υλικό θεμελιωμένο με το αξίωμα του «επομένου»[9] (=ουσία), τους φυσικούς αριθμούς, τους οποίους θα ταξινομήσει και θα συσχετίσει με βάση τις αναλογίες, διότι ταξινομών το υλικό του, το καθιστά κτήμα του.

Εν συνεχεία ο Πλάτων παρουσιάζει την κατανομή των μερών του μείγματος.

πάλιν ὅλον τοῦτο μοίρας ὅσας προσῆκεν διένειμεν, ἑκάστην

[9] Με βάση το ταυτόν (=1) που δεν έχει προηγούμενο, και το θάτερον (=2), που έχει προηγούμενο το ταυτόν και επόμενο (=ουσία) το 3, δομείται το σύνολον των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, … ως μία ακολουθία με πρώτο στοιχείο –θεμελιώδη τελεστή γενήτορα- τη μονάδα (1), δεύτερο στοιχείο –θεμελιώδη τελεστή γενήτορα- το 2, επόμενο στοιχείο (=ουσία) το ε(2)=3 κ.ο.κ.

δὲ ἔκ τε ταὐτοῦ καὶ θατέρου καὶ τῆς οὐσίας μεμειγμένην.
(Στίχοι 10-11)

Αφού ανακάτεψε το μεριστόν με το αμέριστον και με την ουσία και, αφού από τρία έκανε ένα, μοίρασε[10] ξανά το σύνολο αυτό ως εξής σε δύο μερίδια, που το καθένα τους ήταν μείγμα από το ταυτό, το θάτερο και την ουσία.

ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς
μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης.
(Στίχοι 12-13)

Προ της αναλύσεως του Πλατωνικού ή του Πυθαγορείου αλγορίθμου, κρίνεται απαραίτητο να αναλυθούν δύο έννοιες εκ της Πυθαγορείου Θεωρητικής Αριθμητικής, ήτοι η έννοια των πολλαπλασίων και η έννοια των επιμορίων αριθμών καθώς επίσης και η έννοια του μέσου εκ της Πυθαγορείου θεωρίας των αναλογιών.

Ο **πολλαπλάσιος** αριθμός α είναι τέτοιος που, συγκρινόμενος με έναν άλλον αριθμό β, μικρότερόν του, τον περιέχει περισσότερο από μια φορά, δηλαδή $\alpha = k\beta,\ k \in N$
.
Επί παραδείγματι διπλάσιος σημαίνει $\alpha = 2\beta$.

Όταν ένας αριθμός α εμπεριέχει ολόκληρον έναν άλλον αριθμό β, μικρότερόν του, και επί πλέον ένα μόνον μέρος του αριθμού β, τότε ο α ονομάζεται **επιμόριος** του β.
Δηλαδή $\alpha = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\cdot\beta = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\nu \in \mathrm{N} \quad \& \ \alpha > \beta$.
Η ονομασία των επιμορίων αριθμών επιτυγχάνεται με τη χρήση της προθέσεως **επί** και το τακτικό αριθμητικό του παρονομαστού του συμμετέχοντος μέρους του αριθμού β.
Εάν $\nu = 3$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το τρία (3), τακτικό αριθμητικό είναι τρίτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επίτριτος $\alpha = \left(1+\frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}\right)\beta$.

Εάν $\nu = 8$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το οκτώ (8), τακτικό αριθμητικό είναι όγδοος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επόγδοος $\alpha = \left(1+\frac{1}{8} = \frac{8+1}{8} = \frac{9}{8}\right)\beta$.

μετὰ δὲ ταῦτα συνε-
πληροῦτο τὸ διπλάσιον διάστημα, μοίρας
ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτου, ὥστε
ἐν τῷ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας,
(Στίχοι 14-17)

τὴν μὲν ταὐτῷ
μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην,

---

[10] Ο Πρόκλος γι' αυτήν την ενέργεια διερωτώμενος (Πῶς δὲ μοίρας ἀφαιρεῖν τῆς ἀμερίστου κατ' οὐσίαν;) επισημαίνει: Τούτο σημαίνει ότι το υλικό από την ανάμειξη του ταυτού, του θατέρου και της ουσίας είναι μεριστό. Ο δημιουργός εδόμησε την ψυχή σε ένα όλον προτού αρχίσει να τη διαιρεί. Έτσι, λοιπόν, δεν χάνεται η ολότητα καθώς υφίστανται τα μέρη της, αλλά εξακολουθεί να υπάρχει και να προηγείται των μερών της. 199 D9-13.

(Στίχοι 17-18)

Πρόκειται για την αρμονικήν ή υπενάντιον μεσότητα, αφού γι’ αυτήν ισχύει

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}, \quad (\alpha>\beta>\gamma)$$

τὴν
δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.
(Στίχοι 18-19)

Πρόκειται για την αριθμητική μεσότητα, αφού γι’ αυτήν ισχύει

$$\alpha-\beta=\beta-\gamma, \quad (\alpha>\beta>\gamma)$$

Ο Πυθαγόρας, λοιπόν, παραγγέλλει να συμπληρώσουμε το διπλάσιο διάστημα, δηλαδή το διάστημα του διαπασών, με την αρμονική και την αριθμητική μεσότητα.

Ανάλογες πληροφορίες αντλούμε και από τον Αριστοτέλη και από τον Νικόμαχο τον Γερασηνό:

τὴν ἁρμο-
νίαν κρᾶσιν καὶ σύνθεσιν ἐναντίων εἶναι
Αριστοτέλης, *Περί Ψυχής*, Bekker p. 407b, 30-31.

ἁρμονία δὲ πάντως ἐξ ἐναντίων γίνεται·
Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 19, 1, 4.

Ο Πλούταρχος στο κεφάλαιο 15 (*Περί της εν Τιμαίω Ψυχογονίας*) αναφέρεται στην αριθμητική και την αρμονική αναλογία, οι οποίες συνδέονται με τις μουσικές συμφωνίες και τους μουσικούς φθόγγους. Επίσης στο κεφάλαιο 16 αναφέρει τον τρόπο υπολογισμού του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου.
Κατά τον Εύδωρο, το άθροισμα των ημίσεων δύο ακεραίων αριθμών, οι οποίοι εκφράζουν ένα μουσικό διάστημα, δίδει τον αριθμητικό μέσο.
Τούτο σημαίνει ότι οι όροι 1 και 2 του διπλασίου διαστήματος, προκειμένου να ενθέσουμε εις αυτό τον αριθμητικό τους μέσο (Πίνακας 1), πρέπει να έχουν ημίση ακεραίους αριθμούς. Γι’ αυτό διπλασιάζουμε τους όρους του διπλασίου διαστήματος.

Πίνακας 1: Ένθεση του αριθμητικού μέσου στο διπλάσιο διάστημα.

		2		**4**
αριθμητικός μέσος	$\beta=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$		**3**	

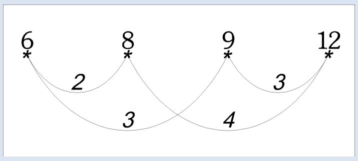
Κατά τον Πλούταρχο, στο διπλάσιο διάστημα το άθροισμα του ενός τρίτου του μικροτέρου όρου και του ημίσεος του μεγαλυτέρου όρου δίδει τον αρμονικό μέσο (Πίνακας 2).
Η νέα απαίτηση σημαίνει ότι, προκειμένου να ενθέσουμε τον αρμονικό μέσο, πρέπει οι δύο αριθμοί του διπλασίου διαστήματος να διαιρούνται και δια του 2 και δια του 3. Ήδη έχουν καταστεί διαιρετοί δια του 2. Γι’ αυτό, τριπλασιάζουμε τους αριθμούς του διπλασίου διαστήματος καθώς επίσης και τον ευρεθέντα αριθμητικό τους μέσο.

Πίνακας 2: Ένθεση αρμονικού μέσου στο διπλάσιο διάστημα.

		6		**12**
αρμονικός μέσος	$\alpha = 2\gamma \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\gamma}{3} + \frac{\alpha}{2}$		**8**[11]	

Άρα διηρέθη το διπλάσιο διάστημα με τις συγκεκριμένες δύο μεσότητες (αρμονική και αριθμητική) και προέκυψε η σειρά αριθμών, η οποία φαίνεται στον Πίνακα 3. Αυτή η σειρά των τεσσάρων αριθμών δεν είναι τίποτα άλλο, παρά οι όροι της μουσικής αναλογίας[12] και αυτός είναι ο μοναδικός τρόπος της γενέσεώς των.

[11] **Ας πάρουμε, λοιπόν, τον αριθμό 6 και τον διπλάσιό του, τον 12. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τον ίδιο λόγο, τον οποίον έχουν η δυάς με τη μονάδα. Ανάμεσα σ' αυτούς τους αριθμούς, που είναι εξαπλάσιοι της μονάδος και της δυάδος, παρεμβάλλονται οι αριθμοί 8 και 9, που είναι οι προαναφερθείσες μεσότητες (αρμονική και αριθμητική). Πράγματι, ο μεν αριθμός 8 κατά τον ίδιο λόγο υπερέχει και υπερέχεται με τους δύο ακραίους αριθμούς**
$\left(\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}\right)$
ο δε αριθμός 9 κατά το αυτό πλήθος μονάδων υπερέχει και υπερέχεται των δύο ακραίων αριθμών $(12-9=9-6)$**. Εξαπλασιάζοντας, λοιπόν, τη μονάδα και τη δυάδα βρήκαμε αριθμούς που να επιδέχονται τις προαναφερθείσες μεσότητες.**



[12] Σχετικά με τα «...περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας, τῆς ἐν τέσσαρσιν ὅροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης...» κατά τον Ιάμβλιχο στο «*Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς*» έχουμε να πούμε ότι πρόκειται περί μιας σειράς τεσσάρων ακεραίων αριθμών εκ των οποίων οι δύο ενδιάμεσοι είναι, αντιστοίχως, ο αρμονικός και αριθμητικός μέσος των δύο άκρων.
Τη μουσική αναλογία στην αρχαία ελληνική αρμονική δομούν οι αριθμοί 6, 8, 9, 12 και βρίσκουμε να τη χρησιμοποιούν πολλοί Πυθαγόρειοι όπως π.χ. ο Αρισταίος ο Κροτωνιάτης, ο Τίμαιος ο Λοκρός, οι Ταραντίνοι Φιλόλαος και Αρχύτας και ο Πλάτων στο περί γενέσεως ψυχής κόσμου στο διάλογό του *Τίμαιος*.
Στην εν λόγω αναλογία:
Η γεωμετρική αναλογικότης εκφράζεται δια των λόγων $\left(\frac{12}{8} = \frac{9}{6}\right)$ έκαστος των οποίων είναι ημιόλιος.
Η αριθμητική αναλογικότης εντοπίζεται μεταξύ των ζευγών των αριθμών 12, 9 και 9, 6, διότι 12-9=9-6.
Η αρμονική αναλογικότης εντοπίζεται μεταξύ των ζευγών των αριθμών 12, 8 και 8, 6, διότι $\left(\frac{12}{6} = \frac{12-8}{8-6}\right)$.
Επίσης, σε αυτή τη σειρά των αριθμών 6, 8, 9, 12 εντοπίζονται όλες οι μουσικές συμφωνίες γι' αυτό το λόγο, άλλωστε, και ωνομάσθη μουσική αναλογία.
Πράγματι, οι σχέσεις $\left(\frac{8}{6}\right)$ και $\left(\frac{12}{9}\right)$ εκφράζουν τον επίτριτο λόγο και ταυτοχρόνως την δια τεσσάρων συμφωνία.
Οι σχέσεις $\left(\frac{9}{6}\right)$ και $\left(\frac{12}{8}\right)$ εκφράζουν τον ημιόλιο λόγο και ταυτοχρόνως την δια πέντε συμφωνία.
Η σχέσις $\left(\frac{12}{6}\right)$ εκφράζει τον διπλάσιο λόγο και ταυτοχρόνως την δια πασών συμφωνία.

Πίνακας 3: Η σειρά των αριθμών που προέκυψε από την ένθεση του αριθμητικού και αρμονικού μέσου στο διπλάσιο διάστημα.

	9/8		
6	**8**	**9**	**12**
4/3		**4/3**	

ἐπιτρίτων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπογδόου γενο-
μένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν,
τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα συνεπληροῦτο,
λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης δια-
στάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς
ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ
τετταράκοντα καὶ διακόσια. καὶ δὴ καὶ τὸ μειχθέν, ἐξ
οὗ ταῦτα κατέτεμνεν, οὕτως ἤδη πᾶν κατανηλώκει.
(Στίχοι 20-27)

Τώρα θα πρέπει στη σειρά των αριθμών του Πίνακα 3 τα διαστήματα των όρων, τα οποία έχουν λόγο επίτριτο (4/3), να τα διαιρέσουμε σε δύο επογδόους τόνους και σε ένα λείμμα.

Εργαζόμεθα ως ακολούθως: Προκειμένου να ληφθεί ο επόγδοος ενός δοθέντος αριθμού, και να είναι ακέραιος αριθμός, θα πρέπει ο δοθείς αριθμός να διαιρείται ακριβώς δια του 8. Προς τούτοις, οκταπλασιάζομε όλους τους μέχρι στιγμής ληφθέντες αριθμούς (Πίνακας 3) και έχομε τη σειρά των αριθμών του Πίνακα 4:

Πίνακα 4: Οι άριθμοί της μουσικής αναλογίας 6, 8, 9, 12 οκταπλασιασμένοι, προκειμένου να ευρεθούν οι επόγδοοί τους.

	9/8		
48	**64**	**72**	**96**
4/3		**4/3**	

Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 48, 64 επόγδοος του 48 είναι ο αριθμός 54.
Στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 72, 96 επόγδοος του 72 είναι ο αριθμός 81.

Προκειμένου να ληφθούν οι δεύτεροι επόγδοοι όροι στα προμνημονευθέντα δύο επίτριτα διαστήματα, και να είναι ακέραιοι αριθμοί, οκταπλασιάζομε όλους τους μέχρι στιγμής ληφθέντες αριθμούς.
Έτσι, λοιπόν, στο επίτριτο διάστημα των αριθμών 384, 512 παρενεβλήθησαν οι δύο διαδοχικοί επόγδοοι όροι 432 και 486. Το απομένον διάστημα μεταξύ των όρων 486 και 512 είναι το διάστημα του λείμματος. Ακολουθεί εν διαζεύξει το επίτριτο διάστη-

---

Η σχέσις $\left(\frac{9}{8}\right)$ εκφράζει τον επόγδοον τόνο, ο οποίος ισούται με το ό,τι διαφέρει η διαπέντε συμφωνία από τη διατεσσάρων συμφωνία ή ο ημιόλιος λόγος από τον επίτριτο λόγο $\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{8}\right)$.

μα των αριθμών 576, 768 με τους δύο διαδοχικούς επογδόους όρους 648 και 729 και το λείμμα μεταξύ των όρων 729 και 768 (Πίνακας 5).

Πίνακα 5: Τα διαστήματα μεταξύ των όρων της Πυθαγορείου κλίμακος.

	9/8		**9/8**		**9/8**		
384	**432**	**486**	**512**	**576**	**648**	**729**	**768**
9/8		**256/243**		**9/8**		**256/243**	
4/3				**4/3**			

Οι παραπάνω αριθμοί 384 432 486 512 576 648 729 768 εκφράζουν τα μήκη των δονούμενων τμημάτων χορδής επί ενός συμπαντικού μονοχόρδου, τα οποία υλοποιούν ηχητικά τους οκτώ φθόγγους[13] της Πυθαγορείου κλίμακος.

Με βάση τη θεωρία των χορδών, μικρό μήκος δονουμένου τμήματος χορδής παράγει ήχο μεγάλης συχνότητος και μεγάλο μήκος δονουμένου τμήματος χορδής παράγει ήχο μικρής συχνότητος $\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1}, \; f_1 > f_2 \Rightarrow L_2 > L_1$.

Άρα η εν λόγω σειρά των δονουμένων τμημάτων χορδής εκφράζει μια σειρά μουσικών υψών, μια κλίμακα, κατά την κατιούσα διαδοχή. Αυτό είναι συμπέρασμα εξαιρετικής σπουδαιότητας. Άλλωστε οι αρχαίοι Έλληνες πάντοτε αντιμετώπιζαν τις κλίμακές των κατά την κατιούσα διαδοχή και μπορούμε να επικαλεσθούμε τον Αριστοτέλη, ο οποίος στο έργο του «*Προβλήματα, Όσα περί Αρμονίαν*», ομιλών για τη μέση (=ο φθόγγος της συναφής δύο τετραχόρδων) (Σχήμα 1) καθορίζει σαφέστατα κατιούσα κίνηση κατά την αντιμετώπιση του επταχόρδου:

διὸ καὶ μέσην αὐτὴν προσηγόρευσαν. ἢ ὅτι
ἦν τοῦ μὲν ἄνω τετραχόρδου τελευτή, τοῦ δὲ κάτω ἀρχή,

Σχήμα 1: Στο επτάχορδο σύστημα η Μέση είναι
το πέρας του άνω τετραχόρδου και αρχή του κάτω.

Με άλλα λόγια η δομή της Πυθαγορείου κλίμακος κατά την κατιούσα διαδοχή είναι δύο διεζευγμένα δώρια τετράχορδα δηλαδή
τόνος, τόνος, λείμμα, διαζευτικός τόνος, τόνος, τόνος, λείμμα.

---

[13] Το οκτάχορδο σύστημα δημιουργήθηκε τον 6ο π.Χ. αιώνα από τον Πυθαγόρα με την παρεμβολή μιας διάζευξης ανάμεσα σε δύο συνημμένα (συνεχή) τετράχορδα.
(Νικόμαχος, *Εγχειρίδιον*, 5): «ὅτι τῇ ἑπταχόρδῳ λύρᾳ τήν ὀγδόην ὁ Πυθαγόρας προσθεὶς τὴν διὰ πασῶν συνεστήσατο ἁρμονίας».

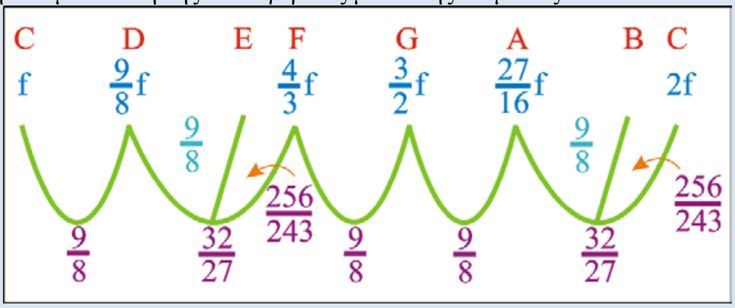
Εάν θελήσωμε να προσεγγίσουμε τη δομή της Πυθαγορείου κλίμακος με τη σύγχρονη ευρωπαϊκή σημειογραφία, θα είχαμε

E *D* *C* *B* *A* *G* *F* *e*

$$\frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243}$$

Όσοι δεν έχουν μελετήσει αρχαίους Έλληνες αρμονικούς και, ως εκ τούτου, δεν γνωρίζουν την παραπάνω Αριστοτέλειο διευκρίνιση, αντιμετωπίζουν τη συγκεκριμένη σειρά των δονουμένων τμημάτων χορδής ωσάν να εκφράζει μια σειρά μουσικών υψών, μια κλίμακα, κατά την ανιούσα διαδοχή και, εσφαλμένως, καταλήγουν ότι η Πυθαγόρειος κλίμαξ έχει τη δομή της C Major (Σχήμα 3). Αυτή δεν είναι η Πυθαγόρειος κλίμαξ με δώριο δομή τετραχόρδων, αλλά η Πυθαγόρειος κλίμαξ με λύδιο δομή τετραχόρδων, έχουσα παντελώς διαφορετικόν ήθος κατά τους αρχαίους.

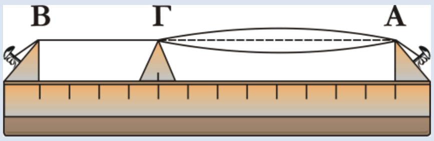
Σχήμα 3: Εσφαλμένη αντιμετώπιση της Πυθαγόρειας μουσικής κλίμακος



Το μουσικό διάστημα κατά τον Αριστόξενο

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Εργαστήριο Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Τμήμα Μουσικών Σπουδών
Πανεπιστήμιο Αθηνών



ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Στη χορδή ενός εγχόρδου οργάνου διακρίνονται τρία χαρακτηριστικά σημεία: Το ένα πακτωμένο άκρο της Α στον χορδοκράτη, το άλλο πακτωμένο άκρο της Β στο κλειδί και το σημείο Γ του δεσμού (τάστου) επί του οποίου πατάει το δάκτυλο του μουσικού.

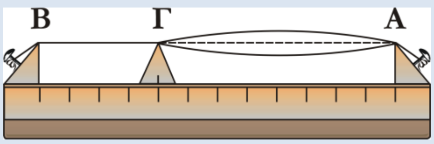
Κατά την Πυθαγόρειο άποψη, τη λογαριθμική, δηλαδή των αριθμητικών λόγων, (6^{ος} αι. π.Χ.) το μουσικό διάστημα αντιμετωπίζεται βάσει του δονουμένου τμήματος ΑΓ της χορδής. Κατά την Αριστοξένειο άποψη, τη γραμμική, (4^{ος} αι. π.Χ.) το μουσικό διάστημα αντιμετωπίζεται βάσει του ακινήτου τμήματος ΒΓ της χορδής.

Η Άλγεβρα, βάσει της οποίας διαχειριζόμεθα τα μουσικά διαστήματα κατά την Πυθαγόρειο άποψη μας είναι γνωστή από του αρχαίους Έλληνες αρμονικούς.

Στην παρούσα εργασία για πρώτη φορά παρουσιάζεται η Άλγεβρα για τη διαχείριση των μουσικών διαστημάτων κατά την Αριστοξένειο άποψη.

Haralambos C. Spyridis,
Professor in Musical Acoustics, Informatics,
Lab. of Musical Acustics & Technology,
Department of Music Studies, University of Athens.

The musical intervals by the Aristoxenean view



ABSTRACT: On the string of a string instrument three characteristic points are defined. Point A is fastened on the bridge, B is fastened on the key, and point Γ on the fret, point on which the musician presses the string.

According to the Pythagorean views, the logarithmic i.e. of the ratios, (6 B.C.) the musical interval is faced based on the vibrating part ΑΓ of the string. According to the Aristoxenean views, the linear, (4 B. C.) the musical interval is faced based on the static part ΒΓ of the string.

The Algebra, on which we handle the musical intervals according to the Pythagorean views, is known to us from the ancient Greek Kanonikoi.

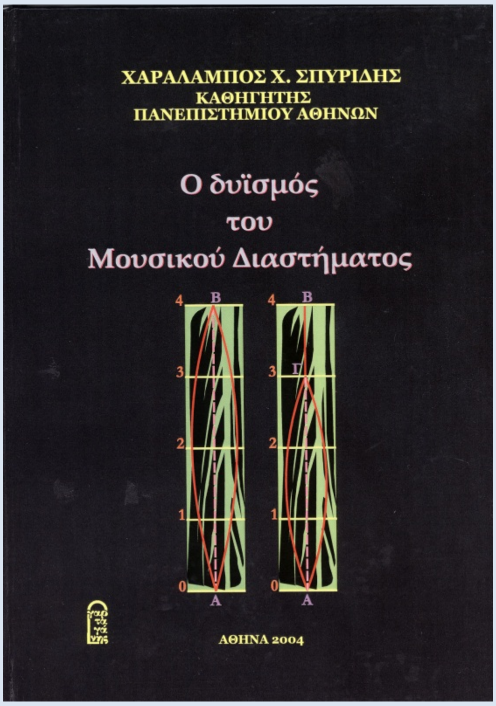
In the present paper for the first time is presented the Algebra for the handling of the musical intervals by the Aristoxenean view.

Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος

Στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών στα πλαίσια μαθήματος ελεύθερης επιλογής διδάσκω την Ευκλείδειο «Κατατομή Κανόνος». Πρόκειται για μια πυθαγόρεια πραγματεία, η οποία πραγματεύεται τη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου.

Με την έννοια Κανών υπονοείται το μονόχορδο. Είναι το όργανο πειραματισμού και έρευνας των «κανονικών», δηλαδή αυτών που στις μελέτες και τις έρευνές τους χρησιμοποιούσαν τον κανόνα.

Κατατομή σημαίνει την υποδιαίρεση με μουσικομαθηματικές διαδικασίες του μήκους του κανόνος και την τοποθέτηση δεσμών, δηλαδή τάστων, επ' αυτού, προκειμένου να αποδίδονται κατά το ηρμοσμένον τα σύμφωνα μουσικά διαστήματα της τότε μουσικής θεωρίας.



Εικόνα 1: Το σύγγραμμα του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη που πραγματεύεται τον δυϊσμό του μουσικού διαστήματος.

Εντρυφώντας κι εμβαθύνοντας στην πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*», διεπίστωσα ότι ο Ευκλείδης αντιμετωπίζει την έννοια «μουσικό διάστημα» από δύο εντελώς διαφορετικές οπτικές και για την κάθε μια οπτική, μάλιστα, χρησιμοποιεί με μεγάλη αυστηρότητα μια εντελώς διαφορετική ορολογία.

Αυτήν την Ευκλείδειο αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος ονόμασα «*δυϊσμό του μουσικού διαστήματος*» και πραγματεύομαι στο ομώνυμο σύγγραμμά μου (Εικόνα 1).

Δυϊσμός είναι επιστημονικός και φιλοσοφικός όρος που δηλώνει σε γενική έννοια κάθε διδασκαλία, η οποία σε κάποιο τμήμα του επιστητού ή σε κάποιο θέμα –οποιοδήποτε και αν είναι αυτό- παραδέχεται την ύπαρξη δύο αρχών κατ' ουσίαν διαφορετικών, που δεν μπορεί να αναχθεί απ' ευθείας η μία στην άλλη, παρά μόνον με κάποιον μετασχηματισμό.

Με δυϊσμό λ.χ. αντιμετωπίζεται ο χαρακτήρας του φωτός στην Οπτική. Κυματικός χαρακτήρας κατά τη θεωρία Huygens (17ος αιώνας) και την Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία του Maxwell (μέσον 19ου αιώνα), σωματιδιακός χαρακτήρας κατά τη

θεωρία του Newton (17ος αιώνας) και τη θεωρία των φωτονίων του Planck (20ος αιώνας).
Συγκεκριμένα, στην πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*» ο Ευκλείδης ασχολείται διεξοδικώτατα με τον δυϊσμό του μουσικού διαστήματος, αντιμετωπίζοντας το μουσικό διάστημα αφενός μεν ως μία σχέση δύο αριθμών προς αλλήλους, αφετέρου δε ως μία απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος. Δικαιολογείται η ενέργειά του αυτή από δύο σχόλια του Πορφυρίου στην περί της αρμονίας διδασκαλία του Πτολεμαίου, τα οποία αναφέρουν «**καὶ τῶν κανονικῶν δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων λέγουσιν**» και «**τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων τὸ διάστημα καλοῦσι**». Αυτά μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία οι έννοιες «διάστημα» και «λόγος (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» είναι ταυτόσημες.
Πρέπει να διευκρινισθεί ότι η σχέση των δύο αριθμών προς αλλήλους εκφράζει το λόγο των μηκών δύο **δονουμένων** τμημάτων χορδής επί του κανόνος, τα οποία ακουστικά υλοποιούν το μουσικό διάστημα.
Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος εκφράζει το μήκος του **σιγούντος** (=μη ηχούντος) τμήματος χορδής μεταξύ των δύο δεσμών (=τάστων) επί του κανόνος δια των οποίων υλοποιείται ακουστικά το μουσικό διάστημα.
Η πρώτη αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος είναι η Πυθαγόρειος και πραγματοποιείται με λόγους αριθμητικούς.
Η δεύτερη αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος είναι η Αριστοξένειος και θεάται το μουσικό διάστημα ως ένα ευθύγραμμο ακίνητο τμήμα μιας τεντωμένης χορδής. Αμφότερες εμπεριέχουν στη φύση τους τη λογαριθμηκότητα κατά τη σημερινή Άλγεβρα.
Η με τους αριθμητικούς λόγους αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων είναι περισσότερον «εύπλαστη» κατά τη μαθηματική της επεξεργασία και προτιμητέα από τους γνωρίζοντες Μαθηματικά. Η με τις αποστάσεις μεταξύ δύο σημείων αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων είναι περισσότερον «κατανοητή» από τους μουσικούς εκτελεστές, που δεν κατέχουν μαθηματικές γνώσεις.
Για την κατανόηση του παραπάνω δυϊσμού, θεώρησα καλό να παραθέσω ένα δείγμα εκ των δυϊκών εκφράσεων για το μουσικό διάστημα από την Ευκλείδειο πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*».

Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα
ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.
(Πρόταση η, 1-3)

ἐὰν δὲὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ τεσσάρων
ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα τὸ ἄρα
τονιαῖον διάστημά ἐστιν ἐπόγδοον.
(Πρόταση 13, 5-7)

Στην Ευκλείδειο πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*» από τη χρησιμοποιούμενη διαφορετική ορολογία για την ονομασία των μουσικών διαστημάτων (Πίνακας 1) αντιλαμβανόμεθα την οπτική με την οποία αντιμετωπίζονται από τον Ευκλείδη αυτά.

Πίνακας 1: Ονομασία των μουσικών διαστημάτων με βάση
την Πυθαγόρειο ή την Αριστοξένειο οπτική αντιμετωπίσεώς τους.

Μουσικό Διάστημα	Πυθαγόρειος οπτική	Αριστοξένειος οπτική
$\frac{4}{1}$	τετραπλάσιον	δὶς διὰ πασῶν
$\frac{2}{1}$	διπλάσιον	διὰ πασῶν
$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$	ἡμιόλιον	διὰ πέντε
$\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$	ἐπίτριτον	διὰ τεσσάρων
$\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8}$	ἐπόγδοον	τονιαῖον

Οι πράξεις μεταξύ των μουσικών διαστημάτων στην Πυθαγόρειο αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος διέπονται από μια ιδιάζουσα Άλγεβρα, λογαριθμικού χαρακτήρα, ακατανόητη από τον νου του τότε μη μαθηματικού μουσικού εκτελεστή. Κατ' αυτήν η πρόσθεση μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται με πολλαπλασιασμό των αριθμητικών τους λόγων, ενώ η αφαίρεση μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται με διαίρεση του αριθμητικού λόγου του μειωτέου δια του αριθμητικού λόγου του αφαιρετέου.
Ο απλός μουσικός οργανοπαίχτης έχει μάθει ότι τα μεγέθη αθροίζονται με πρόσθεση και όχι με πολλαπλασιασμό και η διαφορά τους προκύπτει με αφαίρεση και όχι με διαίρεση. Με αυτή τη φιλοσοφία πραγματοποιούνται οι πράξεις των διαστημάτων κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων, ο βασικότερος λόγος που επεκράτησε ανάμεσα στους μουσικούς εκτελεστές εκείνου του καιρού.

Ο Αριστόξενος τον 4^{ον} αιώνα π.Χ. επιβάλλει τη γραμμικότητα των μουσικών διαστημάτων. Καταργεί τις όποιες Πυθαγόρειες ανισότητες μεταξύ των συνωνύμων διαστημάτων, εισηγούμενος για πρώτη φορά στην ιστορία της Μουσικής τον ίσο συγκερασμό. Κατά τον Αριστόξενο το διάστημα της διαπασών (=οκτάβας) διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος διαιρείται σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα.
Σήμερα θα λέγαμε ότι ο Αριστόξενος εισηγήθηκε τους συγκερασμούς στα 6, στα 12, στα 18 και στα 24, δηλαδή τον χωρισμό της οκτάβας σε 6 (κλίμακα ολόκληρων

τόνων), σε 12 (κλίμακα 12 ίσων ημιτονίων, όπως τα ισχύοντα ευρωπαϊκά ημιτόνια), σε 18 και σε 24 ίσα μεταξύ τους μουσικά διαστήματα. Η γραμμικότητα σε όλο της το μεγαλείο!

Κακώς διδάσκεται ότι εισηγητής του ίσου συγκερασμού είναι ο J. S. Bach το έτος 1722.

Ο Αριστόξενος ονομάζει μουσικό διάστημα την **απόσταση** ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού μουσικού ύψους. Πρέπει να σημειωθεί ότι η έννοια φθόγγος είναι συνώνυμη και της θέσεως του δεσμού που πατάει στο μάνικο μουσικού οργάνου το δάκτυλο του μουσικού εκτελεστού, προκειμένου να παραχθεί ένας ήχος συγκεκριμένου μουσικού ύψους. Κατά τον Κλεονίδη, τον Βακχείο και τον Ανώνυμο του Bellermann μουσικό διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους, δηλαδή δεσμούς, διαφορετικούς στο ύψος και στο βάθος.

Ο Νικόμαχος γράφει «διάστημα δ' ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης», δηλαδή διάστημα είναι ό,τι μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο πατήματα επί του μάνικου.

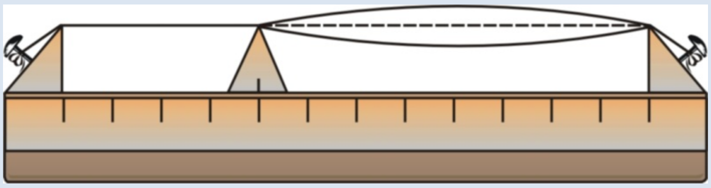
Σε αυτούς τους ορισμούς, θεωρώντας την έννοια φθόγγος με τη σημασία «θέση πατήματος επί του μάνικου του μουσικού οργάνου», το διάστημα αποκτά τη σημασία ενός ακινήτου ευθυγράμμου τμήματος κατά μήκος της χορδής του μονοχόρδου μουσικού οργάνου.

Κρίνω σκόπιμο στο σημείο αυτό να παραθέσω μια εξαιρετικά εύστοχη παρατήρηση του Νεοπυθαγορείου και Νεοπλατωνικού φιλοσόφου Θέωνος του Σμυρναίου (1ος-2ος μ.Χ. αι.) ότι δηλαδή η ταυτοφωνία δεν αποτελεί μουσικό διάστημα, αφού δεν υφίσταται μήκος μη ηχούντος τμήματος της χορδής του κανόνος ή, με άλλα λόγια, το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του κανόνος είναι μηδενικό («*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*», λ, 1-4).

Πυθαγόρειο πείραμα Ακουστικής κατά Γαυδέντιο.

Η ενασχόληση του Πυθαγόρα με τη μουσική τον κατέστησε ευτυχή, διότι με την εφαρμογή των Μαθηματικών στο χώρο της Μουσικής και με την πραγματοποίηση «ψυχοακουστικών» πειραμάτων οδηγήθηκε στη σπουδαία και πολύ γόνιμη ανακάλυψη ότι το μουσικό ύψος των φθόγγων εξαρτάται από το δονούμενο μήκος των χορδών. Η ανακάλυψη αυτή προέκυψε από πειράματα, που πραγματοποίησε ο Πυθαγόρας επάνω στον «κανόνα» ή «μονόχορδο» (Εικόνα 2). Με τη βοήθεια κινητού καβαλάρη (υπαγωγέως ή μαγαδίου) ήταν δυνατόν να υποδιαιρεθεί η χορδή σε δύο τμήματα, ένα δονούμενο (=ηχούν) κι ένα ακίνητο (=σιγούν).

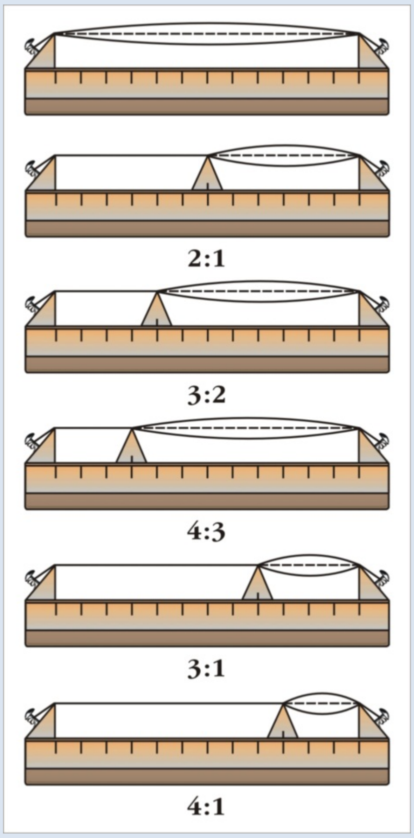
Η δόνηση των ηχούντων τμημάτων χορδής παρήγαγε ήχους διαφορετικών μουσικών υψών.



Εικόνα 2: Το μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Στην εικόνα 3 φαίνεται κατά τον Γαυδέντιο[1] ο τρόπος, που πιθανώς πειραματίσθηκε ο Πυθαγόρας επάνω στον κανόνα κι ανεκάλυψε τις αριθμητικές σχέσεις των συμφωνιών.
Διήρεσε τη χορδή του μονοχόρδου σε δύο ίσα τμήματα με τη βοήθεια ενός κινητού καβαλάρη, του υπαγωγέα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια το μισό μήκος αυτής. Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το διπλάσιο διάστημα $\left(\frac{2}{1}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 3-2ο μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διαπασών.
Κατόπιν διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος της χορδής του κανόνος σε τρία ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια τα $\frac{2}{3}$ του μήκους αυτής. Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το ημιόλιον διάστημα $\left(\frac{3}{2}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 3-3ο μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διαπέντε.
Τέλος, διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος της χορδής του κανόνος σε τέσσερα ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια τα $\frac{3}{4}$ του μήκους αυτής. Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το επίτριτον διάστημα $\left(\frac{4}{3}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 3-4ο μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διατεσσάρων.

[1] **Γαυδέντιος ο φιλόσοφος**, θεωρητικός της μουσικής. Τοποθετείται από άλλους μεν στον 2ο με 3ο αιώνα μ.Χ. από άλλους δε στον 5ο μ.Χ. αιώνα. Συνέγραψε το βιβλίο «*Αρμονική Εισαγωγή*», το οποίο αναφέρεται στους ήχους, τα διαστήματα, τα συστήματα, τα γένη κ.λπ. ακολουθώντας άλλοτε τις πυθαγόρειες και άλλοτε τις αριστοξένειες αντιλήψεις.



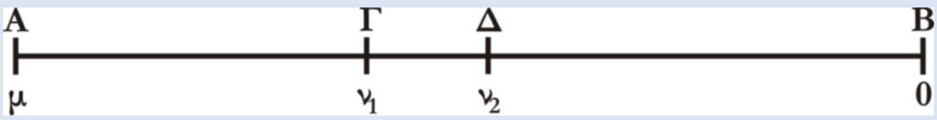
Εικόνα 3: Προσδιορισμός των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών συμφωνιών στο μονόχορδο.

Να σημειωθεί ότι οι παραπάνω ονομασίες των συμφώνων διαστημάτων κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπισή τους προκύπτουν αβίαστα, διότι το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής καθορίζεται στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας με τους αριθμούς 12 και 9 (ανάμεσα σε 4 τάστα) και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας με τους αριθμούς 12 και 8 (ανάμεσα σε 5 τάστα) (Εικόνα 3).

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΟΥΣΙΚΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑ ΜΗ ΗΧΟΥΝΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΧΟΡΔΗΣ

Πρόσθεση Μουσικών Διαστημάτων

Σε κανόνα, που φέρει χορδή μήκους ΑΒ διηρημένη σε μ ίσα τμήματα, λαμβάνονται δύο συνημμένα διαστήματα, των οποίων τα μη ηχούντα τμήματα της χορδής είναι τα ΑΓ (μ, ν_1) και ΓΔ (ν_1, ν_2) $(\mu > \nu_1 > \nu_2)$. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του διαστήματος του αθροίσματός των ισούται με το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων χορδής των δύο δοθέντων διαστημάτων (σχήμα 1)



Σχήμα 1: Πρόσθεση Μουσικών Διαστημάτων

$$\left|\mathrm{A}\Delta\right| = \left|\mathrm{A}\Gamma\right| + \left|\Gamma\Delta\right| = \left(\mu - \nu_1\right) + \left(\nu_1 - \nu_2\right) = \mu - \nu_1 + \nu_1 - \nu_2 = \mu - \nu_2$$

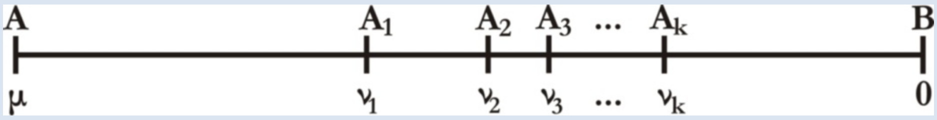
Στην περίπτωση κατά την οποία τα δύο συνημμένα μουσικά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ των, τότε τα αντίστοιχα μήκη των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής ΔΕΝ είναι ίσα μεταξύ των, δηλαδή $\left(\mu, \nu_1\right) \neq \left(\nu_1, \nu_2\right)$.

Πράγματι, οι λόγοι των ηχούντων τμημάτων της χορδής των δύο διαστημάτων είναι ίσοι μεταξύ των.

$$\frac{\nu_1 - 0}{\mu - 0} = \frac{\nu_2 - 0}{\nu_1 - 0} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\mu} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \Rightarrow \nu_1^2 = \mu \cdot \nu_2 \Rightarrow \nu_2 = \frac{\nu_1^2}{\mu}$$

Η μη γραμμική σχέση αυτή μας δίνει την υποδιαίρεση της χορδής του κανόνος εις την οποία καταλήγει το μήκος του μη ηχούντος τμήματος του δευτέρου (εκ των ίσων) διαστήματος.

Στη γενική περίπτωση της προσθέσεως k το πλήθος συνημμένων διαστημάτων επί της χορδής κανόνος, η οποία φέρει μ ίσες υποδιαιρέσεις, το συνολικό μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του διαστήματος του ολικού τους αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων χορδής όλων των προσθετέων διαστημάτων (σχήμα 2).

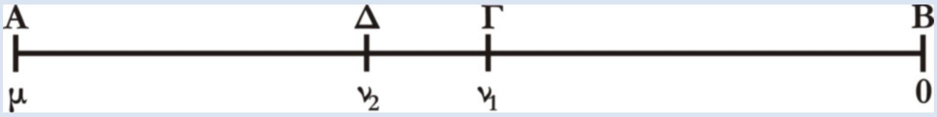


Σχήμα 2: Περίπτωση προσθέσεως k το πλήθος συνημμένων διαστημάτων
επί της χορδής κανόνος

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{AA}_k\right| = \left|\mathrm{AA}_1\right| + \left|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\right| + \left|\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\right| + \ldots + \left|\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k\right| = \\
&= \left(\mu - \nu_1\right) + \left(\nu_1 - \nu_2\right) + \left(\nu_2 - \nu_3\right) + \ldots + \left(\nu_{k-1} - \nu_k\right) = \\
&= \mu - \nu_1 + \nu_1 - \nu_2 + \nu_2 - \nu_3 + \ldots + \nu_{k-1} - \nu_k = \\
&= \mu - \nu_k
\end{aligned}$$

Αφαίρεση Μουσικών Διαστημάτων

Σε κανόνα που φέρει χορδή μήκους ΑΒ διηρημένη σε μ ίσα τμήματα (σχήμα 3), λαμβάνονται δύο διαστήματα κοινής αρχής, των οποίων τα μη ηχούντα τμήματα της χορδής είναι ΑΓ (μ,ν_1) και ΑΔ (μ,ν_2) $(\mu>\nu_2>\nu_1)$.



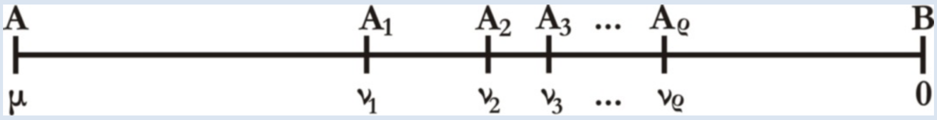
Σχήμα 3: Αφαίρεση δύο Μουσικών Διαστημάτων κοινής αρχής.

Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του διαστήματος της διαφοράς των ισούται με τη διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων χορδής του μειωτέου και του αφαιρετέου. Δηλαδή:

$$|\Delta\Gamma| = |\mathrm{A}\Gamma| - |\mathrm{A}\Delta| = (\mu-\nu_1)-(\mu-\nu_2) = \mu-\nu_1-\mu+\nu_2 = \nu_2-\nu_1$$

Ακέραιο εν δυνάμει «πολλαπλάσιο» διαστήματος

Γενικεύομε την έννοια του αθροίσματος για ρ το πλήθος συνημμένα μουσικά διαστήματα (σχήμα 4), τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους.



Σχήμα 4: Άθροισμα ρ το πλήθος συνημμένων μουσικών διαστημάτων, τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους.

Κατά τα γνωστά, για τα ίσα αυτά μουσικά διαστήματα τα αντίστοιχα μήκη των μη ηχούντων τμημάτων χορδής δεν είναι ίσα μεταξύ των. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος χορδής για το άθροισμα δεν προκύπτει ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους του μη ηχούντος τμήματος χορδής του πολλαπλασιαστέου. Γιαυτό δεν μιλούμε για πολλαπλάσιο, αλλά για εν δυνάμει πολλαπλάσιο.

Για το άθροισμα των επί μέρους μη ηχούντων τμημάτων χορδής ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{AA}_{\rho}\right| &= \left|\mathrm{AA}_1\right| + \left|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\right| + \left|\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\right| + \ldots + \left|\mathrm{A}_{\rho-1}\mathrm{A}_{\rho}\right| = \\
&= (\mu - \nu_1) + (\nu_1 - \nu_2) + (\nu_2 - \nu_3) + \ldots + (\nu_{\rho-1} - \nu_{\rho}) = \\
&= \mu - \nu_1 + \nu_1 - \nu_2 + \nu_2 - \nu_3 + \ldots + \nu_{\rho-1} - \nu_{\rho} = \\
&= \mu - \nu_{\rho}
\end{aligned} \qquad (\sigma\chi.\ 1)$$

Λόγω των ίσων λόγων των δονουμένων τμημάτων χορδής γι' αυτά τα ίσα μουσικά διαστήματα, ισχύει η σχέση:

$$\frac{\nu_1}{\mu} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\nu_3}{\nu_2} = \ldots = \frac{\nu_{\rho}}{\nu_{\rho-1}} = \lambda, \qquad \lambda \in R \qquad (\sigma\chi.\ 2)$$

Από τη σχέση 2 προκύπτουν:

$$\nu_1 = \lambda\mu \qquad (\sigma\chi.3)$$

$$\nu_2 = \lambda\nu_1 = \lambda \cdot \lambda\mu = \lambda^2\mu \qquad (\sigma\chi.4)$$

$$\nu_3 = \lambda\nu_2 = \lambda \cdot \lambda^2\mu = \lambda^3\mu \qquad (\sigma\chi.5)$$

....

....

$$\nu_{\rho} = \lambda\nu_{\rho-1} = \lambda^{\rho}\mu \qquad (\sigma\chi.6)$$

Από τις σχέσεις (6) και (3) προκύπτει η γενική σχέση:

$$\nu_{\rho} = \left(\frac{\nu_1}{\mu}\right)^{\rho} \mu = \frac{\nu_1^{\rho}}{\mu^{\rho-1}} \qquad (\sigma\chi.7)$$

από την οποία για $\rho = 2,3,4,\ldots$ προκύπτουν οι υποδιαιρέσεις της χορδής επί του κανόνος, οι οποίες προσδιορίζουν τα μήκη των μη ηχούντων τμημάτων χορδής για τα συνημμένα ρ το πλήθος ίσα μουσικά διαστήματα

$$\nu_2 = \frac{\nu_1^2}{\mu^{2-1}}$$

$$\nu_3 = \frac{\nu_1^3}{\mu^{3-1}}$$

$$\nu_4 = \frac{\nu_1^4}{\mu^{4-1}}$$

$\kappa.\lambda\pi.$

Ακέραιο εν δυνάμει «υποπολλαπλάσιο» διαστήματος

Σε κανόνα, που φέρει χορδή μήκους ΑΒ διηρημένη σε μ το πλήθος ίσα τμήματα, δίδεται διάστημα ΑΓ (μ,ν). Ζητείται να υποδιαιρεθεί το μήκος του μη ηχούντος τμήματος (μ,ν) έτσι, ώστε να προκύψουν ρ το πλήθος ίσα διαστήματα.

Έστω επί του κανόνος σημείο $Α_1$ τέτοιο, ώστε αφενός μεν να ορίζει διάστημα με μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής $ΑΑ_1$ (μ,ν_1), αφετέρου δε, λαμβανόμενο ρ το πλήθος φορές, να πληροί το διάστημα με μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής ΑΓ (μ,ν). Τούτο, βάσει των προηγουμένων περί εν δυνάμει «πολλαπλασίου» διαστήματος, σημαίνει:

$$\mu-\nu=\mu-\nu_\rho=\mu-\frac{\nu_1^\rho}{\mu^{\rho-1}}=\frac{\mu^\rho-\nu_1^\rho}{\mu^{\rho-1}} \Rightarrow \mu^\rho-\nu_1^\rho=(\mu-\nu)\mu^{\rho-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_1^\rho=\mu^\rho-(\mu-\nu)\mu^{\rho-1} \Rightarrow \nu_1^\rho=\mu^\rho\left[1-\frac{\mu-\nu}{\mu}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_1^\rho=\mu^\rho\left[\frac{\mu-\mu+\nu}{\mu}\right] \Rightarrow \nu_1^\rho=\mu^\rho\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \Rightarrow \nu_1=\mu\sqrt[\rho]{\frac{\nu}{\mu}}$$

Με γνωστό το ν_1 από τη σχέση 7 περί του εν δυνάμει «πολλαπλασίου» διαστήματος, βρίσκονται τα
$\nu_2,\ \nu_3,\ldots$

$$\nu_2=\frac{\nu_1^2}{\mu}=\frac{\mu^2\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2}}{\mu}=\mu\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2}$$

$$\nu_3=\frac{\nu_1^3}{\mu^2}=\frac{\mu^3\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3}}{\mu^2}=\mu\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3}$$

....

....

$$\nu_k=\mu\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k}$$

Μετατροπή Αριστοξενείου εκφράσεως του μουσικού διαστήματος σε Πυθαγόρειο

Δίδεται λ.χ. η ακολουθία των ακεραίων αριθμών 13824 15552 17496, η οποία εκφράζει τρεις δεσμούς επί υποθετικού κανόνος μεταξύ των οποίων καθορίζονται δύο συνημμένα μουσικά διαστήματα (Αριστοξένειος αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων).
Ζητείται να εκφρασθούν τα εν λόγω διαστήματα υπό μορφήν επιμορίων σχέσεων δύο αριθμών (Πυθαγόρειος αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων).

Το μουσικό διάστημα μεταξύ των αριθμών 13824 15552 κατά την Πυθαγόρειο αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων εκφράζεται από το λόγο

$$\frac{15552}{13824}=\frac{\lambda}{1} \Rightarrow \frac{15552-13824}{13824}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow \frac{1728}{13824}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8}\cdot 13824}{13824}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow 1=8\lambda-8 \Rightarrow 9=8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{9}{8}$$

Άρα $\frac{15552}{13824}=\lambda=\frac{9}{8}$ (διάστημα επογδόου τόνου)

Το μουσικό διάστημα μεταξύ των αριθμών 15552 17496 κατά την Πυθαγόρειο αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων εκφράζεται από το λόγο

$$\frac{17496}{15552}=\frac{\lambda}{1} \Rightarrow \frac{17496-15552}{15552}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow \frac{1944}{15552}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8}\cdot 15552}{15552}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow 1=8\lambda-8 \Rightarrow 9=8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{9}{8}$$

Άρα $\frac{17496}{15552}=\lambda=\frac{9}{8}$ (διάστημα επογδόου τόνου)